LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ БИЛИНЕЙНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. СТИКЛАКИТЕ

В настоящей статье рассматривается нормализация гиперповерхности билинейно-метрического проективного пространства. Раньше нормализацию гиперповерхности проективного пространства тензорным методом исследовал А. П. Норден [3]. С. М. Бахрах занимался нормализацией поверхности и гиперповерхности обобщенного евклидового пространства [2], а М. А. Акивис исследовал нормализацию гиперповерхности конформного пространства, отнесенного к нормированному реперу [1].

§ 1. Билинейно-метрическое проективное пространство

Инфинитезимальное перемещение репера $\{A_\alpha\}$ n-мерного проективного пространства P_n имеет вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

$$I,\ J,\ K,\ \ldots=1,\ \ldots,\ n, \qquad i,\ j,\ k,\ \ldots=1,\ \ldots,\ n-1),$$

где ω_α^β пфаффовые формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства. Несимметрическое псевдоскалярное произведение в пространстве P_n можно определить при помощи тензора $H_{\alpha\beta}$ $(H_{\alpha\beta}\neq H_{\beta\alpha})$, т. е. полагая $(A_\alpha,\ A_\beta)=H_{\alpha\beta}$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$dH_{\alpha\beta}-H_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\gamma-H_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma=0. \tag{2}$$

В случае $H_{\alpha\beta}=H_{\beta\alpha}$ псевдоскалярное произведение совпадает с обычным симметрическим скалярным произведением и будем обозначать его знаком $\langle A_\alpha,\ A_\beta\rangle=G_{\alpha\beta}$.

Тензор $H_{\alpha\beta}$ определяет корреляцию пространства P_n. Проективное пространство P_n с заданной невырожденной корреляцией, определенной тензором $H_{\alpha\beta}$, называется билинейно-метрическим проективным пространством Π_n.

Гиперповерхность Π_{n-1} в пространстве Π_n определяется уравнениями:

$$\omega^I=\Lambda_i^I\,\Theta^i, \tag{3}$$

где Θ^i линейно независимые пфаффовые формы, удовлетворяющие структурным уравнениям:

$$\begin{gathered}D\Theta^i=[\Theta^j,\ \Theta_j^i],\\ D\Theta_j^i-[\Theta_j^k,\ \Theta_k^i]=[\Theta^k,\ \Theta_{jk}^i],\\ D\Theta_{jk}^i-[\Theta_{jk}^l,\ \Theta_l^i]+[\Theta_{lk}^i,\ \Theta_j^l]+[\Theta_{jl}^i,\ \Theta_k^l]=[\Theta^l,\ \Theta_{jkl}^i],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered} \tag{4}$$

причем

$$\Theta_{[jk]}^i=0,\ \ \Theta_{j\,[kl]}^i=0.$$

Продолжая систему (3), мы получим:

$$d\Lambda_i^I - \Lambda_j^I \Theta_i^j + \Lambda_i^J \omega_J^I - \Lambda_i^I \omega_0^0 = \Lambda_{ij}^I \Theta^j,$$

$$d\Lambda_{ij}^I - \Lambda_{kj}^I \Theta_i^k - \Lambda_{ik}^I \Theta_j^k + \Lambda_{ij}^J \omega_J^I - \Lambda_{ij}^I \omega_0^0 - \Lambda_k^I \Theta_{ij}^k -$$

$$- (\Lambda_i^I \Lambda_j^J + \Lambda_j^I \Lambda_i^J)\, \omega_J^0 = \Lambda_{ijk}^I \Theta^k, \tag{5}$$

. . . .

где

$$\Lambda_{[ij]}^I = 0, \quad \Lambda_{i\,[jk]}^I = 0.$$

Пространственная корреляция индуцирует корреляцию на гиперповерхности Π_{n-1}, определяющий тензор которой имеет вид:

$$\hat{H}_{ij} = \hat{H}_{IJ} \Lambda_i^I \Lambda_j^J, \tag{6}$$

где

$$\hat{H}_{IJ} = H_{IJ} - \frac{H_{I0} H_{0J}}{H_{00}}. \tag{7}$$

Компоненты этих тензоров являются решениями систем

$$d\hat{H}_{IJ} - \hat{H}_{KJ} \omega_I^K - \hat{H}_{IK} \omega_J^K = \hat{H}_{IJ,\,k} \Theta^k, \tag{8}$$

$$d\hat{H}_{ij} - \hat{H}_{kj} \Theta_i^k - \hat{H}_{ik} \Theta_j^k - 2\hat{H}_{ij} \omega_0^0 = \hat{H}_{ij,\,k} \Theta^k, \tag{9}$$

где

$$\hat{H}_{IJ,\,k} = \left[\frac{(H_{K0} + H_{0K})\, H_{I0} H_{0J}}{H_{00}^2} - \frac{H_{IK} H_{0J} + H_{JK} H_{I0}}{H_{00}} \right] \Lambda_k^K,$$

$$\hat{H}_{ij,\,k} = \hat{H}_{IJ,\,k} \Lambda_i^I \Lambda_j^J + \hat{H}_{IJ} (\Lambda_{ik}^I \Lambda_j^J + \Lambda_i^I \Lambda_{jk}^J).$$

Продолжая систему (9), мы получим:

$$d\hat{H}_{ijk} - \hat{H}_{ljk} \Theta_i^l - \hat{H}_{ilk} \Theta_j^l - \hat{H}_{ijl} \Theta_k^l - 2\hat{H}_{ijk} \omega_0^0 -$$

$$- \hat{H}_{lj} \Theta_{ik}^l - \hat{H}_{il} \Theta_{jk}^l - 2\hat{H}_{ij} \Lambda_k^I \omega_I^0 = \hat{H}_{ijkl} \Theta^l. \tag{10}$$

Если $\det \| \hat{H}_{IJ} \| \neq 0$, то величины $\hat{H}^{IJ}$ и $\hat{H}^{ij}$, определенные равенствами

$$\hat{H}_{IJ} \hat{H}^{JK} = \delta_I^K, \quad \hat{H}_{IJ} \hat{H}^{KI} = \delta_J^K, \quad \hat{H}_{ij} \hat{H}^{kj} = \delta_i^k, \quad \hat{H}_{ji} \hat{H}^{jk} = \delta_i^k, \tag{11}$$

являются решениями систем:

$$d\hat{H}^{IJ} + \hat{H}^{KJ} \omega_K^I + \hat{H}^{IK} \omega_K^J = \hat{H}_k^{IJ} \Theta^k, \tag{12}$$

$$d\hat{H}^{ij} + \hat{H}^{kj} \Theta_k^i + \hat{H}^{ik} \Theta_k^j + 2\hat{H}^{ij} \omega_0^0 = \hat{H}_k^{ij} \Theta^k, \tag{13}$$

где

$$\hat{H}_k^{IJ} = -\hat{H}^{IP} \hat{H}^{QJ} \hat{H}_{PQ,\,k},$$

$$\hat{H}_k^{ij} = -\hat{H}^{ip} \hat{H}^{qj} \hat{H}_{pq,\,k}.$$

Оказывается, что системы величин

$$\Lambda^{*i}_I = \hat{H}^{ji} H_{JI} \Lambda_j^J, \tag{14}$$

$$^*\Lambda_I^i = \hat{H}^{ij} \hat{H}_{IJ} \Lambda_j^J, \tag{15}$$

$$\Lambda_I^i = H^{(ij)} H_{(IJ)} \Lambda_j^J \tag{16}$$

являются тензорами, т. е.

$$d^*\Lambda_I^i + {}^*\Lambda_I^k \Theta_k^i - {}^*\Lambda_J^i \omega_I^J + {}^*\Lambda_I^i \omega_0^0 = {}^*\Lambda_{Ik}^i \Theta^k, \tag{17}$$

$$d\Lambda^{*i}_I + \Lambda^{*k}_I \Theta_k^i - \Lambda^{*i}_J \omega_I^J + \Lambda^{*i}_I \omega_0^0 = \Lambda^{*i}_{Ik} \Theta^k, \tag{18}$$

$$d\Lambda_I^i + \Lambda_I^k \Theta_k^i - \Lambda_J^i \omega_I^J + \Lambda_I^i \omega_0^0 = \Lambda_{Ik}^i \Theta^k, \tag{19}$$

где

$$*\Lambda^i_{Ik} = \hat{H}^{ij}_k \hat{H}_{IJ} \Lambda^J_j + \hat{H}^{ij} \hat{H}_{IJ,\,k} \Lambda^J_j + \hat{H}^{ij} \hat{H}_{IJ} \Lambda^J_{jk},$$

$$\Lambda^{*i}_{Ik} = \hat{H}^{ji}_k \hat{H}_{JI} \Lambda^J_j + \hat{H}^{ji} \hat{H}_{JI,\,k} \Lambda^J_j + \hat{H}^{ji} \hat{H}_{JI} \Lambda^J_{jk},$$

$$\Lambda^i_{Ik} = \hat{H}^{(ij)}_k \hat{H}_{(IJ)} \Lambda^J_j + \hat{H}^{(ij)} \hat{H}_{(IJ),\,k} \Lambda^J_j + \hat{H}^{(ij)} \hat{H}_{(IJ)} \Lambda^J_{jk}.$$

Если $H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha}$, то тензоры $*\Lambda^i_I$, Λ^{*i}_I и Λ^i_I совпадают. В общем случае эти тензоры различны.

Точки A_0, $B_k = \Lambda^I_k A_I$ определяют касательную гиперплоскость гиперповерхности Π_{n-1}, проходящую через A_0.

Гиперповерхность называется нормализованной в смысле А. П. Нордена [3], если каждой точке A_0 гиперповерхности отнесены:

1) прямая, проходящая через A_0, но не имеющая с касательной гиперплоскостью других общих точек (нормаль первого рода);

2) $(n-2)$ – мерное линейное многообразие, расположенное в касательной гиперплоскости, но не проходящее через точку A_0 (нормаль второго рода).

Мы рассмотрим те нормализации, которые определяются фундаментальной корреляцией пространства Π_n, т. е. тензором $H_{\alpha\beta}$. В общем случае существуют три различные нормализации.

§ 2. Правосопряженная нормализация гиперповерхности

Нормаль первого рода Π_1^* вполне определяется точками A_0 и $N\,(N \neq A_0)$:

$$N = \lambda A_0 + N^I A_I, \tag{20}$$

где λ и N^I – неизвестные функции от компонент фундаментальных объектов гиперповерхности. Для определения этих функций мы воспользуемся условиями сопряженности, т. е. нормаль Π_1^* будем называть правой нормалью первого рода гиперповерхности, если

$$\begin{gathered}(A_0,\ N) = 0,\\ (B_i,\ N) = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Будем считать, что нормировка точки N выбрана следующим образом:

$$(N,\ N) = 1. \tag{22}$$

Соотношения (21) и (22) эквивалентны следующей системе:

$$\begin{gathered}\lambda H_{00} + N^I H_{0I} = 0,\\ \hat{H}_{IJ} \Lambda^I_i N^J = 0,\\ \hat{H}_{(IJ)} N^I N^J = 1.\end{gathered} \tag{23}$$

Если введем обозначение

$$\begin{gathered}N_\alpha = H_{\alpha\beta} N^\beta,\\ (N_0 = 0,\ N_I = \hat{H}_{IJ} N^J),\end{gathered} \tag{24}$$

то уравнения (23) примут вид:

$$\begin{gathered}\lambda H_{00} + N^I H_{0I} = 0,\\ \Lambda^I_i N_I = 0,\\ N^I N_I = 1.\end{gathered} \tag{25}$$

Система (25) имеет единственное решение

$$N^I=\frac{\hat{H}^{IJ}\xi_J}{\sqrt{\hat{H}^{(PK)}\xi_P\xi_K}},\tag{26}$$

$$\lambda=-\frac{H_{0I}\hat{H}^{IJ}\xi_J}{H_{00}\sqrt{\hat{H}^{(PK)}\xi_P\xi_K}},\tag{27}$$

где

$$\xi_I=\sigma_{II_1\ldots I_{n-1}}\Lambda^{I_1}_{[1}\ldots\Lambda^{I_{n-1}}_{n-1]},\tag{28}$$

а

$$\sigma_{II_1\ldots I_{n-1}}=\delta^{1\ldots n-1}_{I_1\ldots I_{n-1}}$$

обобщенные символы Кронекера-Крамлета. Таким образом, правая нормаль первого рода гиперповерхности выбрана единственным образом.

Величины N^I, N_i, λ являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{gathered}dN^I+N^J\omega^I_J=N^I_k\Theta^k,\\ dN_I-N_J\omega^J_I=N_{Ik}\Theta^k,\\ d\lambda+\lambda\omega^0_0+N^I\omega^0_I=\lambda_k\Theta^k,\end{gathered}\tag{29}$$

где N^I_k, N_{Ik}, λ_k — вполне определенные функции от Λ^I_i, H_{IJ} и их пфаффовых производных.

Нормаль второго рода лежит в касательной плоскости гиперповерхности и является гиперплоскостью этого $(n-1)$-мерного проективного пространства (точка A_0 не принадлежит нормали второго рода). Каждая прямая, лежащая в [касательной плоскости гиперповерхности и проходящая через точку A_0 пересекает нормаль второго рода Π^*_{n-2} в некоторой точке. Пусть прямые (A_0, B_k) пересекают Π^*_{n-2} в точках

$$C_k=B_k-n_kA_0.\tag{30}$$

Точки C_k линейно независимы между собой и их задание вполне определяет положение плоскости Π^*_{n-2}. Эти точки, которые называются опорными точками нормали второго рода, вполне определяются величинами n_k, которые вместе с величинами Λ^I_k образуют геометрический объект (нормализатор) следующей структуры:

$$dn_k-n_p\Theta^p_k-\Lambda^I_k\omega^0_I=n_{kp}\Theta^p.\tag{31}$$

Конечные законы преобразования компонент этого объекта приведены в работе А. П. Нордена [3] (стр. 200).

Оказывается, что величины n_k можно образовать из компонент фундаментальных объектов второго порядка рассматриваемой гиперповерхности следующим образом:

$$n_k=\Lambda^I_{kj}\Lambda^{*j}_I-\frac{1}{2}\hat{H}^{ij}\hat{H}_{ijk}.\tag{32}$$

Эти величины, в силу (5), (18), (10), (13), являются решением системы (31), т. е. образуют нормализатор.

§ 3. Правосопряженный сопровождающий репер гиперповерхности

Точки A_0, C_k, N линейно независимы и их можно принять за вершины нового репера. Систему точек $\{A_0, C_k, N\}$ назовем правосопряженным сопровождающим репером рассматриваемой гиперповерхности. Пфаффовые производные от вершин, имеющие вид:

$$B_k = \Lambda^I_k A_I, \tag{33}$$

$$C_{kp} = (\Lambda^I_{kp} - n_k \Lambda^I_p) A_I - n_{kp} A_0, \tag{34}$$

$$N_k = \lambda_k A_0 + (\lambda \Lambda^I_k + N^I_k) A_I, \tag{35}$$

рассkладывая по вершинам репера $\{A_0, C_k, N\}$, получим правые деривационные уравнения:

$$\begin{aligned} B_k &= C_k + n_k A_0, \\ C_{kp} &= L^i_{kp} C_i + l_{kp} A_0 + a_{kp} N, \\ N_k &= l^i_k C_i + l_k A_0 + s_k N. \end{aligned} \tag{36}$$

Умножая систему (36) справа на N, слева на A_0 и C_j, в силу (6), (7), (11), (14), (21), (22), (24), (33), (34), (35) и соотношений

$$\Lambda^{*i}_I \Lambda^I_j = \delta^i_j, \tag{37}$$

получим

$$\begin{aligned} L^i_{kp} &= \Lambda^{*i}_I (\Lambda^I_{kp} - n_k \Lambda^I_p), \\ l_{kp} &= (\Lambda^I_{kp} - n_k \Lambda^I_p) \left(\Lambda^{*i}_I n_i + \frac{H_{0I} - \Lambda^{*i}_I \Lambda^K_i H_{0K}}{H_{00}}\right) - n_{kp}, \\ a_{kp} &= \Lambda^I_{kp} N_I, \\ l^i_k &= \Lambda^{*i}_J (\lambda \Lambda^J_k + N^J_k), \\ l_k &= \lambda_k + (\lambda \Lambda^J_k + N^J_k) \frac{H_{0J} - \Lambda^{*i}_J (\Lambda^K_i H_{0K} - n_i H_{00})}{H_{00}}, \\ s_k &= N^I_k N_I. \end{aligned} \tag{38}$$

Величины l_{kp}, a_{kp}, l^i_k, l_k, s_k образуют тензоры, а $\bar{L}^i_{kp}$, имеющий вид

$$\bar{L}^i_{kp} = L^i_{kp} - \delta^i_k n_p, \tag{39}$$

– объект аффинной связности, ибо

$$\begin{aligned} dl_{kp} - l_{qp} \Theta^q_k - l_{kq} \Theta^q_p &= l_{kpq} \Theta^q, \\ da_{kp} - a_{qp} \Theta^q_k - a_{kq} \Theta^q_p - a_{kp} \omega^0_0 &= a_{kpq} \Theta^q, \\ dl^i_k - l^i_q \Theta^q_k + l^q_k \Theta^i_q - l^i_k \omega^0_0 &= l^i_{kq} \Theta^q, \\ dl_k - l_q \Theta^q_k - l_k \omega^0_0 &= \bar{l}_{kq} \Theta^q, \\ ds_k - s_p \Theta^p_k &= s_{kp} \Theta^p, \\ d\bar{L}^i_{kp} - \bar{L}^i_{qp} \Theta^q_k - \bar{L}^i_{kq} \Theta^q_p + \bar{L}^q_{kp} \Theta^i_q + \Theta^i_{kp} &= \bar{L}^i_{kpq} \Theta^q, \end{aligned} \tag{40}$$

где l_{kpq}, a_{kpq}, l^i_{kq}, $\bar{l}_{kq}$, s_{kp}, $\bar{L}^i_{kpq}$ вполне определенные функции от Λ^I_i, n_i, N_I, N^I и их пфаффовых производных. Объект $\bar{L}^i_{kp}$ будем называть объектом внешней правой аффинной связности, а тензор a_{kp} правым асимптотическим тензором. Обратный тензор a^{kp} определяется соотношением ($\det \| a_{kp} \| \neq 0$)

$$a_{kp} a^{pq} = \delta^q_k$$

и удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$da^{kp} + a^{qp} \Theta^k_q + a^{kq} \Theta^p_q + a^{kp} \omega^0_0 = a^{kp}_q \Theta^q, \tag{41}$$

где

$$a_q^{kp} = -a^{ks}\, a^{tp}\, a_{stq}.$$

Пфаффовые формы правой внешней аффинной связности имеют вид:

$$\bar{\Theta}^i = \Theta^i,$$

$$\bar{\Theta}^i_j = \Theta^i_j + \bar{L}^i_{kp}\, \Theta^p \tag{42}$$

и связаны структурными уравнениями

$$D\bar{\Theta}^i = [\bar{\Theta}^j,\ \bar{\Theta}^i_j],$$

$$D\bar{\Theta}^i_j - [\bar{\Theta}^k_j,\ \bar{\Theta}^i_k] = R^i_{jpq}[\bar{\Theta}^p,\ \bar{\Theta}^q], \tag{43}$$

где

$$R^i_{jpq} = \bar{L}^i_{j\,[pq]} + \bar{L}^i_{k\,[p}\bar{L}^k_{|j|\,q]} \tag{44}$$

тензор кривизны.

Так как ковариантные производные $\overset{\bar{L}}{\nabla}_p C_k$, $\overset{\bar{L}}{\nabla}_k N$, $\overset{\bar{L}}{\nabla}_k A_0$ относительно объекта связности $\bar{L}^i_{kp}$ имеют вид:

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_k A_0 = B_k,$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_k C_k = C_{kp} - \bar{L}^i_{kp}\, C_i, \tag{45}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_k N = N_k,$$

то правые деривационные уравнения (36) можно представить так:

$$B_k = C_k + n_k A_0,$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_p C_k = n_p C_k + l_{kp} A_0 + a_{kp} N, \tag{46}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_k N = l^i_k C_i + l_k A_0 + s_k N.$$

При помощи повторного ковариантного дифференцирования и алтернации по индексам дифференцирования, и имея в виду, что (аналогично как в [3 стр. 128)

$$\nabla_{[j} V_{i]} = R^k_{ij} V_k, \tag{47}$$

$$\nabla_{[k} \nabla_{j]} V_i = -\frac{1}{2} R^m_{kji} V_m - R^m_{kj} \nabla_m V_i, \tag{48}$$

где R^k_{ij} тензор кручения (в нашем случае равен нулю), получаем условия совместности правых деривационных уравнений:

$$a_{[ij]} = 0, \tag{49}$$

$$l_{[ij]} + \overset{\bar{L}}{\nabla}_{[j} n_{i]} = 0, \tag{50}$$

$$R^m_{kji} = 2\, l_{[jk]}\, \delta^m_i - 2\, l_{i\,[j}\, \delta^m_{k]} - 2\, a_{i\,[j}\, l^m_{k]}, \tag{51}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_{[k} l_{|i|j]} + a_{i\,[j} l_{k]} = 0, \tag{52}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_{[k} a_{j]\,i} + a_{i\,[k} n_{j]} - a_{i\,[k} s_{j]} = 0, \tag{53}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_{[k} l^j_{i]} + l_{[i}^{j} n_{k]} + p_{[i}\, \delta^j_{k]} + s_{[i}\, l^j_{k]} = 0, \tag{54}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_{[k} l_{i]} + l_{[i}\, n_{k]} + l^j_{[i}\, l_{|j|\,k]} + s_{[i}\, l_{k]} = 0, \tag{55}$$

$$\overset{\bar{L}}{\nabla}_{[k} s_{i]} + l^j_{[i}\, a_{|j|\,k]} = 0, \tag{56}$$

которые в голономном репере совпадают с уравнениями, полученными А. П. Норденом [3]. Свертывая уравнения (51), (52), (53) с тензором a^{ij}, получим:

$$l_k^m = \frac{1}{n-2}\, a^{ij}\,(2\,l_{[jk]}\,\delta_i^m - 2\,l_{i\,[j}\,\delta_{k]}^m - R_{kji}^m), \tag{57}$$

$$l_k = -\frac{1}{n-2}\, a^{ij}\, \nabla_{[k}\, l_{|i|j]}, \tag{58}$$

$$s_j = n_j + \frac{1}{2\,(n-2)}\, a^{ik}\, \nabla_{[k}\, a_{j]\,i}. \tag{59}$$

Из уравнений (32) и (39) следует, что

$$n_k = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\,\hat{H}^{ij}\,\hat{H}_{ijk} - \bar{L}_{ki}^i\right). \tag{60}$$

Не трудно убедиться, что компоненты индуцированного метрического тензора $\hat{H}_{ij}$ на гиперповерхности образуются из величин h_{uv} $(u,\ v\ldots = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$, имеющих вид:

$$\begin{aligned} h_{00} &= H_{00}, \\ h_{0i} &= (A_0,\ C_i), \\ h_{j0} &= (C_j,\ A_0), \\ h_{ij} &= (C_i,\ C_j), \end{aligned} \tag{61}$$

таким образом

$$\hat{H}_{ij} = h_{ij} - \frac{h_{i0}\, h_{0j}}{h_{00}}. \tag{62}$$

В силу этого, в дальнейшем мы будем пользоваться псевдотензором*) h_{uv}, компоненты которого являются решением дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dh_{00} - 2\,h_{00}\,\omega_0^0 &= h_{00,\,k}\,\Theta^k, \\ dh_{0i} - h_{0k}\,\Theta_i^k - 2\,h_{0i}\,\omega_0^0 &= h_{0i,\,k}\,\Theta^k, \\ dh_{ij} - h_{kj}\,\Theta_i^k - h_{ik}\,\Theta_j^k - 2\,h_{ij}\,\omega_0^0 &= h_{ij,\,k}\,\Theta^k, \end{aligned} \tag{63}$$

где

$$h_{00,\,k} = (H_{10} + H_{01})\,\Lambda_k^I, \quad h_{0i,\,k} = B_k\,C_i + A_0\,C_{ik}, \quad h_{ij,\,k} = C_i\,C_{jk} + C_{ik}\,C_j.$$

Величины, определенные формулами

$$t_0 = (N,\ A_0), \tag{64}$$

$$t_i = (N,\ C_i), \tag{65}$$

в случае правосопряженной нормализации не равны нулю. Они являются тензорами, ибо

$$dt_0 - t_0\,\omega_0^0 = t_{0k}\,\Theta^k, \tag{66}$$

$$dt_i - t_k\,\Theta_i^k - t_i\,\omega_0^0 = t_{ik}\,\Theta^k, \tag{67}$$

где

$$t_{0k} = N_k\,A_0 + NB_k, \quad t_{ik} = N_k\,C_i + NC_{ik}.$$

Тензор t_i будем называть основным правым ковектором, а t_0 — основным правым псевдоскаляром рассматриваемой гиперповерхности.

---

*) Формы $\vartheta_j^i = \Theta_j^i/\Theta^i = 0$ — инвариантные формы группы центроаффинных преобразований, $\vartheta_0^0 = \omega_0^0$ — инвариантная форма группы переноса на прямой. Группу, составленную из прямого произведения этих групп, т. е. группу, определенную инвариантными формами ϑ_0^0, ϑ_j^i, назовем псевдогруппой. Линейный и однородный объект относительно этой группы будем называть псевдотензором.

Неголономные ковариантные производные от величин h_{uv}, t_i, t_0 имеют вид:

$$\overset{L}{\nabla}_k h_{00} = h_{k0} + h_{0k} + 2\, h_{00}\, n_k,$$

$$\overset{L}{\nabla}_k h_{0i} = h_{ki} + 2\, n_k\, h_{0i} + l_{ik} h_{00},$$

$$\overset{L}{\nabla}_k h_{ij} = 2\, h_{ij}\, n_k + l_{ik}\,(h_{0j} + h_{j0}) + a_{ik}\, t_j,$$

$$\overset{L}{\nabla}_k t_0 = h_{v0}\, l^v_k + h_{00}\, l_k + t_k + t_0\,(s_k + n_k), \tag{68}$$

$$\overset{L}{\nabla}_k t_i = h_{ji}\, l^j_k + h_{0i}\, l_k + (s_k + n_k)\, t_i + l_{ik}\, t_0 + a_{ik}.$$

Из уравнений (57), (58), (59), (60), (62), (44), (68) следует, что величины l^m_k, l_k, s_j, n_j, $\hat{H}_{ij}$ и ковариантные производные от h_{uv}, t_0, t_i выражаются через тензоры l_{ij}, a_{ij}, t_i, объект внешней правой аффинной связности, псевдотензор h_{uv} и псевдоскаляр t_0.

Отсюда следует

Теорема 1. *Пусть в некоторой области n-мерного дифференцируемого многообразия заданы несимметрический тензор l_{ij}, псевдотензор h_{uv}, симметрический тензор a_{ij}, тензор t_i, псевдоскалярная величина t_0 и объект аффинной связности $\bar{L}^i_{jk}$ без кручения, удовлетворяющие уравнениям* (50 – 56), (60), (68). *Для того, чтобы в данном билинейно-метрическом проективном пространстве существовала такая гиперповерхность, для которой при правосопряженной нормализации тензор $\hat{H}_{ij}$, имеющий вид* (62), *был метрическим, a_{ij} — правым асимптотическим тензором, t_i и t_0 правыми основными ковектором и псевдоскаляром, l_{ij} — тензором на гиперповерхности, $\bar{L}^i_{jk}$ — объектом внешней аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$\begin{Vmatrix} h_{00} & h_{01} & \ldots & h_{0\,n-1} & 0 \\ h_{10} & h_{11} & \ldots & h_{1\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n-1\,0} & h_{n-1\,1} & \ldots & h_{n-1\,n-1} & 0 \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_{n-1} & 1 \end{Vmatrix}$$

была допустимой)*.

§ 4. Сопряженная нормализация гиперповерхности

Нормаль первого рода Π_1 определяется точками A_0 и $M = \mu A_0 + M^I A_I$, где μ, M^I неизвестные функции от компонент фундаментальных объектов гиперповерхности. Теперь мы их найдем пользуясь условиями сопряженности

---

*) Матрицу

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \ldots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

назовем допустимой для пространства Π_n, если в пространстве Π_n существует такой базис $F_0, F_1, \ldots, F_n$, для которого данная матрица является матрицей Грамма.

(точки M с точками гиперповерхности Π_{n-1}), т. е. нормаль Π_1 будем называть нормалью первого рода гиперповерхности, если

$$\begin{gathered} \langle A_0, M\rangle = 0, \\ \langle B_i, M\rangle = 0, \\ \langle M, M\rangle = 1. \end{gathered} \tag{69}$$

Уравнения (69) эквивалентны системе

$$\begin{gathered} \mu G_{00} + G_{0I} M^I = 0, \\ \hat{G}_{IJ} \Lambda_i^I M^J = 0, \\ \hat{G}_{IJ} M^I M^J = 1, \end{gathered} \tag{70}$$

где

$$G_{\alpha\beta} = H_{(\alpha\beta)}, \quad \hat{G}_{IJ} = \hat{H}_{(IJ)}.$$

Уравнения (70) имеют единственное решение

$$M^I = \frac{\hat{G}^{IJ}\xi_J}{\sqrt{\hat{G}^{PK}\xi_P\xi_K}}, \tag{71}$$

$$\mu = -\frac{G_{0I}\hat{G}^{IJ}\xi_J}{G_{00}\sqrt{\hat{G}^{PK}\xi_P\xi_K}}, \tag{72}$$

где

$$\xi_I = \sigma_{II_1\ldots I_{n-1}} \Lambda_{[1}^{I_1} \Lambda_2^{I_2} \ldots \Lambda_{n-1]}^{I_{n-1}},$$

а

$$\sigma_{II_1\ldots I_{n-1}} = \delta^{I_1\ldots I_{n-1}}_{1\ldots n-1}$$

обобщенные символы Кронекера-Крамлета.

Величины M^I, μ и

$$M_I = \hat{G}_{IJ} M^J \tag{73}$$

являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} dM^I + M^J \omega_J^I = M_k^I \Theta^k, \\ d\mu + \mu\omega_0^0 + M^I \omega_I^0 = \mu_k \Theta^k, \\ dM_I - M_J \omega_I^J = M_{Ik} \Theta^k, \end{gathered} \tag{74}$$

где M_k^I, M_{Ik}, μ_k вполне определенные функции от компонент фундаментальных объектов гиперповерхности и их пфаффовых производных.

Нормаль второго рода Π_{n-2}, так же как в § 2, определяется точками

$$D_k = B_k - m_k A_0, \tag{75}$$

которые будем называть опорными точками нормали второго рода в сопряженной нормализации. Они вполне определяются системой величин

$$m_k = \Lambda_{kj}^I \Lambda_I^j - \frac{1}{2}\hat{G}^{ij}\hat{G}_{ijk}, \tag{76}$$

где $\hat{G}_{ijk}$ пфаффовая производная от $\hat{G}_{ij}$. Пользуясь уравнениями (5), (10), (13), (19), можно проверить, что m_k является решением системы (31), т. е. m_k — нормализатор.

§ 5. Сопровождающий репер гиперповерхности

В пространстве Π_n имеем $(n+1)$ линейно независимых точек A_0, D_k, M, которые будем называть вершинами сопряженного сопровождающего репера гиперповерхности. Пфаффовые производные B_k, D_{kp}, M_k от вершин нового репера можно выразить через вершины репера $\{A_0,\ D_k,\ M\}$ следующим образом:

$$B_k = D_k + m_k A_0,$$
$$D_{kp} = G^l_{kp} D_l + g_{kp} A_0 + b_{kp} M, \tag{78}$$
$$M_k = g^i_k D_i + g_k A_0 + r_k M.$$

Дифференцируя третье уравнение системы (69) получим

$$\langle M_k,\ M\rangle = 0. \tag{79}$$

Умножая уравнения системы (78) на D_j, A_0 и M, в силу уравнений (69), (73), (79), вычислим неизвестные величины в деривационных уравнениях (78):

$$G^i_{kp} = \Lambda^i_I \Lambda^I_{kp} - m_k \delta^i_p,$$
$$g_{kp} = (\Lambda^I_{kp} - m_k \Lambda^I_p)\left(\Lambda^i_I m_i + \frac{G_{0I} - \Lambda^i_I \Lambda^K_i G_{0K}}{G_{00}}\right) - m_{kp},$$
$$b_{kp} = \Lambda^I_{kp} M_I,$$
$$g^i_k = \Lambda^i_J (\mu \Lambda^J_k + M^J_k),$$
$$g_k = \mu_k + (\mu \Lambda^J_k + M^J_k)\ \frac{G_{0J} - \Lambda^i_J (\Lambda^K_i G_{0K} - m_i \cdot G_{00})}{G_{00}},$$
$$r_k = 0.$$

Оказывается, что величины

$$\bar{G}^i_{kp} = G^i_{kp} - \delta^i_k m_p \tag{81}$$

образуют объект аффинной связности, который назовем объектом внешней аффинной связности. Тензор b_{kp}, компоненты которого являются решениями дифференциальных уравнений

$$db_{kp} - b_{lp}\,\Theta^l_k - b_{kl}\,\Theta^l_p - b_{kp}\,\omega^0_0 = b_{kpl}\,\Theta^l, \tag{82}$$

где

$$b_{kpl} = \Lambda^I_{kpl} M_I + \Lambda^I_{kp} M_{Il},$$

будем называть асимптотическим тензором. Если $\det \| b_{kp} \| \neq 0$, то компоненты тензора, определенного соотношением

$$b_{kp} b^{pl} = \delta^l_k, \tag{83}$$

являются решением дифференциальных уравнений

$$db^{kp} + b^{lp}\,\Theta^k_l + b^{kl}\,\Theta^p_l + b^{kp}\,\omega^0_0 = b^{kp}_l\,\Theta^l, \tag{84}$$

где

$$b^{kp}_l = -b^{kr} b^{sp} b_{rsl}.$$

Величины g_{kp}, g^i_k, g_k (аналогично, как в § 3) образуют тензоры.

Пфаффовые формы внешней аффинной связности имеют вид:

$$\varphi^i = \Theta^i,$$
$$\varphi^i_j = \Theta^i_j + G^i_{jk}\,\Theta^k \tag{85}$$

и связаны структурными уравнениями

$$D\varphi^i = [\varphi^j,\ \varphi^i_j],$$
$$D\varphi^i_j - [\varphi^k_j,\ \varphi^i_k] = S^i_{jpq}\,[\varphi^p,\ \varphi^q], \tag{86}$$

где

$$S^i_{jpq} = \bar{G}^i_{j\,[pq]} + \bar{G}^i_{k\,[p}\,\bar{G}^k_{|j|\,q]} \tag{87}$$

— тензор кривизны.

Так как ковариантные производные $\overset{\bar{G}}{\nabla}_p D_k$, $\overset{\bar{G}}{\nabla}_p M$, $\overset{\bar{G}}{\nabla} A_0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\overset{\bar{G}}{\nabla}_p A_0 = B_p, \\ &\overset{\bar{G}}{\nabla}_p D_k = D_{kp} - \bar{G}^i_{kp} D_i, \\ &\overset{\bar{G}}{\nabla}_p M = M_p, \end{aligned} \tag{88}$$

то деривационные уравнения можно переписать так:

$$\begin{aligned} &B_k = D_k + m_k A_0, \\ &\overset{\bar{G}}{\nabla}_p D_k = m_p D_k + g_{kp} A_0 + b_{kp} M, \\ &\overset{\bar{G}}{\nabla}_k M = g^i_k D_i + g_k A_0. \end{aligned} \tag{89}$$

Аналогично, как в § 3, условия совместности деривационных уравнений выражаются следующими соотношениями:

$$b_{[ij]} = 0, \tag{90}$$

$$\nabla_{[j} m_{i]} + g_{[ij]} = 0, \tag{91}$$

$$S^m_{kji} = 2 g_{[jk]} \delta^m_i - 2 g_{i[j} \delta^m_{k]} - 2 b_{i[j} g^m_{k]}, \tag{92}$$

$$\Delta_{[k} g_{|i|j]} + b_{i[j} g_{k]} = 0, \tag{93}$$

$$\nabla_{[k} b_{|i|j]} + m_{[j} b_{|i|k]} = 0, \tag{94}$$

$$\nabla_{[k} g^j_{i]} + g^j_{[i} m_{k]} + g_{[i} \delta^j_{k]} = 0; \tag{95}$$

$$\nabla_{[k} g_{i]} + g_{[i} m_{k]} + g^j_{[i} g_{|j|k]} = 0, \tag{96}$$

$$g^j_{[i} b_{|j|k]} = 0. \tag{97}$$

Свертывая уравнения (92), (93), (94) с тензором b^{ij} получим

$$\begin{aligned} &g^m_k = \frac{1}{n-2} b^{ij} (2 g_{[jk]} \delta^m_i - 2 g_{i[j} \delta^m_{k]} - \delta^m_{kji}), \\ &g_k = -\frac{1}{2(n-2)} b^{ij} \nabla_{[k} g_{|i|j]}, \\ &m_k = \frac{1}{n-2} b^{ij} \nabla_{[k} b_{|i|j]}. \end{aligned} \tag{98}$$

Из уравнений (76), (81) следует, что

$$m_k = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{2} \hat{G}^{ij} \hat{G}_{ijk} - \bar{G}^i_{ki} \right). \tag{99}$$

Так как

$$H_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + H_{[\alpha\beta]},$$

то величины, определенные соотношениями

$$\begin{aligned} &k_0 = (A_0,\ M), \\ &k_i = (Di,\ M), \end{aligned} \tag{100}$$

в общем случае не равны нулю и имеют место равенства:

$$\begin{aligned} &(A_0,\ M) = -(M,\ A_0), \\ &(D_i,\ M) = -(D_i,\ M). \end{aligned} \tag{101}$$

Компоненты величин k_0, k_i являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &dk_0 - k_0 \omega^0_0 = k_{0j} \Theta^j, \\ &dk_i - k_j \Theta^j_i - k_j \omega^0_0 = k_{jp} \Theta^p, \end{aligned} \tag{102}$$

где

$$k_{0j}=(M_j,\ A_0)+(M,\ B_j),\ k_{ij}=(M_k,\ D_i)+(M,\ D_{ik}),$$

т. е. k_0, k_i образуют тензоры. Тензор k_i будем называть основным ковектором, а k_0 — основным псевдоскаляром рассматриваемой гиперповерхности.

Индуцированный метрический тензор $\hat{G}_{ij}$ на гиперповерхности можно выразить через компоненты псевдотензора z_{uv}, где

$$\begin{aligned} z_{00}&=G_{00},\\ z_{0i}&=(A_0,\ D_i),\\ z_{00}&=(D_i,\ A_0),\\ z_{ij}&=(D_i,\ D_j). \end{aligned} \tag{103}$$

Таким образом:

$$\hat{G}_{ij}=z_{ij}-\frac{z_{i0}\,z_{0j}}{z_{00}}\,. \tag{104}$$

Неголономные ковариантные производные от величин z_{uv}, k_0, k_i относительно объекта внешней аффинной связности имеют вид:

$$\begin{aligned} \overset{\bar{G}}{\nabla}_k z_{00}&=z_{k0}+z_{0k}+2\,z_{00}\,m_k,\\ \overset{\bar{G}}{\nabla}_k z_{0i}&=z_{ki}+2\,m_k\,z_{0i}+g_{ik}\,z_{00},\\ \overset{\bar{G}}{\nabla}_k z_{ij}&=2\,z_{ij}\,m_k+g_{ik}\,(z_{0j}+z_{j0})+b_{ik}\,k_j,\\ \overset{\bar{G}}{\nabla}_k k_0&=z_{i0}\,g^i_k+z_{00}\,g_k+k_k+k_0\,m_k,\\ \overset{\bar{G}}{\nabla}_k k_i&=z_{ji}\,g^j_k+z_{0i}\,g_k+m_k\,k_i+g_{ik}\,k_0+l_{ik}. \end{aligned} \tag{105}$$

Из уравнений (98), (99), (104), (105) следует, что величины g^m_k, g_k, m_k, метрический тензор $\hat{G}_{ij}$, а также ковариантные производные от величин z_{uv}, k_0, k_i выражаются через объект внешней аффинной связности, тензоры g_{ij}, b_{ij}, k_i, псевдотензор z_{uv}, псевдоскаляр k_0.

Отсюда следует

Теорема 2. *Пусть в некоторой области n-мерного дифференцируемого многообразия заданы тензоры g_{ij}, b_{ij}, псевдотензор z_{uv}, тензор k_i, псевдоскалярная величина k_0 и объект аффинной связности $\bar{G}^i_{jk}$ без кручения, удовлетворяющие условиям* (90—97), (99), (105). *Для того, чтобы в данном билинейно-метрическом пространстве существовала такая гиперповерхность, для которой при сопряженной нормализации тензор $\hat{G}_{ij}$ имеющий вид* (104), *был метрическим, b_{ij} — асимптотическим тензором, k_i, k_0 — основными ковектором и псевдоскаляром, g_{ij} — тензором на гиперповерхности, $\bar{G}^i_{jk}$ — объектом внешней аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$\begin{Vmatrix} z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0\,n-1} & k_0\\ z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1\,n-1} & k_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ z_{n-1\,0} & z_{n-1\,1} & \dots & z_{n-1\,n-1} & k_{n-1}\\ -k_0 & -k_1 & \dots & -k_{n-1} & 1 \end{Vmatrix}$$

была допустимой.

§ 6. Левосопряженная нормализация гиперповерхности

Нормаль первого рода $^*\Pi_1$, определенную точками A_0, $\mathfrak{M}=\gamma A_0+\mathfrak{M}^I A_I$, будем называть левой нормалью гиперповерхности, если

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{M},\ A_0)=0,\\
&(\mathfrak{M},\ B_i)=0.
\end{aligned}
\tag{106}
$$

Нормировка точки $\mathfrak{M}$ выбрана следующим образом:

$$(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M})=1. \tag{107}$$

Уравнения (106), (107) эквивалентны системе

$$
\begin{aligned}
&\gamma H_{00}+\mathfrak{M}^I H_{I0}=0,\\
&\hat{H}_{JI}\Lambda_i^I\mathfrak{M}^J=0,\\
&\hat{H}_{(IJ)}\mathfrak{M}^I\mathfrak{M}^J=1,
\end{aligned}
\tag{108}
$$

которая имеет единственное решение, т. е.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}^I=\frac{\hat{H}^{JI}\xi_J}{\sqrt{\hat{H}^{(LK)}\xi_L\xi_K}},\\
&\gamma=-\frac{\hat{H}_{I0}H^{JI}\xi_J}{H_{00}\sqrt{\hat{H}^{(LK)}\xi_L\xi_K}}.
\end{aligned}
$$

Компоненты величин $\mathfrak{M}^J$, γ и $\mathfrak{M}_J$, где

$$\mathfrak{M}_J=\hat{H}_{JI}\mathfrak{M}^J, \tag{109}$$

являются решениями дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&d\mathfrak{M}^I-\mathfrak{M}^J\omega_J^I=\mathfrak{M}_k^I\Theta^k,\\
&d\gamma+\gamma\omega_0^0+\mathfrak{M}^I\omega_I^0=\gamma_k\Theta^k,\\
&d\mathfrak{M}_I+\mathfrak{M}_J\omega_I^J=\mathfrak{M}_{Ik}\Theta^k.
\end{aligned}
\tag{110}
$$

Нормаль второго рода $^*\Pi_{n-2}$ определяется точками

$$E_k=B_k-\nu_k A_0, \tag{111}$$

которые будем называть опорными точками нормали второго рода в левосопряженной нормализации. Они вполне определяются системой величин:

$$\nu_k=\Lambda_{kj}^I{}^*\Lambda_I^j-\frac{1}{2}\hat{H}^{ij}\hat{H}_{ijk}, \tag{112}$$

компоненты которых в силу (5), (10), (13), (19), являются решением системы (31), т. е. ν_k — нормализатор.

§ 6. Левосопряженный сопровождающий репер гиперповерхности

Репер $\{A_0,\ E_k, \mathfrak{M}\}$ будем называть левосопряженным сопровождающим репером гиперповерхности. Разложение пфаффовых производных B_k, E_{kp}, $\mathfrak{M}_k$ от вершин нового репера по вершинам репера $\{A_0,\ E_k,\ \mathfrak{M}\}$, т. е. левые деривационные уравнения гиперповерхности, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&B_k=E_k+\nu_k A_0,\\
&E_{kp}=\Pi_{kp}^i E_i+\pi_{kp}A_0+c_{kp}\mathfrak{M},\\
&\mathfrak{M}_k=\pi_k^i E_i+\pi_k A_0+q_k\mathfrak{M},
\end{aligned}
\tag{113}
$$

где

$$\Pi^i_{kp} = {}^*\Lambda^i_I \Lambda^I_{kp} - \delta^i_p \nu_k,$$

$$\pi_{kp} = (\Lambda^I_{kp} - \nu_k \Lambda^I_p)\left({}^*\Lambda^i_I \nu_i + \frac{H_{I0} - {}^*\Lambda^i_I \Lambda^K_i H_{K0}}{H_{00}}\right) - \nu_{kp},$$

$$c_{kp} = \Lambda^I_{kp} \mathfrak{M}_I, \tag{114}$$

$$\pi^i_k = {}^*\Lambda^i_J (\gamma \Lambda^J_k + \mathfrak{M}^J_k),$$

$$\pi_k = \gamma_k + (\gamma \Lambda^J_k + \mathfrak{M}^J_k) \frac{H_{J0} - {}^*\Lambda^i_J (\Lambda^K_i H_{K0} - \nu_i H_{00}}{H_{00}},$$

$$q_k = \mathfrak{M}^I_k \mathfrak{M}_I.$$

Величины

$$\overline{\Pi}^i_{kp} = \Pi^i_{kp} - \delta^i_k \nu_p \tag{115}$$

образуют объект аффинной связности и назовем его объектом внешней левой аффинной связности. Тензор c_{ij}, компоненты которого являются решениями дифференциальных уравнений

$$dc_{ij} - c_{kj}\Theta^k_i - c_{ik}\Theta^k_j - c_{ij}\omega^0_0 = c_{ijk}\Theta^k, \tag{11}$$

где

$$c_{ijk} = \Lambda^I_{ijk} \mathfrak{M}_I + \Lambda^I_{ij} \mathfrak{M}_{Ik},$$

будем называть левым асимптотическим тензором.

Пфаффовы формы левой аффинной связности имеют вид:

$$\psi^i = \Theta^i,$$

$$\psi^i_j = \Theta^i_j + \overline{\Pi}^i_{jk}\Theta^k,$$

и связаны структурными уравнениями

$$D\psi^i = [\psi^j, \psi^i_j],$$

$$D\psi^i_j = [\psi^k_j, \psi^i_k] + P^i_{jpq}[\psi^p, \psi^q],$$

где объект

$$P^i_{jpq} = \overline{\Pi}^i_{j\,[pq]} + \Pi^i_{k\,[p}\Pi^k_{|j|\,q]} \tag{117}$$

является тензором кривизны рассматриваемой связности.

Так как ковариантные производные от вершин левосопряженного сопровождающего репера имеют вид

$$\overset{\overline{\Pi}}{\nabla}_p A_0 = B_p,$$

$$\overset{\overline{\Pi}}{\nabla}_p E_k = E_{kp} - \overline{\Pi}^i_{kp} E_i, \tag{118}$$

$$\overset{\overline{\Pi}}{\nabla}_p \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p,$$

то систему (113) можно переписать следующим образом:

$$B_k = E_k + \nu_k A_0,$$

$$\overset{\overline{\Pi}}{\nabla}_p E_k = \nu_p E_k + \pi_{kp} A_0 + c_{kp}\mathfrak{M}, \tag{119}$$

$$\overset{\overline{\Pi}}{\nabla}_p \mathfrak{M} = \pi^i_k E_i + \pi_k A_0 + q_k \mathfrak{M}.$$

Условие совместности левых деривационных уравнений выражается следующими соотношениями:

$$c_{[ij]}=0, \tag{120}$$

$$\overset{\bar{\Pi}}{\nabla}_{[j}\nu_{i]}+\pi_{[ij]}=0, \tag{121}$$

$$P^{m}_{kji}=2\,\pi_{[jk]}\,\delta^{m}_{i}-2\,\pi_{i\,[j}\,\delta^{m}_{k]}+2\,c_{i\,[j}\,\pi^{m}_{k]}, \tag{122}$$

$$\overset{\bar{\Pi}}{\nabla}_{[k}\,\pi_{|\,i\,|\,j]}+c_{i\,[j}\,\pi_{k]}=0, \tag{123}$$

$$\overset{\bar{\Pi}}{\nabla}_{[k}\,c_{j]\,i}+c_{i\,[k}\,\nu_{j]}-c_{i\,[k}\,q_{j]}=0, \tag{124}$$

$$\overset{\bar{\Pi}}{\nabla}_{[k}\,\pi^{j}_{i]}+\pi^{j}_{[i}\,\nu_{k]}+\pi_{[i}\,\delta^{j}_{k]}+q_{[i}\,\pi^{j}_{k]}=0, \tag{125}$$

$$\overset{\bar{\Pi}}{\nabla}_{[k}\,\pi_{i]}+\pi_{[i}\,\nu_{k]}+\pi^{j}_{[i}\,\pi_{|\,j\,|\,k]}+q_{[i}\,\pi_{k]}=0, \tag{126}$$

$$\overset{\bar{\Pi}}{\nabla}_{[k}\,q_{i]}+\pi^{j}_{[i}\,c_{|\,j\,|\,k]}=0. \tag{127}$$

Свертывая уравнения (122), (123), (124) с тензором c^{ij} получим:

$$\begin{aligned}
\pi^{m}_{k}&=\frac{1}{n-2}\,c^{ij}\left(2\,\pi_{[jk]}\,\delta^{m}_{i}-2\,\pi_{i\,[j}\,\delta^{m}_{k]}-P^{m}_{kji}\right),\\
\pi_{k}&=-\frac{1}{2\,(n-2)}\,c^{ij}\,\nabla_{[k}\,l_{|\,i\,|\,j]},\\
q_{j}&=\nu_{j}+\frac{1}{2\,(n-2)}\,c^{ik}\,\nabla_{[k}\,c_{j]\,i}.
\end{aligned} \tag{128}$$

Из уравнений (112), (115) следует, что

$$\nu_{k}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\,\hat{H}^{ij}\,\hat{H}_{ijk}-\overline{\Pi}^{i}_{ki}\right). \tag{129}$$

Компоненты метрического тензора $\hat{H}_{ij}$ (он совпадает с метрическим тензором гиперповерхности в случае правосопряженной нормализации) образуются из величин $\bar{h}_{uv}$, имеющих вид:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{00}&=H_{00},\\
\bar{h}_{0i}&=(A_0,\ E_i),\\
\bar{h}_{j0}&=(E_j,\ A_0),\\
\bar{h}_{ij}&=(E_i,\ E_j),
\end{aligned} \tag{130}$$

таким образом

$$\hat{H}_{ij}=\bar{h}_{ij}-\frac{\bar{h}_{i0}\,\bar{h}_{0j}}{\bar{h}_{00}}. \tag{131}$$

Величины, определенные формулами

$$\begin{aligned}
p_0&=(A_0,\ \mathfrak{M}),\\
p_i&=(E_i,\ \mathfrak{M}),
\end{aligned} \tag{132}$$

не равны нулю. Не трудно убедиться, что они образуют тензоры. Тензор p_i будем называть левым основным ковектором, а p_0 — левым основным псевдоскаляром гиперповерхности.

Неголономные ковариантные производные от величин $\bar{h}_{uv}$, p_0, p_i имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\overset{\Pi}{\nabla}_k \bar{h}_{00} &= h_{k0} + \bar{h}_{0k} + 2\,\bar{h}_{00}\,\nu_k,\\
\overset{\Pi}{\nabla}_k \bar{h}_{0i} &= \bar{h}_{ki} + 2\,\nu_k\,\bar{h}_{0i} + \pi_{ik}\bar{h}_{00},\\
\overset{\Pi}{\nabla}_k \bar{h}_{ij} &= 2\,\bar{h}_{ij}\,\nu_k + \pi_{ik}\,(h_{0j} + h_{j0}) + c_{ik}\,p_j,\\
\overset{\Pi}{\nabla}_k p_0 &= \bar{h}_{i0}\,\pi^i_k + \bar{h}_{00}\,\pi_k + p_k + p_0\,(q_k + \nu_k),\\
\overset{\Pi}{\nabla}_k p_i &= \bar{h}_{ji}\,\pi^j_k + \bar{h}_{0i}\,\pi_k + (q_k + \nu_k)\,p_i + \pi_{ik}\,p_0 + c_{ik}.
\end{aligned}
\tag{133}
$$

Из уравнений (128), (129), (131), (117), (133), следует, что величины π^m_k, π_k, q_j, ν_j, $\hat{H}_{ij}$ и ковариантные производные от $\bar{h}_{uv}$, p_0, p_i выражаются через тензоры π_{ij}, c_{ij}, p_i объект внешней аффинной связности, псевдотензор $\bar{h}_{uv}$, левый основной псевдоскаляр p_0.

Отсюда следует

Теорема 3. *Пусть в некоторой области n-мерного дифференцируемого многообразия заданы несимметрический тензор π_{ij}, псевдотензор $\bar{h}_{uv}$, симметрический тензор c_{0j}, тензор p_i, псевдоскалярная величина p_0 и объект аффинной связности $\overline{\Pi}^i_{jk}$ без кручения, удовлетворяющие уравнениям* (120—127), (129), (133). *Для того, чтобы в данном билинейно-метрическом проективном пространстве существовала такая гиперповерхность, для которой при левосопряженной нормализации тензор $\hat{H}_{ij}$, имеющий вид* (131), *был метрическим, c_{ij}-левым асимптотическим тензором, p_i и p_0-левыми основными ковектором и псевдоскаляром, π_{ij} — тензором на гиперповерхности $\overline{\Pi}^i_{jk}$ объектом внешней аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$
\begin{Vmatrix}
\bar{h}_{00} & \bar{h}_{01} & \dots & \bar{h}_{0\,n-1} & p_0\\
\bar{h}_{10} & \bar{h}_{11} & \dots & \bar{h}_{1\,n-1} & p_1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\bar{h}_{n-1\,0} & \bar{h}_{n-1\,1} & \dots & \bar{h}_{n-1\,n-1} & p_{n-1}\\
0 & 0 & & 0 & 1
\end{Vmatrix}
$$

была допустимой.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю доц. В. И. Близникасу за помощь в постановке задачи и советы при написании статьи.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
12.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Акивис, Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства, Математический сборник, т. 31 (73:1), 1952.
2. С. М. Бахрах. Геометрия обобщенных евклидовых пространств, Диссертация, Москва, 1961.
3. А. П. Норден, Пространство аффинной связности, ГИТТЛ, М. Л., 1950.

APIE DVITIESIŠKAI-METRINĖS PROJEKTYVINĖS ERDVĖS HIPERPAVIRŠIUS

L. STIKLAKYTĖ

(Reziumė)

Hiperpaviršius Π_{n-1} dvitiesiškai-metrinėje projektyvinėje erdvėje Π_n su nesimetrine koreliacija, apibrėžiama tenzoriumi $H_{\alpha\beta}$, apibrėžiamas lygtimis

$$\omega^I = \Lambda^I_k \Theta^k.$$

Šiame straipsnyje yra surasti minėto hiperpaviršiaus objektai, kurių pagalba galima normalizuoti hiperpaviršių. Surastos hiperpaviršiaus derivacinės lygtys ir jų suderinamumo sąlygos.

ÜBER DIE HYPERFLÄCHE IN BILINEAR-METRISCHEM PROJEKTIVEM RAUM

L. STIKLAKYTĖ

(Zusammenfassung)

Es sei eine Hyperfläche Π_{n-1} in bilinear-metrischem projektivem Raum Π_n durch Differentialgleichungen

$$\omega^I = \Lambda^I_k \Theta^k$$

gegeben.

In diesem Artikel werden einige geometrische Objekte untersucht, die aus Komponenten fundamentaler differentialgeometrischer Objekte dritter Ordnung der Hyperfläche gebildet sind. Mit Hilfe dieser Objekte wird die Normalisierung der Hyperfläche konstruiert. Es wird gezeigt, dass im Raum Π_n drei verschiedene Ableitungsformeln existieren.