LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА НЕКОТОРЫХ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГАУССОВСКИХ МЕР

Т. И. МИРСКАЯ, А. С. ПАБЕДИНСКАЙТЕ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

В п. 1 настоящей работы описаны гильбертовы пространства воспроизводящих ядер, являющихся корреляционными функциями некоторых гауссовских случайных процессов; в п. 2 эти результаты применяются к дифференцированию вероятностных мер.

1. Пусть H – гильбертово пространство функций, заданных на некотором множестве T, со скалярным произведением $[f_1(s), f_2(s)]_H$. Пусть, далее, $K(s, t)$ – функция двух переменных, определенная на $T \times T$.

Определение. *Если для каждого фиксированного* $t_0 \in T$

$$K(s, t_0) \in H,$$

и для каждой функции $f(s) \in H$ *скалярное произведение*

$$[f(s), K(s, t_0)]_H = f(t_0),$$

то $K(s, t)$ *называется* ***воспроизводящим ядром*** *гильбертова пространства* H; *мы будем говорить также, что* H *– гильбертово пространство воспроизводящего ядра* $K(s, t)$, *и обозначать его* $H(K)$.

Эта терминология оправдана тем, что гильбертово пространство H и его воспроизводящее ядро K однозначно определяют друг друга. Заметим также, что всякая симметричная неотрицательно определенная функция $K(s, t)$, $s, t \in T$, является воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства $H(K)$ функций, определенных на T (см., например, [1]).

1.1. Пусть ядро $K(s, t)$, определенное на $T \times T$, где $T = [a, b]$, обладает следующими свойствами:

1) множество точек невырожденности ядра (т. е. точек $t \in (a, b)$, где $K(s, t) \neq 0$) открыто, поэтому его можно представить в виде объединения непересекающихся „интервалов невырожденности" $I_k = (\alpha_k, \beta_k)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, а $1 \leqslant n \leqslant \infty$;

2) если s и t принадлежат одному и тому же интервалу невырожденности, то $K(s, t)$ представимо в виде:

$$K(s, t) = \begin{cases} \psi(s)\varphi(t), & \text{если } s \leqslant t, \\ \varphi(s)\psi(t), & \text{если } s > t, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \geqslant 0$ – неубывающая конечная непрерывная функция на этом интервале; во всех остальных случаях функция $K(s, t)$ равна нулю.

Ядро $K(s, t)$ симметрично и неотрицательно определено, поэтому оно однозначно определяет гильбертово пространство $H(K)$, структура которого задается следующей теоремой.

Теорема 1.1. *Гильбертово пространство $H(K)$ воспроизводящего ядра (1.1) состоит из функций $f(t)$ таких, что*

а) $f(t)=\varphi(t)\gamma_k\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)$, *если* $t\in I_k$, *где* $\gamma_k(u)$ *— абсолютно непрерывная функция на интервале* $\left(\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0),\ \frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)\right)$, *причем* $\gamma_k(o)=0$; *если* $t\notin\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$, *то* $f(t)\equiv 0$;

$$б)\ \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k+0}^{\beta_k-0}\left(\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'_t}{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'_t}\right)^2 d\,\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}<\infty,\qquad 1\leqslant n\leqslant\infty;^{*)}$$

$$в)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{f^2}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)<\infty.$$

Скалярное произведение в пространстве $H(K)$ задается формулой:

$$[f(t),\ g(t)]_{H(K)}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k+0}^{\beta_k-0}\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'_t\left(\frac{g}{\varphi}\right)'_t}{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'^2_t}\,d\,\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{fg}{\varphi\psi}(\alpha_k+0). \tag{1.2}$$

Замечание. На каждом интервале I_k функция $u(t)=\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ монотонна, поэтому почти всюду по мере du; существует конечная производная обратной функции $\left[\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-1}\right]'$. Поскольку

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'_t=\frac{1}{\left[\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-1}\right]'},$$

то конечная или бесконечная производная $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'_t$ также существует почти всюду по мере $du=d\,\frac{\psi}{\varphi}$. Если $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'_t<\infty$, то существует производная

$$\left(\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right)'=\gamma'_u\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)\cdot\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)';$$

при этом

$$\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'_t}{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'_t}=\gamma'_u\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right). \tag{1.3}$$

Если же $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'_t(t_0)=\infty$, то в точке t_0 подынтегральная функция представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается по той же формуле (1.3).

Если

$$\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)\neq 0,$$

---

*) Мы полагаем, что $\frac{0}{0}=0$, а $\frac{1}{0}=\infty$.

то

$$\frac{f}{\sqrt{\varphi\psi}}(\alpha_k+0)=\lim_{t\to\alpha_k+0}\frac{f}{\sqrt{\varphi\psi}}(t)=\lim_{t\to\alpha_k+0}\frac{\gamma_k\left(\frac{\psi}{\varphi}(t)\right)}{\sqrt{\frac{\psi}{\varphi}(t)}}=\frac{\gamma_k\left(\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)\right)}{\sqrt{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}},$$

а если

$$\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)=0,$$

то

$$\frac{f}{\sqrt{\varphi\psi}}(\alpha_k+0)=0,$$

поскольку

$$\left|\gamma_k\left(\frac{\psi}{\varphi}(t)\right)\right|=\left|\gamma_k\left(\frac{\psi}{\varphi}(t)\right)-\gamma_k(0)\right|=$$

$$=\left|\int_0^{\frac{\psi}{\varphi}(t)}\gamma_k'(u)\,du\right|\leqslant\left(\int_0^{\frac{\psi}{\varphi}(t)}du\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{\psi}{\varphi}(t)}\gamma_k'^2(u)\,du\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\psi}{\varphi}(t)}\left(\int_{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}^{\frac{\psi}{\varphi}(t)}\gamma_k'^2(u)\,du\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство теоремы: Обозначим пространство функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1, через $H[a, b]$. Покажем, что оно является гильбертовым пространством воспроизводящего ядра (1.1). Легко проверить, что формулой (1.2) задается скалярное произведение. Проверим, например, что

$$[f(t), f(t)]_{H(K)}=0$$

тогда и только тогда, когда $f(t)\equiv 0$. Очевидно, если $f(t)\equiv 0$, то и

$$[f(t), f(t)]_{H(K)}=0.$$

Пусть теперь $[f(t), f(t)]_{H(K)}=0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}^{\frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)}\gamma_k'^2(u)\,du+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^2}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)=0,\qquad 1\leqslant n\leqslant\infty.$$

Тогда при любом k $(1\leqslant k\leqslant n)$

$$\gamma_k'=0$$

почти всюду на интервале

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0),\ \frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)\right),$$

и

$$\gamma_k\left(\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)\right)=\frac{f}{\sqrt{\psi\varphi}}(\alpha_k+0)\sqrt{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}=0;$$

поскольку функция $\gamma_k(u)$ абсолютно непрерывна, для любого

$$u\in\left(\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0),\ \frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)\right)$$

$$\gamma_k(u)=\int_{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}^{u}\gamma_k'(u)\,du\equiv 0;$$

следовательно, $f(t)\equiv 0$.

Докажем полноту пространства $H[a, b]$.

На каждом интервале невырожденности I_k функции

$$f(t)=\varphi(t)\gamma_k\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right), \tag{1.4}$$

принадлежащей $H[a, b]$, поставим в соответствие функцию $g(u)$ из пространства $L_2^{(k)}$ функций, определенных на отрезке

$$\left[\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0),\ \frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)\right]$$

и интегрируемых с квадратом относительно меры

$$\mu_k(A)=l(A)+\delta_k(A).$$

Здесь $l(A)$ – мера Лебега, а $\delta_k(A)$ – единичная мера, сконцентрированная в точке $\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)$. Функция $g(u)$ определяется почти всюду формулой

$$g(u)=\begin{cases}\gamma'(u), & \text{если}\quad u\neq\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0),\\ \frac{f}{\sqrt{\varphi\psi}}(\alpha_k+0), & \text{если}\quad u=\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0).\end{cases} \tag{1.5}$$

Нетрудно показать, что соответствие $f\leftrightarrow g$, задаваемое формулами (1.4) и (1.5), есть изометрия пространств $H[\alpha_k, \beta_k]$ и $L_2^{(k)}(\mu_k)$. В таком случае на всем отрезке $[a, b]$ функции $f(t)\in H[a, b]$ будет соответствовать последовательность

$$\left(g_1(u),\ \ldots,\ g_n(u)\right), \qquad 1\leqslant n\leqslant\infty.$$

Поскольку при $n=\infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|g_i(u)\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}^{\frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)} g_i^2(u)\,d\mu_k=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}^{\frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)}\gamma_i'^2(u)\,du+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i^2}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)<\infty,$$

то последовательность

$$\left(g_1(u),\ \ldots,\ g_n(u)\right), \qquad 1\leqslant n\leqslant\infty,$$

принадлежит гильбертову пространству

$$G=L_2^{(1)}\oplus\ldots\oplus L_2^{(n)}, \qquad 1\leqslant n\leqslant\infty.$$

Соответствие между пространствами $H[a, b]$ и G есть изометрия, поэтому $H[a, b]$ – гильбертово пространство.

Теперь докажем, что $K(s, t)$ – воспроизводящее ядро пространства $H[a, b]$. Легко проверить, что $K(s, t_0)\in H[a, b]$. Остается показать, что для любой $f(s)\in H[a, b]$

$$[f(s),\ K(s,\ t_0)]_{H[a,b]}=f(t_0).$$

$$[f(s),\ K(s,\ t_0)]_{H[a,b]}=\sum_{k=1}^{n}\int_{\alpha_k+0}^{\beta_k-0}\frac{\left(\frac{f(s)}{\varphi(s)}\right)'\left(\frac{K(s,\ t_0)}{\varphi(s)}\right)'}{\left(\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}\right)'^2}\,d\,\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{fK(\cdot,\ t)}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)=$$

$$=\varphi(t_0)\int_{\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)}^{\frac{\psi}{\varphi}(\beta_k-0)}\gamma'(u)\,du+\varphi(t_0)\,\frac{f}{\varphi}(\alpha_k+0)=$$

$$=\varphi(t_0)\left(\gamma\left(\frac{\psi}{\varphi}(t_0)\right)-\gamma\left(\frac{\psi}{\varphi}(\alpha_k+0)\right)\right)+\varphi(t_0)\frac{f}{\varphi}(\alpha_k+0)=$$

$$=\varphi(t_0)\left(\frac{f}{\varphi}(t_0)-\frac{f}{\varphi}(\alpha_k+0)\right)+\varphi(t_0)\frac{f}{\varphi}(\alpha_k+0)=f(t_0).$$

Итак, $H[a, b]$ есть гильбертово пространство $H(K)$ воспроизводящего ядра (1.1).

1.2. Пусть $(X, \mathfrak{B}, F)$ – измеримое пространство с σ-конечной мерой, а $\mathfrak{B}_k$ – кольцо всех интегрируемых измеримых множеств конечной меры. На $\mathfrak{B}_k$ рассмотрим положительно определенное ядро

$$K(A, B)=F(A\cap B). \tag{1.6}$$

Теорема 1.2. *Гильбертово пространство $H(K)$ воспроизводящего ядра $K(A, B)$ состоит из счетно-аддитивных функций множеств $R(A)$, $A\subset\mathfrak{B}_k$, обладающих следующими свойствами:*

а) $R(A)\ll F(A)$;

б) *производная* $r(x)=\dfrac{R(dx)}{F(dx)}\in L_2(F)$.

Скалярное произведение в пространстве $H(K)$ определяется следующим образом:

$$[R_1(A), R_2(A)]_{H(K)}=\int_X r_1(x)r_2(x)F(dx),$$

где $r_1(x)$ и $r_2(x)$ – производные мер $R_1(A)$ и $R_2(A)$ по мере $F(A)$.

1.3. Пусть D – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, заданных на n-мерном пространстве R^n с топологией Шварца [3], а D_A – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, обращающихся в нуль вне $A\subset R^n$. Пусть далее, на пространстве $D\oplus D$ задан положительно определенный билинейный функционал $K(\varphi, \psi)$. Известно [3], что такой функционал допускает спектральное представление в виде

$$K(\varphi, \psi)=\int_{R^n}\tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\overline{\tilde{\psi}(\vec{\lambda})}F(d\vec{\lambda}), \tag{1.7}$$

где $F(d\vec{\lambda})$ – некоторая положительная мера степенного роста $\left(\text{т. е. такая, что } \int_{R^n}(1+|\vec{\lambda}|^2)^{-p}F(d\vec{\lambda})<\infty \text{ при некотором } p\geqslant 0\right)$, а $\tilde{\varphi}(\vec{\lambda})$ и $\tilde{\psi}(\vec{\lambda})$ – преобразования Фурье функций $\varphi(\vec{\lambda})$ и $\psi(\vec{\lambda})$, принадлежащих пространству D.

Теорема 1.3. *Гильбертово пространство $H(K)$ воспроизводящего ядра $K(\varphi, \psi)$ $(\varphi, \psi\in D_A)$, состоит из сужений на D_A обобщенных функций $f(\varphi)$ $(\varphi\in D)$, обладающих следующими свойствами:*

а) *каждая функция $f(\varphi)$ представима в виде:*

$$f(\varphi)=\int_{R^n}\tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\Theta(d\vec{\lambda}), \tag{1.8}$$

где $\Theta(d\vec{\lambda})$ – комплексная мера Лебега – Стильтьеса;

б) $\Theta(d\vec{\lambda})\ll \mathrm{F}(d\vec{\lambda})$;

в) $\dfrac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})}\in L_2(F, A)$, *где* $L_2(F, A)$ *— линейное подпространство пространства* $L_2(F)$, *порожденное функциями* $\tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\,(\varphi \in D_A)$; *скалярное произведение в пространстве* $H(K)$ *задается формулой:*

$$[f_1(\varphi),\ f_2(\varphi)]_{H(K)} = \int_{R^n} \vartheta_1(\vec{\lambda})\overline{\vartheta_2(\vec{\lambda})}\,F(d\vec{\lambda}),$$

где Θ_i *— спектральная мера функции* $f_i(\varphi)$, $i=1,2$ *(см.* (1.8)).

Замечание 1. Из свойств а) и б) следует, что $\Theta\ (d\vec{\lambda})$ — мера степенного роста, следовательно, интеграл (1.8) сходится для всех $\varphi \in D$.

Замечание 2. Для любого $p \geqslant 0$ имеет место следующее включение

$$L_2\ (F,\ A) \subseteq \tilde{L},$$

где $\tilde{L}$ — подпространство пространства $L_2(F)$, порожденное функциями

$$\frac{e^{i\,(\vec{\lambda},\,\vec{t})}}{(1+|\vec{\lambda}|^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

При $p=0$, в случае, когда внутренние точки множества A образуют в нем плотное подмножество, $L_2(F,\ A)$ совпадает с $\tilde{L}$.

Доказательство теоремы. Пусть H — пространство обобщенных функций $f(\varphi)\,(\varphi \in D_A)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Прежде всего покажем, что H — гильбертово пространство. Для этого достаточно показать, что H изометрично $L_2(F,\ A)$. Существование в заимнооднозначного соответствия между элементами этих двух пространств следует из определения пространства H. Очевидно, что линейным комбинациям функций из H соответствуют линейные комбинации функций из $L_2(F,\ A)$, и что скалярные произведения в этих пространствах совпадают. Итак, H — гильбертово пространство. Докажем, что $K(\varphi,\ \psi)$ — его воспроизводящее ядро, т. е., что выполнены условия:

а) $K(\varphi,\ \psi_0) \in H$ для каждой функции $\psi_0(t) \notin D_A$;

б) $[f(\varphi),\ K(\varphi,\ \psi_0)]_{H(K)} = f(\psi_0)$.

В нашем случае

$$K(\varphi,\ \psi_0) = \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\,\overline{\tilde{\psi}_0(\vec{\lambda})}\,F(d\vec{\lambda}).$$

Ясно, что мера

$$\overline{\tilde{\psi}_0(\vec{\lambda})}\,F(d\vec{\lambda}) \ll F(d\vec{\lambda}),$$

и что

$$\overline{\tilde{\psi}_0(\vec{\lambda})} \in L_2(F,\ A).$$

Далее,

$$[f(\varphi),\ K(\varphi,\ \psi_0)]_{H(K)} = \int_{R^n} \vartheta(\vec{\lambda})\,\tilde{\psi}_0(\vec{\lambda})\,F(d\vec{\lambda}) = \int_{R^n} \tilde{\psi}_0(\vec{\lambda})\,\Theta\,(d\vec{\lambda}) = f(\psi_0).$$

Теорема доказана.

2. Рассмотрим применение полученных результатов к дифференцированию мер, соответствующих гауссовским случайным процессам.

Пусть $\{\xi(t),\ t\in T\}$ – действительная гауссовская случайная функция с нулевым средним значением $\left(\mathbf{M}\xi(t)=0\right)$ и корреляционной функцией $K(s,\ t)=$ $=\mathbf{M}\xi(s)\xi(t)$. Пусть далее, P_0 и P_m – вероятностные меры, порожденные в пространстве функций случайными функциями $\xi(t)$ и $\xi(t)+m(t)$, где $t\in T$, а $m(t)$ – неслучайная функция. H_ξ – гильбертово пространство случайных величин со скалярным произведением $(\eta,\ \zeta)=\mathbf{M}\eta\zeta$, натянутое на семейство $\{\xi(t),\ t\in T\}$.

Известно, что корреляционная функция любого случайного процесса симметрична и неотрицательно определена; поэтому она является воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства.

Лемма 1. *Между гильбертовым пространством $H(K)$ воспроизводящего ядра $K(s,\ t)$ и гильбертовым пространством H_ξ существует изометрия, при которой $K(s,\ t_0)$ переходит в $\xi(t_0)$ для каждого $t_0\in T$ (см.* [6], [7]).

Лемма 2. *Для эквивалентности мер P_m и P_0 необходимо и достаточно, чтобы функция $m(t)$ принадлежала гильбертову пространству $H(K)$; при этом*

$$\frac{P_m(d\omega)}{P_0(d\omega)}=\exp\left\{[\xi,\ m]_K-\frac{1}{2}\,[m,\ m]_K\right\},$$

где $[\xi,\ m]_K$ – случайная величина из H_ξ, соответствующая функции $m(t)$ по изометрии между пространствами H_ξ и $H(K)$ (см. [6], [7]).

2.1. Пусть $\{\xi(t),\ t\in[a,\ b]\}$ – непрерывный в среднем квадратичном действительный гауссовский марковский случайный процесс с $\mathbf{M}\xi(t)\equiv 0$ и корреляционной функцией

$$K(s,\ t)=\mathbf{M}\xi(s)\xi(t). \tag{2.1}$$

Множество точек невырожденности процесса (т. е. точек, где $D\xi(t)\neq 0$) является открытым и, следовательно, может быть представлено в виде объединения „интервалов невырожденности" $(\alpha_k,\ \beta_k)$, $k=1,\ \ldots,\ n$; $1\leqslant n\leqslant\infty$. Из теоремы Дуба [5] вытекает, что в случае, когда s и t принадлежат одному интервалу невырожденности, корреляционная функция $K(s,\ t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.

Нетрудно доказать, что для такого процесса пространство H_ξ состоит из случайных величин вида

$$[\xi,\ f]_K=\sum_{k=1}^{n}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'}{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'}\,d\,\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f\xi}{\varphi\psi}\,(\alpha_k+0),\qquad 1\leqslant n\leqslant\infty,$$

где $f\in H(K)$, и что соответствие $f\leftrightarrow[\xi,\ f]_K$ есть изометрия, при которой $K(s,\ t_0)\leftrightarrow\xi(t_0)$ для каждого $t_0\in[a,\ b]$. Поэтому из теоремы 1.1 и леммы 2 вытекает следующая

Теорема 2.1. *Если $\{\xi(t),\ t\in[a,\ b]\}$ – непрерывный в среднем квадратичном гауссовский марковский процесс, то для эквивалентности мер P_0 и P_m*

необходимо и достаточно, чтобы функция $m(t)$ *удовлетворяла следующим условиям:*

а) $m(t)\equiv 0$, *если* $t\notin\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$;

б) *существуют абсолютно непрерывные функции* $\gamma_k(u)$, $0\leqslant u<\infty$, *такие, что* $\gamma_k(0)=0$ *и*

$$\frac{m(t)}{\varphi(t)}=\gamma_k\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right), \quad \text{если} \quad t\in I_k;$$

в) $$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k+0}^{\beta_k-0}\left(\frac{\left(\frac{m}{\varphi}\right)'}{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'}\right)^2 d\,\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \qquad 1\leqslant n\leqslant\infty;$$

г) *если* $n=\infty$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{m^2}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)<\infty$.

Производная Радона – Никодима $\frac{P_m(d\omega)}{P_0(d\omega)}$ *имеет вид:*

$$\frac{P_m(d\omega)}{P_0(d\omega)}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k+0}^{\beta_k-0}\frac{\left(\frac{m(t)}{\varphi(t)}\right)'}{\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)'}\,d\,\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{m\xi}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_k+0}^{\beta_k-0}\left(\frac{\left(\frac{m(t)}{\varphi(t)}\right)'}{\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)'}\right)^2 d\,\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{m^2}{\varphi\psi}(\alpha_k+0)\right\}, \qquad 1\leqslant n\leqslant\infty.$$

К этому же результату иным путем пришли Ю. И. Голосов и А. А. Темпельман [4]. Результат Д. Варберга [8] является частным случаем вышеприведенной теоремы.

2.2. Пусть $(X,\mathfrak{B})$ – измеримое пространство, а $Z(A)$ – действительная гауссовская ортогональная случайная мера на $\mathfrak{B}$ с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичной мерой $F(A)=\mathrm{M}\,|Z(A)|^2$; легко видеть, что корреляционная функция случайной функции $Z(A)$

$$K(A,\ B)=F(A\cap B). \tag{2.2}$$

Нетрудно также доказать, что пространство H_Z, порожденное случайной мерой $Z(A)$, состоит из случайных величин вида

$$\zeta=\int\limits_X g(x)\,Z(dx),$$

где $g(x)\in L_2(F)$, и что соответствие

$$R(A)\leftrightarrow\int\limits_X\frac{R(dx)}{F(dx)}\,Z(dx)$$

есть изометрия между пространствами $H(K)$ и H_Z, при которой $K(A,\ B_0)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow Z(B_0)$.

Пользуясь теоремой 1.2 и леммой 2, получаем следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть* $G(A)$ *– функция множеств, а* P_0 *и* P_m *– вероятностные меры на пространстве функций, соответствующие гауссовской ортогональной случайной мере* $Z(A)$ *(с нулевым средним значением и корре-*

ляционной функцией (2.2)) *и мере* $Z(A)+G(A)$. *Для эквивалентности мер* P_0 *и* P_m *необходимо, чтобы функция* $G(A)$ *обладала следующими свойствами:*

а) $G(A)$ — *аддитивная функция;*

б) $G(A) \ll F(A)$;

в) $\frac{G(dx)}{F(dx)} \in L_2(F)$.

Тогда

$$\frac{P_m(d\omega)}{P_0(d\omega)} = \exp\left\{\int_X \frac{G(dx)}{F(dx)}\, Z(dx) - \frac{1}{2}\int_X \left|\frac{G(dx)}{F(dx)}\right|^2 F(dx)\right\}.$$

Отметим, что из условий а) и б) вытекает, что $G(A)$ — счетно-аддитивная функция множеств.

2.3. Пусть $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D$ — действительное однородное обобщенное случайное поле с нулевым средним значением и корреляционным функционалом $K(\varphi, \psi)$.

Известно [2], что $K(\varphi, \psi)$ допускает спектральное представление (1.7), а само поле $\xi(\varphi)$ представимо в виде:

$$\xi(\varphi) = \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\, Z(d\vec{\lambda});$$

$Z(d\vec{\lambda})$ — ортогональная случайная мера, причем

$$\mathbf{M}[Z(A_1)\overline{Z(A_2)}] = F(A_1 \cap A_2),$$

где $F(A)$ — спектральная мера поля $\xi(\varphi)$.

Рассмотрим обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D_A$, являющееся сужением обобщенного случайного поля $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D$, и меры P_m и P_0 в пространстве обобщенных функций $f(\varphi)$, $\varphi \in D_A$, порожденные обобщенными случайными полями

$$\eta_m(\varphi) = \xi(\varphi) + m(\varphi)$$

и

$$\eta_0(\varphi) = \xi(\varphi),$$

где $\varphi \in D_A$.

Нетрудно показать, что пространство H_ξ, порожденное обобщенным случайным полем $\{\xi(\varphi),\ \varphi \in D_A\}$, состоит из случайных величин вида

$$\eta = \int_{R^n} g(\vec{\lambda})\, Z(d\vec{\lambda}),$$

где $g(\vec{\lambda}) \in L_2(F, A)$, и что соответствие

$$f(\varphi) = \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\, \Theta(d\vec{\lambda}) \leftrightarrow \int_{R^n} \frac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})}\, Z(d\vec{\lambda})$$

задает изометрию между пространствами $H(K)$ и H_ξ, при которой

$$K(\varphi, \psi_0) \leftrightarrow \xi(\psi_0).$$

Зная строение пространств $H(K)$ и H_ξ, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.3. *Для эквивалентности мер* P_m *и* P_0 *в случае действительного гауссовского однородного обобщенного случайного поля необходимо и* *достаточно, чтобы функционал $m(\varphi)$, $\varphi \in D_A$, был линейным и удовлетворял следующим условиям:*

а) $m(\varphi) = \int\limits_{R^n} \tilde{\varphi}(\vec{\lambda})\,\Theta(d\vec{\lambda})$,

где $\Theta(d\vec{\lambda})$ — комплексная мера;

б) $\Theta(d\vec{\lambda}) \ll F(d\vec{\lambda})$;

в) $\dfrac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})} \in L_2(F, A)$.

При этом производная

$$\frac{P_m(d\omega)}{P_0(d\omega)} = \exp\left\{ \int\limits_{R^n} \frac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})} Z(d\vec{\lambda}) - \frac{1}{2} \int\limits_{R^n} \left| \frac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})} \right|^2 F(d\vec{\lambda}) \right\}.$$

Замечание 1. Из условий б) и в) вытекает, что $\Theta(d\vec{\lambda})$ — мера степенного роста, и функционал $m(\varphi)$, $\varphi \in D$, определяемый формулой а), является обобщенной функцией.

Замечание 2. Случайная величина

$$\zeta = \int\limits_{R^n} \frac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})} Z(d\vec{\lambda})$$

принадлежит гильбертову пространству H_ξ и, следовательно, измерима относительно σ-алгебры событий $\mathfrak{B}_{D_A}$, определяемой суженным полем $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D_A$, хотя мера $Z(d\vec{\lambda})$, вообще говоря, не измерима относительно этой σ-алгебры (она измерима относительно всей σ-алгебры $\mathfrak{B}_D$). „Внутреннее" определение случайной величины ζ можно дать следующим образом:

$$\zeta = \underset{m\to\infty}{l.i.m}\,\xi(\varphi_m),$$

где $\varphi_m \in D_A$ и

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{R^n} \left| \tilde{\varphi}_m(\vec{\lambda}) - \frac{\Theta(d\vec{\lambda})}{F(d\vec{\lambda})} \right|^2 F(d\vec{\lambda}) = 0.$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Аронщайн, Теория воспроизводящих ядер, Математика, 7, 2, 67—130 (1963).
2. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, Оснащенные гильбертовы пространства, М., Физматгиз, 1961.
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и их применение, М., Физматгиз, 1958.
4. Ю. И. Голосов, А. А. Темпельман, Отношение правдоподобия для гипотез о тренде некоторых гауссовских процессов, Доклады АН СССР, 153, 6, 1242—1244 (1963).
5. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
6. E. Parzen, Regression analysis of continuous parameter time series, Proc. IV Berkeley Sympos., 1, 469—489 (1961).
7. E. Parzen, Extraction and detection problems and reproduction kernel Hilbert spases, J. SIAM Control, Ser. A, 1, 1, 35—62 (1962).
8. D. E. Varberg, Gaussian measures and a theorem of T. S. Pitcher, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 5, 799—809 (1962).

KAI KURIŲ REPRODUKUOJANČIŲ BRANDUOLIŲ HILBERTO ERDVĖS IR GAUSO MATŲ EKVIVALENTIŠKUMAS

T. MIRSKAJA, A. PABEDINSKAITĖ, A. TEMPELMAN

(Reziumė)

Šiame straipsnyje nagrinėjamos Hilberto erdvės trikampio ir kai kurių kitų tipų reprodukuojančių branduolių, pasitaikančių tikimybiniuose uždaviniuose. Šių rezultatų pagalba rastos būtinos ir pakankamos kai kurių Gauso matų ekvivalentiškumo sąlygos ir šių matų Radono—Nikodimo išvestinės.

HILBERTRÄUME EINIGER REPRODUZIERENDEN KERNE UND DIE ÄQUIVALENZ DER GAUßSCHEN MAßEN

T. MIRSKAJA, A. PABEDINSKAITĖ, A. TEMPELMAN

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden die Hilbert-Räume der Dreieckkerne und der reproduzierenden Kerne einiger anderen Typen, die man in den Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung antrifft, beschrieben. Dank diesen Resultaten sind die notwendige und hinreichende Bedingungen der Äquivalenz einiger Gaußschen Maßen und die Radon—Nikodymsche Ableitungen dieser Maßen erhalten.