LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

РОМБИЧЕСКИЕ И РОМБОЭДРИЧЕСКИЕ СЕТИ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. ПАДЕРВИНСКАС

Трехмерная сеть, описываемая вектором $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$, называется [1]: ромбической, если

$$\mathbf{r}_{u^1}^2 : \mathbf{r}_{u^2}^2 : \mathbf{r}_{u^3}^2 = A(u^2, u^3) : B(u^1, u^3) : C(u^1, u^2); \tag{1}$$

ромбоэдрической, если

$$\mathbf{r}_{u^1}^2 = \mathbf{r}_{u^2}^2 = \mathbf{r}_{u^3}^2. \tag{2}$$

В этой заметке исследуются существование и автоморфизмы таких сетей, а также возможность включить однопараметрическое семейство поверхностей в ромбическую или ромбоэдрическую сеть.

Дифференциальные уравнения и существование ромбических сетей. Чтобы выполнялось равенство (1), необходимо и достаточно, чтобы производные $\mathbf{r}_{u^1}$, $\mathbf{r}_{u^2}$, $\mathbf{r}_{u^3}$, которые дальше будем обозначать соответственно $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, удовлетворяли системе дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{r}_i^2 (\mathbf{r}_j^2)^2 (\mathbf{r}_{ii} \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_i \mathbf{r}_{iij}) + 2 (\mathbf{r}_i^2)^2 (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_{jj}) (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_{ij}) [i, j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{3}$$

скобка $[i, j]$ означает альтернирование по индексам i и j. Уравнение (3) получаем исключая A, B, C из уравнений (1). Среди уравнений (3) только два являются независимыми.

После преобразования

$$\left.\begin{aligned} u^{1'} &= u^1 + u^2 + u^3, \\ u^{2'} &= u^2, \\ u^{3'} &= u^3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

из системы (3) получаем:

$$[(2\mathbf{r}_{1'} \mathbf{r}_{\alpha'} + \mathbf{r}_{\alpha'}^2)\mathbf{r}_{1'} - \mathbf{r}_{1'}^2 \mathbf{r}_{\alpha'}]\, \mathbf{r}_{1'1'1'} = F_{\alpha'} \qquad (\alpha' = 2, 3);$$

$F_{\alpha'}$ – рациональная скалярная функция производных вектора $\mathbf{r}$; от $\mathbf{r}_{1'1'1'}$ F_α не зависит. Отсюда, после замены

$$\mathbf{r}_{i'} \mathbf{r}_{1'1'1'} = x_{i'}^1 x_{1'1'1'}^1 + x_{i'}^2 x_{1'1'1'}^2 + x_{i'}^3 x_{1'1'1'}^3,$$

получаем уравнения, которые можем разрешить относительно $x_{1'1'1'}^1$, $x_{1'1'1'}^2$, так как определитель из коэффициентов при $x_{1'1'1'}^1$, $x_{1'1'1'}^2$ не равен нулю тождественно:

$$D = \begin{vmatrix} (2\mathbf{r}_{1'} \mathbf{r}_{2'} + \mathbf{r}_{2'}^2) x_{1'}^1 - \mathbf{r}_{1'}^2 x_{2'}^1 & (2\mathbf{r}_{1'} \mathbf{r}_{2'} + \mathbf{r}_{2'}^2) x_{1'}^2 - \mathbf{r}_{1'}^2 x_{2'}^2 \\ (2\mathbf{r}_{1'} \mathbf{r}_{3'} + \mathbf{r}_{3'}^2) x_{1'}^1 - \mathbf{r}_{1'}^2 x_{3'}^1 & (2\mathbf{r}_{1'} \mathbf{r}_{3'} + \mathbf{r}_{3'}^2) x_{1'}^2 - \mathbf{r}_{1'}^2 x_{3'}^2 \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{5}$$

Таким образом, получаем нормальную систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$x_{1'1'1'}^\alpha = \varphi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{6}$$

Возьмем начальные условия:

$$\text{постоянные } u_0^{i'},\ x_0^i,\ x_{1'}^{\alpha}=a_1^{\alpha},\ x_{1'1'}^{\alpha}=a_2^{\alpha}, \tag{7}$$

голоморфные в точке $(u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ функции

$$x_{1'}^{\alpha}\big|_{u^{1'}=u_0^{1'}}=\varphi_1^{\alpha}(u^{2'},\ u^{3'}),\quad x_{1'1'}^{\alpha}\big|_{u^{1'}=u_0^{1'}}=\varphi_2^{\alpha}(u^{2'},\ u^{3'}) \tag{8}$$

$$\left(\varphi_{\beta}^{\alpha}(u_0^{2'},\ u_0^{3'})=a_{\beta}^{\alpha},\ \alpha,\ \beta=1,\ 2\right)$$

и произвольную голоморфную в точке $(u_0^{1'},\ u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ функцию $x^3(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'})$, такие, чтобы определитель D в точке $(u_0^{1'},\ u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ был не равен нулю.

При данных начальных условиях система (6) дифференциальных уравнений имеет единственное решение, удовлетворяющие начальным условиям (7), (8):

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'}).$$

После преобразования (4) получим решение уравнений (3):

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1+u^2+u^3,\ u^2,\ u^3).$$

Таким образом, произвол ромбических сетей определяют начальные условия (7), (8).

Автоморфизмы ромбических сетей. Будем искать преобразования

$$x^{i'}=x^{i'}(x^j)\quad(\det)\ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\ (\neq 0), \tag{9}$$

которые любую ромбическую сеть $\mathbf{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$ преобразуют в ромбическую сеть $\mathbf{r}'(u^1,\ u^2,\ u^3)$. Дифференцируя $\mathbf{r}'$ как сложную функцию, получим:

$$\mathbf{r}'_j=\mathbf{r}'_{\bar m}x_j^{\bar m}\qquad\left(\mathbf{r}'_j=\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial u^j};\ \mathbf{r}'_{\bar k}=\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial x^{\bar k}}\right);$$

$$\mathbf{r}'_{jk}=\mathbf{r}'_{\bar m\bar n}x_j^{\bar m}x_k^{\bar n}+\mathbf{r}'_{\bar m}x_{jk}^{\bar m};$$

$$\mathbf{r}'_{jkl}=\mathbf{r}'_{\bar m\bar n\bar p}x_m^{\bar j}x^{\bar k}x_l^{\bar p}+\mathbf{r}'_{\bar m\bar n}(x_{jl}^{\bar m}x_k^{\bar n}+x_{kl}^{\bar m}x_j^{\bar n}+x_{jk}^{\bar m}x_l^{\bar n})+\mathbf{r}'_{\bar m}x_{jkl}^{\bar m}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3) после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{gathered}
(\mathbf{r}'_{\bar i}\mathbf{r}'_{\bar j})(\mathbf{r}'_{\bar k}\mathbf{r}'_{\bar l})(\mathbf{r}'_{\bar m}\mathbf{r}'_{\bar n})(\mathbf{r}'_{\bar p\bar s}\mathbf{r}'_{\bar t\bar h})x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_i^{\bar p}x_i^{\bar s}x_i^{\bar t}x_j^{\bar h}+\\
+(\mathbf{r}'_{\bar i}\mathbf{r}'_{\bar j})(\mathbf{r}'_{\bar k}\mathbf{r}'_{\bar l})(\mathbf{r}'_{\bar m}\mathbf{r}'_{\bar n})(\mathbf{r}'_{\bar p}\mathbf{r}'_{\bar s\bar t\bar h})x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_i^{\bar p}x_i^{\bar s}x_i^{\bar t}x_j^{\bar h}+\\
+2(\mathbf{r}'_{\bar i}\mathbf{r}'_{\bar j})(\mathbf{r}'_{\bar k}\mathbf{r}'_{\bar l})(\mathbf{r}'_{\bar m}\mathbf{r}'_{\bar n\bar p})(\mathbf{r}'_{\bar s}\mathbf{r}'_{\bar t\bar h})x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_i^{\bar k}x_i^{\bar l}x_j^{\bar m}x_i^{\bar n}x_j^{\bar p}x_j^{\bar s}x_j^{\bar t}x_j^{\bar h}+\\
+(\mathbf{r}'_{\bar i}\mathbf{r}'_{\bar j})(\mathbf{r}'_{\bar k}\mathbf{r}'_{\bar l})(\mathbf{r}'_{\bar m}\mathbf{r}'_{\bar n})(\mathbf{r}'_{\bar p}r'_{\bar s\bar t})(x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_{ij}^{\bar p}x_i^{\bar s}x_i^{\bar t}+\\
+x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_{ii}^{\bar p}x_i^{\bar s}x_j^{\bar t}+2x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_i^{\bar p}x_{ij}^{\bar s}x_i^{\bar t}+\\
+x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_i^{\bar p}x_{ii}^{\bar s}x_j^{\bar t}+2x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_i^{\bar k}x_i^{\bar l}x_j^{\bar m}x_{ij}^{\bar n}x_j^{\bar p}x_i^{\bar s}x_j^{\bar t}+\\
+2x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_i^{\bar k}x_i^{\bar l}x_j^{\bar m}x_{ij}^{\bar n}x_j^{\bar p}x_j^{\bar s}x_j^{\bar t})+\\
+(\mathbf{r}'_{\bar i}\mathbf{r}'_{\bar j})(\mathbf{r}'_{k}\mathbf{r}'_{\bar l})(\mathbf{r}'_{\bar m}\mathbf{r}'_{\bar n})(\mathbf{r}'_{\bar s}\mathbf{r}'_{\bar t})(x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_{ii}^{\bar s}x^{\bar t}+\\
+x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_j^{\bar k}x_j^{\bar l}x_j^{\bar m}x_j^{\bar n}x_i^{\bar s}x_{ij}^{\bar t}+2x_i^{\bar i}x_i^{\bar j}x_i^{\bar k}x_i^{\bar l}x_j^{\bar m}x_{ij}^{\bar n}x_j^{\bar s}x_{jj}^{\bar t})[i,\ j]=0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Так как уравнения (3) преобразованием (4) сводятся в нормальную систему уравнений (6), то производные первого, второго, третьего порядков вектора $\mathbf{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$, кроме уравнений (3), не связаны никакой алгебрической зависимостью. Поэтому в уравнениях (10), когда $u^1+u^2+u^3=u_0^{1'}$, x_j^i, x_{jk}^i, x_{jkl}^i являются произвольными параметрами, связанными уравнениями (3). Из уравнений (3) выражаем два параметра через другие, например,

$$x_{11\alpha}^1=\frac{(\overline{\mathbf{r}}_1^2)^2\mathbf{r}_\alpha^2\,\mathbf{r}_\alpha\,\mathbf{r}_{\alpha 1\alpha}}{\mathbf{r}_1^2\,(\mathbf{r}_\alpha{}')^2\,x_1^1}+\ldots \qquad (\alpha=2,\ 3)$$

подставляем в уравнения (10) и приравниваем нулю коэффициенты при $x_{\alpha 1\alpha}^1$, так как равенства (10) должны обращаться в тождества, если сеть $\mathbf{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$ ромбическая и преобразования (9) – автоморфизмы ромбических сетей. Получим:

$$(\mathbf{r}'_{\bar i}\,\mathbf{r}'_{\bar j})(\mathbf{r}'_{\bar k}\,\mathbf{r}'_{\bar l})(\mathbf{r}'_{\bar m}\,\mathbf{r}'_{\bar n})(\mathbf{r}'_{\bar s}\,\mathbf{r}'_{\bar 1})\Big(x_1^{\bar i}\,x_1^{\bar j}\,x_\alpha^{\bar k}\,x_\alpha^{\bar l}\,x_\alpha^{\bar m}\,x_\alpha^{\bar n}\,x_1^{\bar s}\cdot\frac{(\mathbf{r}_1^2)^2\mathbf{r}_\alpha^2 x_2^1\,x_{\alpha 1\alpha}^1}{\mathbf{r}_1^2\,(\mathbf{r}_\alpha^2)^2\,x_1^1}-$$

$$-x_1^{\bar i}\,x_1^{\bar j}\,x_1^{\bar k}\,x_1^{\bar l}\,x_\alpha^{\bar m}\,x_\alpha^{\bar n}\,x_\alpha^{\bar s}\,x_{\alpha 1\alpha}^{\bar 1}\Big)\equiv 0.$$

Но эти равенства обращаются в тождества тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{r}'^2_{\bar 1}=\mathbf{r}'^2_{\bar 2}=\mathbf{r}'^2_{\bar 3};\quad \mathbf{r}'_{\bar i}\,\mathbf{r}'_{\bar j}=0,\quad \text{если } \bar i\neq\bar j.$$

Эти условия и достаточны для того, чтобы преобразование (9) любую ромбическую сеть перевело опять в ромбическую.

Таким образом, автоморфизмами ромбических сетей являются преобразования конформной группы.

Включения однопараметрического семейства поверхностей в ромбическую сеть. Пусть дано однопараметрическое семейство поверхностей

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,\ u^2,\ u^3) \tag{11}$$

(u^3 – параметр семейства). Если вектор $\mathbf{r}$ голоморфный в точке (u_0^1, u_0^2, u_0^3), то в окрестности этой точки семейство всегда можно включить в ромбическую сеть.

Обозначим $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j=g_{ij}$, тогда уравнения (3) можем записать в виде:

$$g_{jj}\,\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial u^i\,\partial u^j}-g_{ii}\,\frac{\partial^2 g_{jj}}{\partial u^i\,\partial u^j}=\frac{g_{jj}\,\dfrac{\partial g_{ii}}{\partial u^i}\,\dfrac{\partial g_{ii}}{\partial u^j}}{g_{ii}}-\frac{g_{ii}\,\dfrac{\partial g_{jj}}{\partial u^i}\,\dfrac{\partial g_{jj}}{\partial u^j}}{g_{jj}}. \tag{12}$$

Будем искать такое преобразование

$$\left.\begin{aligned} u^\alpha&=u^\alpha(u^{i'}),\\ u^3&=u^{3'},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left(\alpha=1,\ 2,\ \det\left|\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\right|\neq 0\right),$$

чтобы после этого преобразования $g_{i'i'}$ удовлетворяли уравнениям (12).

Возьмем какую-нибудь голоморфную в точке ($u_0^{1'}$, $u_0^{2'}$, $u_0^{3'}$) функцию $u^{1''}(u^{i'})$ и введем еще одно преобразование

$$\left.\begin{aligned} u^{1''}&=u^{1''}(u^{i'}),\\ u^{2''}&=u^{2'},\\ u^{3''}&=u^{3'},\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{i'}}\neq 0.$$

Тогда

$$g_{i'i'}=g_{ij}\,\frac{\partial u^i}{\partial u^{i''}}\,\frac{\partial u^j}{\partial u^{j''}}\,\frac{\partial u^{i''}}{\partial u^{i'}}\,\frac{\partial u^{j''}}{\partial u^{i'}}. \tag{15}$$

Подставляем $g_{i'i'}$ в уравнения (12) и получаем:

$$g_{ij}g_{kl}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i''}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j''}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{l''}}\frac{\partial u^{k''}}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{j'}}\left(\frac{\partial u^{i''}}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^{j''}}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^{n''}}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^{l''}}{\partial u^{i'}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial u^{i''}}{\partial u^{l'}}\frac{\partial u^{j''}}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^{n''}}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^{l''}}{\partial u^{j'}}\right)\frac{\partial^3 u^k}{\partial u^{k''}\partial u^{m''}\partial u^{n''}}=F_{i'j'}, \tag{16}$$

где через $F_{i'j'}$ обозначены правые стороны уравнений (12). Возьмем два из этих уравнений (третье является следствием этих двух), например $i'=1$, $j'=3$ и $i'=2$, $j'=3$. Эти уравнения в общем случае можно разрешить относительно $\frac{\partial^3 u^1}{(\partial u^{k''})^3}$, $\frac{\partial^3 u^2}{(\partial u^{k''})^3}$ (для определенности возьмем $k''=1$). Получим нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^3 u^1}{(\partial u^{1''})^3}&=\varphi_1,\\ \frac{\partial^3 u^2}{(\partial u^{1''})^3}&=\varphi_2.\end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Определитель из коэффициентов при $\frac{\partial^3 u^1}{(\partial u^{1''})^3}$, $\frac{\partial^3 u^2}{(\partial u^{1''})^3}$ в уравнениях (16) равен

$$D=g_{ij}g_{kl}\,g_{1m}g_{2p}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i''}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j''}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k''}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{l''}}\frac{\partial u^m}{\partial u^{m''}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p''}}\times$$
$$\times\frac{\partial u^{i''}}{\partial u^{3'}}\frac{\partial u^{j''}}{\partial u^{3'}}\frac{\partial u^{k''}}{\partial u^{3'}}\frac{\partial u^{l''}}{\partial u^{3'}}\left(\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{3'}}\right)^3\left(\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{1'}}\right)^3\left(\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{2'}}\right)^2\left(\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{1'}}\frac{\partial u^{p''}}{\partial u^{2'}}-\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{2'}}\frac{\partial u^{p''}}{\partial u^{1'}}\right).$$

Так как требуется, чтобы преобразования (13) и (14) были не вырожденными, то D может быть равным нулю тогда и только тогда, когда

$$g_{1m}g_{2p}\frac{\partial u^m}{\partial u^{m''}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p''}}\left(\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{1'}}\frac{\partial u^{p''}}{\partial u^{2'}}-\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{2'}}\frac{\partial u^{p''}}{\partial u^{1'}}\right)=0,$$

или

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_m\frac{\partial u^m}{\partial u^{m''}}\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{1'}}\cdot\mathbf{r}_2\mathbf{r}_p\frac{\partial u^p}{\partial u^{p''}}\frac{\partial u^{p''}}{\partial u^{2'}}\,[1',\ 2']=0,$$

или

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_m\times\mathbf{r}_p)\frac{\partial u^m}{\partial u^{m''}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p''}}\frac{\partial u^{m''}}{\partial u^{1'}}\frac{\partial u^{p''}}{\partial u^{2'}}=0.$$

Но это равенство выполняется только в том случае, если

$$\frac{\partial u^1}{\partial u^{1''}}\frac{\partial u^2}{\partial u^{2''}}-\frac{\partial u^1}{\partial u^{2''}}\frac{\partial u^2}{\partial u^{1''}}=0,$$

т. е. когда произведения преобразований (13) и обратного (14) вырождается.

Возьмем начальные условия для системы (17): постоянные

$$u^{\alpha''}=u_0^{\alpha''},\quad u^\alpha=a_0^\alpha,\quad u^{3''}=u^3=u_0^3,\quad\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{1''}}\right)_0=a_0^{\alpha+2},\quad\left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{(\partial u^{1''})^2}\right)_0=a_0^{\alpha+4},$$

и голоморфные в точке $(u_0^{2''},\ u_0^{3''})$ функции:

$$u^\alpha_{u^{1''}=u_0^{1''}}=\varphi^\alpha(u^{2''},\ u^{3''}),\quad\left(\frac{du^\alpha}{\partial u^{1''}}\right)_{u^{1''}=u_0^{1''}}=\varphi^{\alpha+2}(u^{2''},\ u^{3''}),$$
$$\left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{(\partial u^{1''})^2}\right)_{u^{1''}=u_0^{1''}}=\varphi^{\alpha+4}(u^{2''},\ u^{3''})$$
$$\left(\alpha=1,\ 2,\ \varphi^i(u_0^{''},\ u_0^{3''})=a_0^i,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\right),$$

такие, что

$$\left|\begin{matrix}a_0^3 & a_0^4\\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial u^{2''}} & \frac{\partial\varphi^2}{\partial u^{2''}}\end{matrix}\right|_{\substack{u^{2''}=u_0^{2''}\\ u^{3''}=u_0^{3''}}}\neq 0. \tag{18}$$

Тогда этот определитель будет не равен нулю и в окрестности точки $(u_0^{2''}, u_0^{3''})$, значит и в окрестности этой точки система (17) имеет единственное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$u^\alpha = u^\alpha(u^{1''}, u^{2''}, u^{3''}).$$

После преобразования (14) получим ромбическую сеть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u^{1''}(u^{i'}), u^{2'}, u^{3'}\right),$$

включающую в себя данное семейство поверхностей.

Начальные условия

$$u^\alpha = \varphi^\alpha(u^{2''}, u^{3''}),$$
$$u^3 = u^{3''}$$

определяют в трехмерном евклидовом пространстве поверхность

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[\varphi^1(u^{2''}, u^{3''}), \varphi^2(u^{2''}, u^{3''}), u^{3''}] = \mathbf{r}(u^{2''}, u^{3''}). \tag{19}$$

Уравнением этой поверхности в параметрах $u^{i''}$ является

$$u^{i''} = a_0^1,$$

а в параметрах $u^{i'}$ –

$$u^{1''}(u^{i'}) = a_0^1. \tag{20}$$

Поверхности $u^{2'} = \text{const}$, $u^{3'} = \text{const}$ пересекают поверхность (19) по ее параметрическим кривым, а поверхности $u^{1'} = c$ – по кривым $u^{1''}(c, u^{2''}, u^{3''}) = a_0^1$.

Так как функции φ^α можно взять произвольно, то и поверхность (19) будет произвольной, также произвольно можно взять на ней одно семейство параметрических кривых ($u^{2''} = \text{const}$), другое семейство параметрических кривых ($u^{3''} = \text{const}$) определяет данное семейство поверхностей.

Так как

$$\mathbf{r}_{1'} = \mathbf{r}_1 u^1_{u^{1'}} + \mathbf{r}_2 u^2_{u^{1'}},$$

то произвольность начальных условий $\varphi^{\alpha+2}$ означает произвольность вектора $\mathbf{r}_{1'}$ в каждой точке поверхности (19).

Так как

$$\mathbf{r}_{1'1'} = \mathbf{r}_{\alpha\beta} u^\alpha_{u^{1'}} u^\beta_{u^{1'}} + \mathbf{r}_\alpha u^\alpha_{u^{1'}u^{1'}} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

то произвольность $\varphi^{\alpha+4}$ означает произвольность вектора $\mathbf{r}_\alpha u^\alpha_{u^{1'}u^{1'}}$, который является проекцией вектора $\mathbf{r}_{1'1'}$ на соответствующую касательную плоскость поверхности $u^3 = \text{const}$ по направлению вектора $\mathbf{r}_{\alpha\beta} u^\alpha_{u^{1'}} u^\beta_{u^{1'}}$.

Таким образом: если в трехмерном евклидовом пространстве дано однопараметрическое семейство поверхностей T, такое, что описывающий его вектор $\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$ (u^3 – параметр семейства) голоморфный в точке (u_0^1, u_0^2, u_0^3), дана секущая этого семейства на поверхность S такая, что в параметрах u^i она определяется уравнениями:

$$u^\alpha = u^\alpha(u^{2''}, u^{3''}),$$
$$u^3 = u^{3''}$$

$\left(\alpha = 1, 2, u^\alpha \text{ – голоморфные в точке } (u_0^{2''}, u_0^{3''}) \text{ функции}\right)$, дано на поверхности S семейство кривых $\varphi(u^{2''}, u^{3''}, c) = 0$ $\left(\varphi \text{ – голоморфная в точке } (u_0^{2''}, u_0^{3''}) \text{ функция}\right)$, в каждой точке поверхности S даны векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, касательные к соответствующей поверхности $u^3 = \text{const}$:

$$\mathbf{r}_1 = a_1 \mathbf{r}_{u^1} + b_1 \mathbf{r}_{u^2},$$
$$\mathbf{r}_2 = a_2 \mathbf{r}_{u^1} + b_2 \mathbf{r}_{u^2}$$

$\left(a_\alpha,\ b_\alpha\right.$ голоморфные в точке $(u_0^{2''},\ u_0^{3''})$ функции$\left.\right)$, такие, что в точке $(u_0^{2''},\ u_0^{3''})$

$$a_1 \frac{\partial u^2}{\partial u^{2''}} - b_1 \frac{\partial u^1}{\partial u^{2''}} \neq 0,$$

то в окрестности точки $(u_0^1,\ u_0^2,\ u_0^3)$ при данной параметризации поверхности S существует единственная ромбическая сеть $\mathbf{r}(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'})$, одно семейство поверхностей которой $(u^3=\text{const})$ совпадает с данным семейством, а остальные семейства поверхностей пересекают поверхность S по кривым $u^{2''}=\text{const}$ и $\varphi(u^{2''},\ u^{3''},\ c)=0$. Уравнением поверхности S в параметрах $u^{i'}$ является $\varphi(u^{2'},\ u^{3'},\ u^{1'})=0$; $\mathbf{r}_{u^{1'}}=\mathbf{r}_1$ и проекция вектора $\mathbf{r}_{u^{1'}u^{1'}}$ по направлению вектора

$$\mathbf{r}_{u^1u^1}a^2+\mathbf{r}_{u^1u^2}ab+\mathbf{r}_{u^2u^2}b^2$$

в касательную плоскость соответствующей поверхности $u^3=\text{const}$ равна $\mathbf{r}_2$. *Ромбоэдрические сети.* Чтобы доказать существования ромбоэдрических сетей, введем преобразования (4). Тогда из системы (2) получаем

$$2\,\mathbf{r}_{1'}\mathbf{r}_{\alpha'}+\mathbf{r}_{\alpha'}^2=0. \tag{21}$$

Так как определитель

$$D=\begin{vmatrix} x_{2'}^1 & x_{2'}^2 \\ x_{3'}^1 & x_{3'}^2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю тождественно, то в общем случае уравнения (21) можно разрешить относительно $x_{1'}^1$ и $x_{1'}^2$; получим нормальную систему дифференциальных уравнений. Возьмем начальные условия

$$u^{i'},\ x_0^i,\quad x^\alpha|_{u^{1'}=u_0^{1'}}=\varphi^\alpha(u^{2'},\ u^{3'})\quad \left(\varphi^\alpha(u_0^{2'},\ u_0^{3'})=x_0^\alpha\right)$$

и произвольную голоморфную в точке $(u_0^{1'},\ u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ функцию $x^3=x^3(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'})$ $\left(\varphi^\alpha\right.$ — тоже голоморфные функции в точке $(u_0^{2'},\ u_0^{3'})\left.\right)$ такие, чтобы определитель D в точке $(u_0^{1'},\ u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ был не равен нулю.

Тогда в окрестности точки $(u_0^{1'},\ u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ существует единственное решение дифференциальных уравнений (21) (а тем самым и (2)):

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'})=\mathbf{r}(u^1+u^2+u^3,\ u^2,\ u^3).$$

Автоморфизмами ромбоэдрических сетей, очевидно, являются преобразования конформной группы.

Пусть дано однопараметрическое семейство поверхностей

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$$

(u^3 — параметр семейства). Будем искать такое преобразование

$$u^{\alpha'}=u^{\alpha'}(u^1,\ u^2,\ u^3),$$
$$u^{3'}=u^3\qquad(\alpha=1,\ 2)$$

чтобы после этого преобразования получить

$$\mathbf{r}_{1'}^2=\mathbf{r}_{2'}^2=\mathbf{r}_{3'}^2. \tag{22}$$

Введем еще преобразования

$$u^{1''}=u^{1''}(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'}),$$
$$u^{2''}=u^{2'},$$
$$u^{3''}=u^{3'}$$

$\left(u^{1''}\right.$ голоморфная в точке $(u_0^{1'},\ u_0^{2'},\ u_0^{3'})$ функция$\left.\right)$.

Тогда

$$g_{i'i'}=g_{ij}\,\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i''}}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{j''}}\,\frac{\partial u^{i''}}{\partial u^{i'}}\,\frac{\partial u^{j''}}{\partial u^{i'}}$$

и уравнения (22) преобразуются в:

$$g_{ij}\,\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{1''}}\left(\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{1'}}\right)^{2}=g_{ij}\left(\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{2'}}+\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{2''}}\right)\left(\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{2'}}+\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{2''}}\right)=$$

$$=g_{ij}\left(\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{3'}}+\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{3'}}\right)\left(\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{1''}}{\partial u^{3'}}+\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{3'}}\right).$$

Для упрощения уравнений возьмем

$$u^{1''}=u^{1'}+u^{2'}+u^{3'}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}2g_{\alpha j}\,\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{2''}}&=-g_{ij}\,\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{2''}}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{3''}},\\ 2g_{\alpha j}\,\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{1''}}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{3''}}&=-g_{ij}\,\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{3''}}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{3''}},\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

$$(\alpha=2,\ 3).$$

Эти уравнения в общем случае можно разрешить относительно $\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{1''}}$; получим нормальную систему дифференциальных уравнений.

Возьмем начальные условия:

$$u^{i''}=u_0^{i''},\ u_0^{\alpha},\ u^{\alpha}|_{u^{1''}=u_0^{1''}}=\varphi^{\alpha}(u^{2''},\ u^{3''})$$

$\left(\varphi^{\alpha}(u_0^{2''},\ u_0^{3''})=u^{\alpha},\ \alpha=1,\ 2,\ \varphi^{\alpha}\right.$ — голоморфные в точке $(u_0^{2''},\ u_0^{3''})$ функции$\left.\right)$. Тогда в окрестности точки $(u_0^{1''},\ u_0^{2''},\ u_0^{3''})$ существует единственное преобразование

$$u^{\alpha}=u^{\alpha}(u^{1''},\ u^{2''},\ u^{3''})=u^{\alpha}(u^{1'}+u^{2'}+u^{3'},\ u^{2'},\ u^{3'}),$$

после которого выполняется равенство (22).

Определитель D системы (23) равен:

$$D=\begin{vmatrix} g_{1j}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{2''}} & g_{2j}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{2''}}\\ g_{1j}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{3''}} & g_{2j}\,\frac{\partial u^{j}}{\partial u^{3''}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{2''} & \mathbf{r}_2\mathbf{r}_{2''}\\ \mathbf{r}_1\mathbf{r}_{3''} & \mathbf{r}_2\mathbf{r}_{3''}\end{vmatrix}=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_{2''}\times\mathbf{r}_{3''}).$$

Начальные условия φ^{α} определяют поверхность. Если эта поверхность в точке $(u_0^{1''},\ u_0^{2''},\ u_0^{3''})$ не перпендикулярна к поверхности $u^3=u_0^3$, то D в этой точке не равен нулю.

Таким образом: если дано однопараметрическое семейство поверхностей T такое, что описывающий ее вектор $\mathbf{r}(u^1,\ u^2,\ u^3)$ (u^3 — параметр семейства) голоморфный в точке $(u_0^1,\ u_0^2,\ u_0^3)$, дана поверхность S, секущая данное семейство поверхностей и в точке $(u_0^1,\ u_0^2,\ u_0^3)$, не перпендикулярная к поверхности $u^3=u_0^3$ такая, что в параметрах u^1, u^2, u^3 уравнение ее

$$u^{\alpha}=u^{\alpha}(u^{2''},\ u^{3''}),$$

$$u^3=u^{3''}$$

$\left(\alpha=1,\ 2,\ u^{\alpha}\right.$ — голоморфные в точке $(u_0^{2''},\ u_0^{3''})$ функции$\left.\right)$, то в окрестности точки $(u_0^1,\ u_0^2,\ u_0^3)$, при данной параметризации поверхности S, существует единственная ромбоэдрическая сеть $\mathbf{r}(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'})$, такая что

1) одно семейство ее поверхностей совпадает с данным семейством поверхностей,

2) остальные семейства поверхностей этой сети пересекают S по кривым $u^{2'}=\text{const}$ и $u^{2'}+u^{3'}=\text{const}$,

3) уравнением поверхности S в параметрах $u^{1'}$, $u^{2'}$, $u^{3'}$ является

$$u^{1'}+u^{2'}+u^{3'}=0.$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
1.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Liebmann, Rhombische Geradennetze im Raum, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss. math.- nat., Kl. Jahrgang, 1927.

ROMBINIAI IR ROMBOEDRINIAI TINKLAI TRIMATĖJE EUKLIDINĖJE ERDVĖJE

V. PADERVINSKAS

(Reziumė)

Darbe įrodomas trimatės euklidinės erdvės rombinių ir romboedrinių tinklų egzistavimas ir automorfizmai, o taip pat įrodoma galimybė įjungti vienparametrinę paviršių šeimą į tokių tinklų sudėtį.

DIE RHOMBISCHE UND RHOMBOEDRISCHE NETZE IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

V. PADERVINSKAS

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel untersucht man die Existenz und die Automorphismen der rhombischen und rhomboëdrischen Netze im dreidimensionalen euklidischen Raum. Ebenso wird die Möglichkeit eine einparametrische Flächenschar in ein solches Netz einzubetten gezeigt.