LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУММ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. С. ФАЙНЛЕЙБ

Элементарные методы изучения асимптотического поведения сумм мультипликативных функций $f(n)$ обычно состоят в использовании имеющихся сведений о суммах типа $\sum\limits_{p^r \leqslant x} f(p^r)$, где p^r пробегает степени простых чисел [1 – 4].

Для широкого класса мультипликативных функций нужная информация об $f(p^r)$ является непосредственным следствием закона распределения простых чисел в натуральном ряду или простых идеалов в алгебраических числовых полях. Это во многих случаях дает возможность находить для сумм $\sum\limits_{n \leqslant x} f(n)$ либо асимптотические разложения по степеням $\log x$, либо понижение $\exp\left(-(\log x)^\alpha\right)$ $(0<\alpha<1)$ в остаточном члене [3, 4].

В настоящей работе для получения сведений о поведении $f(n)$ на множестве степеней простых чисел вместо законов распределения простых чисел или идеалов используется имеющаяся в некотором классе случаев возможность ,,приблизить" функцию $f(n)$ в степенях простых другой мультипликативной функцией $g(n)$, асимптотическое поведение которой известно. Это позволяет доказывать асимптотические формулы для сумм $\sum\limits_{n \leqslant x} f(n)$ со степенным понижением в остаточном члене. В некоторых случаях удается находить средние значения $f(n)$ на множестве значений полинома, заданного на всем натуральном ряде или на простых числах. Получены приложения к вероятностной теории чисел и некоторым другим вопросам.

Теорема 1. *Пусть* $f(n)$ *и* $g(n)$ – *мультипликативные функции,* $0<\lambda<1$, $\tilde{g}(n)$ *определяется равенством*

$$\sum_{d|n} \tilde{g}(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad n=1, \\ 0 & \text{при} \quad n\neq 1; \end{cases}$$

пусть, далее, функция $g(n)$ *такова, что*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|\tilde{g}(p^r)|}{p^{r\lambda}}<\infty \tag{1}$$

для всех простых p, *и*

$$\sum_{n \leqslant x} g(n)=x\,Q(\log x)+O(x^\lambda), \tag{2}$$

где $Q(u)$ — полином степени k. Тогда, если

$$\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)-g(p^r)|}{p^{r\lambda}} < \infty, \tag{3}$$

то

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = xP(\log x) + O(x^{\lambda+\varepsilon}), \tag{4}$$

где $P(u)$ — полином степени $\leqslant k$, $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Степень $P(u)$ равна k тогда и только тогда, когда для всех p

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \neq -1.$$

Доказательство. Пусть

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)\tilde{g}\left(\frac{n}{d}\right), \tag{5}$$

т. е.

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\,h\left(\frac{n}{d}\right). \tag{6}$$

Тогда

$$h(p^r) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m-1} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=r \\ k_i>0}} \left(f(p^{k_1})-g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2})\ldots g(p^{k_m}). \tag{7}$$

Действительно,

$$g(p^r) + \sum_{l=0}^{r-1} g(p^l) \sum_{m=1}^{r-l} (-1)^{m-1} \sum_{k_1+\ldots+k_m=r-l} \left(f(p^{k_1})-g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2})\ldots g(p^{k_m}) =$$

$$= g(p^r) + \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m-1} \sum_{k_1+\ldots+k_m=r} \left(f(p^{k_1})-g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2})\ldots g(p^{k_m}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r-1} (-1)^{m-1} \sum_{l=1}^{r-m} g(p^l) \sum_{k_1+\ldots+k_m=r-l} \left(f(p^{k_1})-g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2})\ldots g(p^{k_m}) =$$

$$= g(p^r) + \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m-1} \sum_{k_1+\ldots+k_m=r} \left(f(p^{k_1})-g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2})\ldots g(p^{k_m}) +$$

$$+ \sum_{m=2}^{r} (-1)^{m} \sum_{k_1+\ldots+k_m=r} \left(f(p^{k_1})-g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2})\ldots g(p^{k_m}) =$$

$$= g(p^r) + f(p^r) - g(p^r) = f(p^r).$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^{\lambda+\varepsilon}} < \infty. \tag{8}$$

Из (2) вытекает, что $g(n) = O(n^{\lambda})$, откуда следует:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|g(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} = O(p^{-\varepsilon}),$$

так что при $p > p_0 = p_0(\varepsilon)$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|g(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} < \frac{1}{2},$$

и для всех p

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} < \infty.$$

Поэтому при $p > p_0$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} \sum_{m=1}^{r} \sum_{k_1+\ldots+k_m=r} \left| \left(f(p^{k_1}) - g(p^{k_1})\right) g(p^{k_2}) \ldots g(p^{k_m}) \right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(p^k) - g(p^k)|}{p^{k(\lambda+\varepsilon)}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|g(p^l)|}{p^{l(\lambda+\varepsilon)}} \right)^{m-1} < 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r) - g(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}}.$$

Отсюда и из (3) получаем:

$$\sum_{p > p_0} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} < \infty.$$

Так как для всех p

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} \leqslant \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}}\right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|\tilde{g}(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}}\right) < \infty,$$

то

$$\sum_{p \leqslant p_0} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}} < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^{\lambda+\varepsilon}} = \prod_{p} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\lambda+\varepsilon)}}\right) < \infty.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n \leqslant x} |h(n)| \leqslant x^{\lambda+\varepsilon} \sum_{n \leqslant x} \frac{|h(n)|}{n^{\lambda+\varepsilon}} = O(x^{\lambda+\varepsilon}), \tag{9}$$

и для любого целого $s \geqslant 0$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{h(n)}{n} \log^s n = C_s + O(x^{\lambda-1+\varepsilon}). \tag{10}$$

Используя (2), (6), (9) и (10), находим:

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d \mid n} h(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \leqslant x} h(d) \sum_{n \leqslant \frac{x}{d}} g(n) =$$

$$= x \sum_{d \leqslant x} \frac{h(d)}{d} Q\left(\log \frac{x}{d}\right) + O\left(x^{\lambda+\varepsilon} \sum_{d \leqslant x} \frac{|h(d)|}{d^{\lambda+\varepsilon}}\right) = xP(\log x) + O(x^{\lambda+\varepsilon}),$$

где $P(u)$ — полином степени $\leqslant k$, с коэффициентом при u^k, равным

$$a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n} = a_0 \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h(p^r)}{p^r}\right) =$$

$$= a_0 \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{g(p^r)}{p^r}\right)^{-1},$$

где a_0 — старший коэффициент $Q(u)$.

В случае, когда $g(n)$ тождественно равна единице, аналогичный прием позволяет находить средние значения $f(n)$ на множестве значений целочисленного полинома и на множестве значений такого полинома в простых числах. Кроме того, получается несколько более точная оценка остаточного члена, чем та, которая вытекает из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $K(u)$ — *целочисленный полином степени* k, $\omega(d)$ — *число решений сравнения*

$$K(u) \equiv 0 \pmod d, \tag{11}$$

$\omega_1(d)$ — *число решений этого сравнения, взаимно простых с* d. *Пусть, далее,* $f(n)$ — *мультипликативная функция,* $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{k}$, $\beta \geqslant 0$, *и*

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r) - f(p^{r-1})|}{p^{r\alpha}}\, \omega(p^r)\right) = O\left((\log x)^{\beta}\right). \tag{12}$$

Тогда, если $K(n) > 0$ *при* $x_0 < n \leqslant x$, *то*

$$\sum_{x_0 < n \leqslant x} f\left(K(n)\right) = C_1 x + O\left(x^{\alpha k} (\log x)^{\beta}\right), \tag{13}$$

и

$$\sum_{x_0 < p \leqslant x} f\left(K(p)\right) = C_2 \operatorname{li}(x) + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right), \tag{14}$$

где

$$C_1 = \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^r}\, \omega(p^r)\right), \tag{15}$$

$$C_2 = \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^{r-1}(p-1)}\, \omega_1(p^r)\right), \tag{16}$$

A — сколь угодно большая константа.

Доказательство. Положим

$$h(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

Тогда

$$\sum_{x_0 < n \leqslant x} f\left(K(n)\right) = \sum_{x_0 < n \leqslant x} \sum_{d|K(n)} h(d) = \sum_{d \leqslant K_1(x)} h(d) \sum_{\substack{x_0 < n \leqslant x \\ K(n) \equiv 0\, (d)}} 1,$$

где

$$K_1(x) = \max_{x_0 < n \leqslant x} K(n).$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\omega(d)}$ — представители различных классов вычетов по модулю d, удовлетворяющих сравнению (11). Тогда

$$\sum_{\substack{x_0<n\leqslant x\\ K(n)\equiv 0\,(d)}} 1=\sum_{\nu=1}^{\omega(d)}\sum_{\substack{x_0<n\leqslant x\\ n\equiv a_\nu(d)}} 1=\sum_{\nu=1}^{\omega(d)}\left(\frac{x}{d}+O(1)\right)=x\frac{\omega(d)}{d}+O\left(\omega(d)\right),$$

откуда

$$\sum_{x_0<n\leqslant x} f\left(K(n)\right)=x\sum_{d\leqslant K_1(x)}\frac{h(d)\,\omega(d)}{d}+O\left(\sum_{d\leqslant K_1(x)}|h(d)|\,\omega(d)\right). \tag{17}$$

Так как

$$h(p^r)=f(p^r)-f(p^{r-1}),$$

то

$$\sum_{d\leqslant y}\frac{|h(d)|\,\omega(d)}{d^\alpha}\leqslant\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|h(p^r)|\,\omega(p^r)}{p^{r\alpha}}\right)=$$

$$=\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)-f(p^{r-1})|}{p^{r\alpha}}\,\omega(p^r)\right)=O\left((\log y)^\beta\right);$$

$$\sum_{d\leqslant y}|h(d)|\,\omega(d)=O\left(y^\alpha(\log y)^\beta\right); \tag{18}$$

$$\sum_{d\leqslant y}\frac{h(d)\,\omega(d)}{d}=\frac{1}{y}\sum_{d\leqslant y}h(d)\,\omega(d)+\int_1^y\sum_{d\leqslant u}h(d)\,\omega(d)\,\frac{du}{u^2}=$$

$$=C_1+O\left(y^{\alpha-1}(\log y)^\beta\right); \tag{19}$$

где

$$C_1=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(d)\,\omega(d)}{d}=\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r}\,\omega(p^r)\right).$$

Абсолютная сходимость произведения следует из (12). Подставляя оценки (18) и (19) в (17) и учитывая, что $K_1(x)=O(x^k)$, получаем (13). Далее,

$$\sum_{x_0<p\leqslant x} f\left(K(p)\right)=\sum_{x_0<p\leqslant x}\sum_{d/K(p)}h(d)=\sum_{d\leqslant K_1(x)}h(d)\sum_{\substack{x_0<p\leqslant x\\ K(p)\equiv 0\,(d)}}1=$$

$$=\sum_{d\leqslant K_1(x)}h(d)\sum_{\nu=1}^{\omega(d)}\sum_{\substack{x_0<p\leqslant x\\ p\equiv a_\nu(d)}}1=\sum_{d\leqslant K_1(x)}h(d)\sum_{\substack{\nu=1\\ (a_\nu,\,d)=1}}^{\omega(d)}\sum_{\substack{x_0<p\leqslant x\\ p\equiv a_\nu(d)}}1+$$

$$+\sum_{d\leqslant K_1(x)}h(d)\sum_{\substack{\nu=1\\ (a_\nu,\,d)>1}}^{\omega(d)}\sum_{\substack{x_0<p\leqslant x\\ p\equiv a_\nu(d)}}1. \tag{20}$$

Так как

$$\sum_{\substack{x_0<p\leqslant x\\ p\equiv a_\nu(d)}}1=\begin{cases} O(1), & \text{если}\quad (a_\nu,\,d)>1,\\ \dfrac{1}{\varphi(d)}\,\mathrm{li}(x)+O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right), & \text{если}\quad (a_\nu,\,d)=1,\quad d\leqslant\log^B x,\\ O\left(\max\left(\dfrac{x}{d},\ 1\right)\right), & \text{если}\quad (a_\nu,\,d)=1,\quad \log^B x<d\leqslant K_1(x),\end{cases}$$

(см., например, [5]), то из (20)

$$\sum_{x_0<p\leqslant x} f\left(K(p)\right)=\mathrm{li}\,(x)\sum_{d\leqslant\log^B x}\frac{h(d)\,\omega_1(d)}{\varphi(d)}+$$

$$+O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\sum_{d\leqslant\log^B x}|h(d)|\,\omega(d)\right)+O\left(x\sum_{\log^B x<d\leqslant K_1(x)}\frac{|h(d)|\,\omega(d)}{\varphi(d)}\right)+$$

$$+O\left(\sum_{\log^B x<d\leqslant K_1(x)}|h(d)|\,\omega(d)\right)=C_2\,\mathrm{li}\,(x)+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right),$$

если $\alpha<\frac{1}{k}$, так как из (18)

$$\sum_{d\leqslant\log^B x}|h(d)|\,\omega(d)=O(\log^B x),$$

$$\sum_{d\leqslant K_1(x)}|h(d)|\,\omega(d)=O\left(x^{\alpha k}(\log x)^{\beta}\right),$$

$$\sum_{d>\log^B x}\frac{|h(d)|\,\omega_1(d)}{\varphi(d)}<\sum_{d>\log^B x}\frac{|h(d)|\,\omega(d)}{d^{1-\varepsilon}}=O\left((\log x)^{B(\alpha-1+\varepsilon)}\right).$$

Рассмотрим некоторые применения теорем 1 и 2.

1. Пусть $\psi(n)$ – целозначная аддитивная функция, равная нулю в простых числах. И. П. Кубилюс [6] доказал, что для любого целого k

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1\\ \psi(n)=k}}^{N}1=\lambda_k+R_k(N), \tag{21}$$

где λ_k определены рядом Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k e^{itk}=\prod_p\left(1+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}-e^{it\psi(p^{r-1})}}{p^r}\right),$$

$R_k(N)\to 0$, обобщив тем самым результат А. Реньи [7], представляющий частный случай (21), когда $\psi(n)=\sum\limits_{p^r\|n}(r-1)$. Оценка $R_k(N)$ впоследствии уточнялась И. П. Кубилюсом [6], Б. В. Левиным и автором [4]. Недавно И. П. Кубилюс показал, что

$$R_k(N)=O\left(N^{-\frac{2}{5}}\right). \tag{22}$$

Для случая $\psi(n)=\sum\limits_{p^r\|n}(r-1)$ Г. Деланж [8] получил оценку

$$R_k(N)=O\left(N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^k\right). \tag{23}$$

Применение теоремы 2 позволяет уточнить оценку (22) в общем случае Правда, для $\psi(n)=\sum\limits_{p^r\|n}(r-1)$ получающийся результат при $k<\frac{2\log\log N}{\log\log\log N}$ хуже оценки Г. Деланжа (23).

Теорема 3. *Равномерно по* k

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1\\ \psi(n)=k}}^{N}1=\lambda_k+O\left(\frac{\log^2 N}{\sqrt{N}}\right). \tag{24}$$

Доказательство. Положим в формулировке теоремы 2 $K(u)=u$, $f(n)=e^{it\psi(n)}$, $|t|\leqslant\pi$. Тогда $\omega(d)=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$, так как $f(p)=1$, $|f(p^r)-f(p^{r-1})|\leqslant 2$. По теореме 2,

$$\sum_{n=1}^{N} e^{it\psi(n)}=N\cdot\prod_{p}\left(1+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}-e^{it\psi(p^{r-1})}}{p^r}\right)+O(\sqrt{N}\log^2 N),$$

откуда

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1\\ \psi(n)=k}}^{N} 1=\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\sum_{n=1}^{N} e^{it\psi(n)}\,dt=\lambda_k+O\left(\frac{\log^2 N}{\sqrt{N}}\right).$$

Если для простых p

$$\psi(p)=\psi(p^2)=\cdots=\psi(p^{s-1})=0,$$

то оценка (24) совершенно аналогичным образом улучшается:

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1\\ \psi(n)=k}}^{N} 1=\lambda_k+O\left(N^{-\frac{s-1}{s}}\log^2 N\right). \tag{25}$$

Следствием теоремы 2 является локальный закон для некоторых аддитивных функций, заданных на множестве „сдвинутых" простых чисел.

Теорема 4. *Пусть $\psi(n)$ – целозначная аддитивная функция, $\psi(p)=0$ при простых p, l – целое число, отличное от нуля. Тогда*

$$\sum_{\substack{l<p\leqslant N\\ \psi(p-l)=k}} 1=\mu_k\,\mathrm{li}(N)+O\left(\frac{N}{\log^A N}\right) \tag{26}$$

со сколь угодно большим A, где μ_k определены рядом Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_k e^{itk}=\prod_{p\times|l|}\left(1+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}-e^{it\psi(p^{r-1})}}{p^{r-1}(p-1)}\right).$$

Доказательство. Применим формулу (14) с $K(u)=u-l$, $f(n)=e^{it\psi(n)}$, $|t|\leqslant\pi$. Так как $\omega(d)=1$,

$$\omega_1(d)=\begin{cases}1, & \text{если } (d,\,|l|)=1,\\ 0, & \text{если } (d,\,|l|)>1,\end{cases}$$

то в (12) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$, откуда

$$\sum_{l<p\leqslant N} e^{it\psi(p-l)}=\mathrm{li}(N)\cdot\prod_{p\times|l|}\left(1+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}-e^{it\psi(p^{r-1})}}{p^{r-1}(p-1)}\right)+O\left(\frac{N}{\log^A N}\right).$$

Умножая на e^{-itk} и интегрируя по t в интервале $(-\pi,\pi)$, получаем (26).

Аналогичным образом доказывается

Теорема 5. *Пусть $\psi(n)$ – целозначная аддитивная функция, равная нулю в простых числах, $T_k(N)$ – число представлений натурального числа N в виде*

$$N=p+m_k,$$

где p — простое, $\psi(m_k)=k$. Тогда при $N\to\infty$

$$T_k(N)=\eta_k(N)\operatorname{li}(N)+O\left(\frac{N}{\log^A N}\right),$$

где $\eta_k(N)$ определены рядом Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k(N)e^{itk}=\prod_{p\nmid N}\left(1+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}-e^{it\psi(p^{r-1})}}{p^{r-1}(p-1)}\right),$$

A — сколь угодно большая константа.

2. Теорему 2 можно применить к исследованию асимптотического поведения некоторых сумм, связанных с функцией Эйлера $\varphi(n)$.

Теорема 6. *Пусть $K(u)$ — целочисленный полином, в разложении которого на неприводимые целочисленные множители имеется l множителей положительной степени, $\omega(d)$ — число решений сравнения $K(u)\equiv 0 \pmod d$, $\omega_1(d)$ — число решений этого сравнения, взаимно простых с модулем. Тогда при $s\geqslant 1$*

$$\sum_{x_0<n\leqslant x}\left(\frac{\varphi(K(n))}{K(n)}\right)^s=C_1(s)\,x+O\left((\log x)^{sl}\right), \tag{27}$$

и

$$\sum_{x_0<p\leqslant x}\left(\frac{\varphi(K(p))}{K(p)}\right)^s=C_2(s)\operatorname{li}(x)+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right), \tag{28}$$

если $K(n)>0$ при $x_0<n\leqslant x$, где

$$C_1(s)=\prod_p\left(1+\frac{\omega(p)}{p}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^s-1\right)\right),$$

$$C_2(s)=\prod_p\left(1+\frac{\omega(p)}{p-1}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^s-1\right)\right),$$

A — сколь угодно большая константа.

Доказательство. Так как $\frac{\varphi(p^r)}{p^r}=\left(1-\frac{1}{p}\right)$, то в данном случае

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)-f(p^{r-1})|}{p^{r\alpha}}\,\omega(p^r)\right)=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{\omega(p)}{p^\alpha}\left(1-\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{s\omega(p)}{p^{\alpha+1}}\right)\leqslant\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{\omega(p)}{p^{\alpha+1}}\right)^s.$$

Из теорем работы [9] вытекает, что

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{\omega(p)}{p}\right)=O\left((\log x)^l\right).$$

Поэтому функция $f(n)=\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s$ при $s\geqslant 1$ удовлетворяет условиям теоремы 2 с $\alpha=0$, $\beta=l\cdot s$. Отсюда следуют оценки (27) и (28).

По теореме 6, например,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n^2+1)}{n^2+1}=x\cdot\prod_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O(\log x),$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\varphi(p^2+1)}{p^2+1}=\mathrm{li}(x)\cdot\prod_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)+O\left(\frac{x}{\log^4 x}\right).$$

Для случая, когда $K(u)=au$, $s\geqslant 1$ — целое, оценка (27) получена другим методом в работе [10].

3. В работе Б. М. Уразбаева [11] аналитическим методом доказана следующая асимптотическая формула для числа $N_l(x)$ циклических полей простой степени l, дискриминанты которых не превосходят x^{l-1}:

$$N_l(x)=\gamma\cdot x+O\left(x^{\frac{l-2}{l-1}+\varepsilon}\right), \tag{29}$$

где γ — положительная константа. Формула (29) при этом была получена как следствие асимптотической оценки суммы

$$S_l(x)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p/n\to p\equiv 1\,(l)}}\mu^2(n)\,(l-1)^{\nu(n)}, \tag{30}$$

где $\nu(n)=\sum\limits_{p/n}1$, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Применение теоремы 1 настоящей работы позволяет найти более точную оценку суммы (30), чем в [11], и тем самым уточнить остаточный член в формуле (29), при $l>3$.

Известно (см., например, [12]), что если $\zeta_{K_l}(s)$ — дзета-функция поля деления круга на l частей, где l — простое, то

$$\zeta_{K_l}(s)=\zeta(s)\cdot\prod_{\chi\neq\chi_0}L(s,\ \chi), \tag{31}$$

где χ пробегает неглавные характеры по модулю l. Пусть $g(n)$ — число идеалов поля K_l, норма которых равна n. Тогда (см. [13])

$$\sum_{n\leqslant x}g(n)=\varkappa\cdot x+O\left(x^{1-\frac{2}{l}}\right), \tag{32}$$

где $\varkappa>0$. Из (31) вытекает, что при простых p

$$g(p)=1+\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(p)=\begin{cases}1, & \text{если } p=l,\\ 0, & \text{если } p\neq l,\quad p\not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,l),\\ l-1, & \text{если } p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,l).\end{cases}$$

Отсюда и из (32) следует, что функции

$$f(n)=\begin{cases}\mu^2(n)\,(l-1)^{\nu(n)}, & \text{если } p/n\to p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,l),\\ 0 & \text{при остальных } n,\end{cases}$$

и $g(n)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 с $\lambda=\max\left(\frac{1}{2}, \frac{l-2}{l}\right)+\varepsilon$. Поэтому

$$S_l(x)=\sum_{n\leq x} f(n)=\varkappa_1\cdot\left(x+O\left(x^{\max\left(\frac{1}{2}, \frac{l-2}{l}\right)+\varepsilon}\right)\right),$$

где $\varkappa_1>0$, так как $f(n)$ неотрицательна. Отсюда следует

Теорема 7. *Число $N_l(x)$ циклических полей простой степени l с дискриминантом, не превосходящим x^{l-1} при $x\to\infty$ равно*

$$N_l(x)=\gamma\cdot x+O\left(x^{\max\left(\frac{l-2}{l}, \frac{1}{2}\right)+\varepsilon}\right).$$

4. При оценках сверху по методу решета А. Сельберга важную роль играют суммы вида

$$R(x)=\sum_{n\leq x}\frac{\mu^2(n)\,\omega(n)}{n\prod\limits_{p|n}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)}, \tag{33}$$

где $\omega(n)$ — число решений сравнения $K(u)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,n)$, $K(u)$ — примитивный целочисленный полином. В работе [4] для таких сумм была получена следующая оценка:

$$R(x)=P(\log x)+O\left(e^{-(\log x)^{\alpha}}\right),\qquad 0<\alpha<1, \tag{34}$$

где $P(u)$ — полином степени k, k — число неприводимых рациональных множителей $K(u)$. Теорема 1 дает возможность доказать для $R(x)$ асимптотическую формулу со степенным понижением в остаточном члене.

Теорема 8. *Имеет место формула*

$$R(x)=P(\log x)+O\left(x^{-\min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{d+k}\right)+\varepsilon}\right), \tag{35}$$

где d — степень полинома $K(u)$.

Доказательство. Пусть

$$K(u)=K_1(u)\cdot K_2(u)\cdot\ldots\cdot K_k(u)$$

— разложение $K(u)$ на неприводимые целочисленные множители, K_ν — алгебраическое числовое поле, порожденное полиномом $K_\nu(u)$, $\omega_\nu(p)$ — число решений сравнения $K_\nu(u)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$. Б. В. Левин [9], показал, что для всех p, за исключением конечного числа, $\omega_\nu(p)$ равно числу идеалов с нормой p в поле K_ν, и

$$\omega(p)=\sum_{\nu=1}^{k}\omega_\nu(p). \tag{36}$$

Пусть $F_\nu(n)$ — число идеалов с нормой n в поле K_ν. Тогда, как известно [13],

$$\sum_{n\leq x}F_\nu(n)=\varkappa_\nu\cdot x+O\left(x^{1-\frac{2}{k_\nu+1}}\right), \tag{37}$$

где $\varkappa_\nu>0$, k_ν — степень полинома $K_\nu(u)$. Пусть

$$g(n)=\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k=n}F_1(n_1)\ldots F_k(n_k).$$

Исходя из (37), нетрудно показать по индукции, что

$$\sum_{n\leq x} g(n)=xQ(\log x)+O\left(x^{1-\frac{2}{d+k}+\varepsilon}\right),$$

где $Q(u)$ – полином степени $k-1$. Применив теорему 1 к функциям $g(n)$ и

$$f(n)=\frac{\mu^2(n)\,\omega(n)}{\prod\limits_{p\mid n}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)}$$

с $\lambda=\max\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{2}{d+x}\right)+\varepsilon$, получаем:

$$\sum_{n\leq x} f(n)=xP_1(\log x)+O\left(x^{\max\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{2}{d+k}\right)+\varepsilon}\right),$$

где $P_1(u)$ – полином степени $k-1$, откуда, после суммирования по Абелю вытекает (35).

Ташкент

Поступило в редакцию
3.I.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Wirsing, Das asymptotishe Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, Math. Annalen, **143**, 75—102, 1961.
2. A. Renyi, A new proof of a theorem of Delange, Publs. math., **12**, 323—329, 1965.
3. Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, Асимптотическое поведение сумм мультипликативных функций, ДАН УзССР, **11**, 5—8, 1965.
4. Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел, УМН, 1967 т. 22, вып. 3(135), 119—197.
5. Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L — функций Дирихле, ГТТИ, М.-Л., 1947.
6. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
7. A. Renyi, On the density of certain sequences of integers, Publs. Inst. Math. Acad. serbe sci, **8**, 157—162, 1955.
8. H. Delange, Sur un theoreme de Renyi, Acta arithm., **11**, N 2, 241—252, 1965.
9. Б. В. Левин, Оценки специальных сумм и произведений, связанных с методом решета, Труды ТашГУ, вып. 228, 69—79, 1963.
10. М. М. Тян, К вопросу о распределении значений функции Эйлера $\varphi(n)$, Лит. мат. сб., **VI**, № 1, 1966, 105—119.
11. Б. М. Уразбаев, Об одной асимптотической формуле в алгебре, ДАН СССР, **95**, № 5, 935—938, 1954.
12. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, Теория чисел, М., 1964.
13. E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale, New York, 1949.

KAI KURIOS ASIMPTOTINĖS FORMULĖS MULTIPLIKATYVINIŲ FUNKCIJŲ SUMOMS IR JŲ PRITAIKYMAI

A. FAINLEIBAS

(Reziumė)

Šiame straipsnyje nagrinėjama multiplikatyvinių funkcijų vidurkių asimptotika. Reikalingiems duomenims apie funkcijos $f(n)$ reikšmių pirminių skaičių aibėje pasiskirstymą gauti vietoj pirminių skaičių ar idealų dėsnio panaudojama eilėje atvejų galimybė funkci-

ją $f(n)$ aproksimuoti tam tikra prasme kita multiplikatyvine funkcija $g(n)$, kurios asimptotika žinoma. Tai leidžia sumų $\sum_{n \leq x} f(n)$ asimptotinėse formulėse gauti liekamąjį narį, turintį laipsninį pažemėjimą. Duodami gautų teoremų pritaikymai tikimybinei skaičių teorijai ir kitiems klausimams.

SOME ASYMPTOTIC FORMULAE FOR THE SUMS OF MULTIPLICATIVE FUNCTION AND ITS APPLICATIONS

A. FAINLEIB

(Summary)

In this paper the asymptotic behaviour of the means of the multiplicative functions $f(x)$ by using instead of this function the other function $g(x)$, the asymptotic behaviour of which is a well known is regarded. There are given some applications to the probabilistic number theory and to the other questions.