LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ТЕОРЕМА ОБ АРГУМЕНТЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. И. ПЕРОВ, А. В. КИБЕНКО

1. Пусть E_x конечномерное вещественное банахово пространство. Напомним, что непрерывная комплекснозначная функция $z(x)$ называется **почти-периодической**, если при любом $\varepsilon>0$ множество всех ее ε-периодов $\Omega\Big(\varepsilon;\ z(\ )\Big)$ относительно плотно в пространстве E_x. Вектор $\omega\in E_x$ называется **ε-периодом,** если

$$\sup|z(x+\omega)-z(x)|<\varepsilon. \tag{1}$$

Множество $A\subset E_x$ относительно плотно в E_x, если при некотором $\rho>0$ любой шар пространства E_x радиуса ρ пересекается с множеством A.

Каждой почти-периодической функции $z(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$z(x)\sim\sum z_\lambda e^{i\lambda x}, \tag{2}$$

где $z_\lambda\neq 0$ и показатели λ принадлежат E_λ. Совокупность показателей Фурье функции $z(x)$ образует ее **спектр.**

Наименьшая аддитивная группа, содержащая спектр, называется **модулем** почти-периодической функции и обозначается $\mathfrak{M}\{z(\ )\}$.

На скалярные почти-периодические функции многих переменных переносятся все основные факты теории почти-периодических функций одной переменной (см. монографию [1], в которой рассмотрен даже более общий случай – почти-периодические функции на группе). Так, например, можно показать, что для двух почти-периодических функций $z(x)$ и $\zeta(x)$ включение

$$\mathfrak{M}\{\zeta(\ )\}\subset\mathfrak{M}\{z(\ )\} \tag{3}$$

имеет место тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что

$$\Omega\Big(\delta;\ z(\ )\Big)\subset\Omega\Big(\varepsilon,\ \zeta(\ )\Big). \tag{4}$$

2. Пусть $z(x)$ почти-периодическая функция, **отделенная от нуля** $|z(x)|\geqslant k>0$ $(x\in E_x)$. Положим $z(x)=|z(x)|e^{iy(x)}$. Функция $|z(x)|$ также является почти-периодической. Если задать $y(0)$, то $y(x)$ по непрерывности однозначно продолжима на все пространство E_x; она называется **аргументом** функции $z(x)$ и обозначается $\arg z(x)$; различные непрерывные ветви аргумента функции отличаются на целое кратное 2π. Из равномерной непрерывности почти-периодической функции $z(x)$ вытекает, что ее аргумент также является равномерно непрерывной функцией.

Теорема Бора об аргументе почти-периодической функции одной переменной допускает следующее обобщение (относительно теоремы Бора см. [1], стр. 128—135).

Теорема 1. *Пусть $z(x)$ скалярная почти-периодическая функция, отделенная от нуля и $y(x)=\arg z(x)$.*

Тогда

$$y(x)=\mu x+u(x), \tag{5}$$

где $\mu\in E_x^*$, $u(x)$ — вещественная почти-периодическая функция, причем

$$\mu\in\mathfrak{M}\{z(\ )\},\quad \mathfrak{M}\{u(\ )\}\subset\mathfrak{M}\{z(\ )\}. \tag{6}$$

Доказательство. Для любого фиксированного $x\in E_x$ скалярная функция $\exp\big(iy(tx)\big)$ почти-периодична по t и потому в силу теоремы Бора существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} y(tx)/t$, который мы обозначим $\mu(x)$.

Для доказательства линейности функционала μ нам удобнее перейти к координатам в пространстве E_x. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ базис пространства E_x и $x=x^1e_1+\ldots+x^m e_m$. Положим $y(x)=y(x^1, \ldots, x^m)$ и $\mu(e_j)=\mu_j$ $(j=1, \ldots, m)$. Из анализа доказательства теоремы Бора вытекает существование таких функций $\varepsilon_j(s)$ $(0<s<+\infty;\ j=1, \ldots, m)$, что $\varepsilon_j(s)\to 0$ при $s\to+\infty$ и при всех $j=1, \ldots, m$

$$\left|\frac{y(x^1, \ldots, x^{j-1}, x^j+h^j, x^{j+1}, \ldots, x^m)-y(x^1, \ldots, x^m)}{h^j}-\mu_j\right|\leqslant\varepsilon_j(|h_j|). \tag{7}$$

Из этой системы неравенств вытекает справедливость оценки

$$\left|y(x+h)-y(x)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j h^j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j(|h_j|)\,|h_j|. \tag{8}$$

Полагая в этой формуле $x=0$ и заменяя h на th, мы получаем (разделив на t и устремив затем $t\to\infty$)

$$\mu(h)=\sum_{j=1}^{m}\mu_j h^j. \tag{9}$$

Таким образом, $\mu\in E_x^*$.

Дальше поступаем как в классической теореме Бора. Выберем число $0<\varepsilon<\pi$ (произвольное) и положим $\eta=2k\sin\frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда для любого η-периода τ функции $z(x)$ можно указать такое целое число $n(\tau)$, что

$$y(x+\tau)=y(x)+2\pi n(\tau)+v(x, \tau), \tag{10}$$

$$\sup|v(x, \tau)|<\varepsilon. \tag{11}$$

Из написанных соотношений обычным путем выводим, что

$$|\mu\tau-2\pi n(\tau)|<\varepsilon\qquad\big(\tau\in\Omega\,\eta,\ z(\ )\big). \tag{12}$$

Из этого соотношения вытекает, что линейный функционал μ принадлежит модулю $\mathfrak{M}\{z(\ )\}$.

Полагая $u(x)=y(x)-\mu x$ из формул (10), (11) и (12) получаем

$$\sup|u(x+\tau)-u(x)|<2\varepsilon. \tag{13}$$

Это соотношение в силу произвольности ε не только показывает почти-периодичность функции $u(x)$, но и согласно замечанию, сделанному в конце п. 1, означает справедливость включения

$$\mathfrak{M}\{u(\ )\}\subset\mathfrak{M}\{z(\ )\}.$$

Теорема доказана.

3. В качестве приложения доказанной нами теоремы рассмотрим линейное многомерное дифференциальное уравнение

$$z'(x)\,dx = a(x)\,dx\,z(x), \tag{14}$$

где $a(x)$ почти-периодическая (ко)векторная функция (со значениями в пространстве E_x^+ всех комплексных линейных функционалов, заданных на E_x; норма в E_x^+ вводится обычным образом). Нетрудно видеть, что уравнение (14) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда криволинейный интеграл от $a(x)$ не зависит от пути интегрирования (см., например, [2]). Относительно линейных многомерных уравнений см. [3], [4]. Будем говорить, что уравнение (14) **приводимо**, если его нетривиальное решение представимо в виде

$$z(x) - e^{\sigma x}\zeta(x), \tag{15}$$

где $\sigma \in E_x^+$ и $\zeta(x)$ — почти-периодическая функция, отделенная от нуля.

Приведем без доказательства следующее простое утверждение.

Теорема 2. *Вполне интегрируемое уравнение* (14) *с почти-периодической (ко)векторной функцией* $a(x)$ *приводимо тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^x a(\xi)\,d\xi = \alpha(x) + з(x), \tag{16}$$

где $\alpha \in E_x^+$, *и* $з(x)$ *— почти-периодическая функция.*

Мы предполагаем, что и в общем случае условие такого типа является необходимым в указанном выше смысле.

Воронежский Государственный университет

Поступило в редакцию 5.I.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, ГИТТЛ, М., 1953.
2. М. К. Гаврин, Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., вып. 19, № 137 (1950).
3. R. und F. Nevanlinna, Absolute Analysis, Grundlehren Math. Wiss., 102, Springer, 1959.
4. А. И. Перов, О многомерных дифференциальных уравнениях первого порядка, Сиб. мат. журнал, т. 7, № 2, 344—352 (1966).

TEOREMA APIE DAUGELIO KINTAMŲJŲ BEVEIK PERIODINES FUNKCIJOS ARGUMENTĄ

A. PEROVAS, A. KIBENKO

(Reziumė)

Straipsnyje pateiktas Boro teoremos apie beveik periodinės funkcijos argumentą apibendrinimas daugelio kintamųjų funkcijos atveju. Gautas rezultatas panaudojamas nustatant daugiamatės diferencialinės lygties

$$z'(x)\,dx = a(x)\,dx\,z(x)$$

su beveik periodine dešine puse redukcijos sąlygas.

THEOREM ON THE ARGUMENT OF THE ALMOST PERIODIC FUNCTION OF MANY VARIABLES

A. PEROV, A. KIBENKO

(Summary)

The article presents the generalization of the Bohr Theorem on the argument of the almost periodic function for the case of the function of many variables.

The data obtained are used for finding the reduction conditions of the multidimentional equations

$$z'(x)\,dx = a(x)\,dx\,z(x)$$

its right side being almost periodic.