LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

О НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПРИ НЕМГНОВЕННОМ ВРЕМЕНИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

И. САПАГОВАС

Рассмотрим сначала следующую физическую модель. Пусть некоторый элемент начинает свою работу в момент $t=0$ и, проработав случайное время ξ_1, выходит из строя. В течение случайного времени η_1 он полностью восстанавливается. Восстановленный элемент опять работает время ξ_2 и восстанавливается за время η_2. Этот процесс продолжается неограниченно. Предполагается, что времена исправной работы ξ_i $(i=1, 2, \ldots)$ и времена восстановления η_j $(j=1, 2, \ldots)$ являются независимыми случайными величинами. Обозначим $F(x)=\mathbf{P}\{\xi_i<x\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $G(x)=\mathbf{P}\{\eta_j<x\}$ $(j=1, 2, \ldots)$. Функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ полностью определяют нашу модель.

В ряде практических случаев важно уметь находить вероятность того, что в заданном интервале времени длины t в стационарном режиме наблюдаемый элемент будет работать, если в начальный момент рассматриваемого интервала он работал. В данной заметке предлагается один метод нахождения этой вероятности, когда время восстановления постоянно, т. е. с вероятностью 1 $\eta_j=c$ для всех $j=1, 2, \ldots$ Заметим, что аналогичный вопрос другими методами и при других предположениях исследовался в [1].

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_T=\sum_{i=1}^{N(T)+1}(\xi_i+\eta_i)-T-\eta_{N(T)+1},$$

где $N(t)$ – число восстановлений элемента до момента t;

$$F_T(t)=\mathbf{P}\{\gamma_T<t\},$$

$$F_1(t)=\lim_{T\to\infty}F_T(t).$$

Существование этого предела будет обосновано позже. Тогда очевидно, что искомая вероятность $p(t)$ равна:

$$p(t)=\lim_{T\to\infty}\mathbf{P}\{\gamma_T\geqslant t/\gamma_T\geqslant 0\}=\frac{1-F_1(t)}{1-F_1(0)}. \tag{1}$$

В работе доказана следующая

Теорема. *Если время восстановления постоянно, то*

$$F_1(x)=\frac{1}{\alpha_1+c}\left[\int_0^x\Big(1-F(t)\Big)\,dt+cG_1(x)\right], \tag{2}$$

где

$$\alpha_1=\int\limits_0^{\infty}\Big(1-F(x)\Big)\,dx,$$

$$G_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\leqslant -c,\\ \dfrac{x+c}{c}, & \text{при } -c<x\leqslant 0,\\ 1, & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем две леммы для общего случая, т. е. когда время восстановления η_j – случайная величина с функцией распределения $G(x)$.

Лемма 1. *Имеет место соотношение*:

$$F'_T(t)=H(T+t)-H(T)-[H(T+t)-H(T)]_*\,F(t)_*\,G(t), \tag{3}$$

где $F'_T(t)=\mathbf{P}\,\{\zeta_T<t\}$, *а* ζ_T *– величина первого перескока через барьер в точке* T, *т.е.*

$$\zeta_T=\sum_{i=1}^{N(T)+1}(\xi_i+\eta_i)-T;$$

*символ * означает свертку,* $H(t)=\mathbf{M}\,N(t)$. Уравнение (3) является обобщением известного уравнения восстановления.

Доказательство. Аналогично процессам восстановления с мгновенным временем восстановления (см., напр., [2]) находим, что

$$\mathbf{P}\,\{N(t)=k\}=F^{*(k)}(t)_*G^{*(k)}(t)_*\,[1-F(t)_*\,G(t)] \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Здесь через $_*(k)$ обозначена k-кратная свертка,

$$F^{*(0)}(t)=G^{*(0)}(t)=E(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Тогда

$$H(t)=\sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathbf{P}\,\{N(t)=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}k\,[F^{*(k)}(t)_*\,G^{*(k)}(t)-$$

$$-F^{*(k+1)}(t)_*\,G^{*(k+1)}(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}F^{*(k)}(t)_*\,G^{*(k)}(t).$$

Отсюда

$$H(t)_*\,F(t)_*\,G(t)=\sum_{k=2}^{\infty}F^{*(k)}(t)_*\,G^{*(k)}(t)=H(t)-F(t)_*\,G(t). \tag{4}$$

Если положить $\xi'_1\equiv 0$, $\eta'_1=\zeta_T$, $\xi'_i=\xi_{N(T)+i}$ $(i\geqslant 2)$ и $\eta'_j=\eta_{N(T)+j}$ $(j\geqslant 2)$, то новый процесс $N'(t)$ совпадает с процессом $\{N(T+t)-N(T),\ t\in[0,\ \infty)\}$. Из (4) и только что сделанного замечания следует, что

$$[H(T+t)-H(T)]_*\,F(t)_*\,G(t)=H(T+t)-H(T)-F'_T(t).$$

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем для простоты изложения будем рассматривать случай, когда наши случайные величины не являются решетчатыми, т. е. процесс восстановления непрерывный. Пусть $f(t)$, $g(t)$ и $f'_1(t)$ – характеристические функции, соответствующие функциям распределения $F(x)$, $G(x)$ и $F_1'(x)$, где $F_1'(x)=\lim\limits_{T\to\infty} F_T'(x)$, а $\tilde f(z)$, $\tilde g(z)$ и $\tilde f_1'(z)$ – преобразования Лапласа-Стильтьеса, т. е.

$$\tilde f(z)=\int_0^\infty e^{-zx}\,dF(x),\quad \tilde g(z)=\int_0^\infty e^{-zx}\,dG(x),\quad \tilde f_1'(z)=\int_0^\infty e^{-zx}\,dF_1'(x).$$

Тогда верна

Лемма 2. *Характеристические функции $f(t)$, $g(t)$ и $f_1'(t)$ связаны соотношением*

$$f_1'(t)=\frac{1}{(\alpha_1+\beta_1)\,it}\,[f(t)g(t)-1], \tag{5}$$

где

$$\beta_1=\int_0^\infty \Big(1-G(x)\Big)\,dx.$$

Доказательство. По теореме Блекуэлла в случае непрерывного процесса восстановления (см. [3]) и из доказанной леммы 1, переходя к пределу при $T\to\infty$, получаем, что

$$F_1'(t)=\frac{t}{\alpha_1+\beta_1}-\frac{t}{\alpha_1+\beta_1}\,{}_*F(t)\,{}_*G(t). \tag{6}$$

Из упомянутой теоремы Блекуэлла следует существование рассматриваемых нами пределов. Применяя к (6) преобразование Лапласа-Стильтьеса, имеем

$$\tilde f_1'(z)=\frac{1}{(\alpha_1+\beta_1)\,z}-\frac{1}{(\alpha_1+\beta_1)\,z}\,\tilde f\;\;\tilde{}\,(z). \tag{7}$$

Из (7) следует, что соответствующие характеристические функции удовлетворяют соотношению

$$f_1'(t)=\frac{1}{(\alpha_1+\beta_1)\,it}\,[f(t)g(t)-1].$$

Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Так как время восстановления постоянно, т. е. $\eta_j\equiv c$, то

$$F_T'(x)=F_T(x)_*\,G(x) \text{ и } f_1'(t)=f_1(t)g(t),$$

где $f_1(t)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F_1(x)$. Из леммы 2 получаем:

$$f_1(t)=\frac{f(t)}{(\alpha_1+c)\,it}-\frac{1}{(\alpha_1+c)\,itg(t)}=\frac{f(t)-1}{(\alpha_1+c)\,it}+\frac{1}{(\alpha_1+c)\,it}\left[1-\frac{1}{g(t)}\right]. \tag{8}$$

Случайная величина, характеристическая функция которой равна $\frac{f(t)-1}{\alpha_1 it}$, имеет функцию распределения $\frac{1}{\alpha_1}\int_0^x \Big(1-F(t)\Big)\,dt$. В этом можно убедиться простым вычислением. В данном случае $g(t)=e^{itc}$ и второе слагаемое в уравнении (8) равняется $\frac{1-e^{-itc}}{(\alpha_1+c)\,it}$. Выражение $\frac{1-e^{-itc}}{cit}$ является характеристической функцией случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(-c,\ 0)$. Применяя формулу обращения в уравнении (8), получаем:

$$F_1(x)=\frac{1}{\alpha_1+c}\int_0^x \Big(1-F(t)\Big)\,dt+\frac{c}{\alpha_1+c}\,G_1(x),$$

что и совпадает с утверждением нашей теоремы.

Следствие. Пусть рассматриваемый элемент восстанавливается мгновенно, т. е. $\eta_j \equiv 0$. Тогда из теоремы следует, что

$$F_1(x) = \frac{1}{\alpha_1} \int_0^x \Big(1 - F(t)\Big)\, dt.$$

Это необходимое и достаточное условие, чтобы процесс восстановления с мгновенным временем восстановления был стационарен (см. [3]), чего в данном случае и следовало ожидать.

Замечание. Можно рассматривать систему, состоящую из n таких элементов, длительности исправной работы которых не влияют друг на друга. Аналогичная вероятность для всей системы равняется, очевидно, произведению вероятностей для отдельных элементов.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Б. Григелионису за постоянное внимание и помощь при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
17.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев, Математические методы в теории надежности, «Наука», 1965.
2. Б. И. Григелионис, Предельные теоремы для сумм процессов восстановления, Сб. «Кибернетику-на службу коммунизму», т. 2, «Энергия», 246—266 (1964).
3. В. Л. Смит, Теория восстановления и смежные с ней вопросы, сб. переводов «Математика», ИЛ, 5:3, 95—150 (1961).

APIE SISTEMOS PATIKIMUMĄ, ESANT NENULINIAM ATSTATYMO LAIKUI

J. SAPAGOVAS

(Reziumė)

Darbe gautas sistemos veikimo laiko pasiskirstymas stacionariame režime, esant nenuliniam atstatymo laikui.

ON THE RELIABILITY OF SYSTEM UNDER NON-INSTANTENEOUS TIME OF RENEWAL

J. SAPAGOVAS

(Summary)

In the paper the distribution of time of working in steady-state conditions of system under non-instanteneous time of renewal is obtained.