LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СИТУАЦИЯХ РАВНОВЕСИЯ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЫ n ЛИЦ

Э. Й. ВИЛКАС

В статье обсуждаются вопросы нахождения ситуаций равновесия конечной бескоалиционной игры n лиц, конечность множества ситуаций равновесия (в дальнейшем будем писать сокращенно СР), описание множества СР. Приводятся примеры, иллюстрирующие принципиальные аналитические различия между биматричными играми и играми $n>2$ лиц.

Пусть $\Pi=(\Pi_1, ..., \Pi_n)$ – ситуация в чистых стратегиях, а $h_i(\Pi)$ – выигрыш i-го игрока в этой ситуации. Ситуацию в смешанных стратегиях обозначим через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, выигрыш i-го игрока в этой ситуации – $H_i(x)$, $x \,||\, x_i'=(x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n)$, $x_i=(x_{i1}, ..., {}_m x_{ii})$, $i=1, ..., n$.

Ситуация $\bar{x}$ называется (Дж. Нэш [1]) СР, если для всех $i=1, ..., n$ и всех x_i

$$H_i(x) \geqslant H_i(\bar{x} \,||\, x_i)$$

или, что то же самое,

$$H_i(\bar{x}) \geqslant H_i(\boldsymbol{x} \,||\, \Pi_i)$$

для всех Π_i и для всех $i=1, ..., n$.

В этой заметке мы не будем обсуждать, насколько СР соответствует нашим интуитивным понятиям оптимальной игры, а сразу обратимся к их нахождению.

Для того, чтобы стратегия $\bar{x}_i$ была равновесной, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$H_i(\bar{x}) = H_i(\bar{x} \,||\, \Pi_i)$$

для всех тех Π_i, которые входят в $\bar{x}_i$ с положительной вероятностью, и выполнялось неравенство

$$H_i(\bar{x}) \geqslant H_i(\bar{x} \,||\, \Pi_i)$$

для остальных Π_i. Следовательно, кандидатами в СР являются положительные решения (и только они) систем

$$\sum_{\{\Pi_k\},\, k\neq i} h_i(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)\, x_{1\Pi_1} \cdots x_{i-1,\Pi_{i-1}}\, x_{i+1,\Pi_{i+1}} \cdots x_{n\Pi_n} = v_i, \quad (1)$$

$$\sum_{\Pi_i} x_{i\Pi_i} = 1, \qquad i=1, \ldots, n,$$

где Π_i $(i=1, ..., n)$ пробегают некоторый набор чистых стратегий i-го игрока. На этом основано элегантное решение биматричных игр, данное Н. Н. Воробьевым [2], которое эффективно ввиду линейности в этом случае системы (1). Но и в случае $n>2$ решения системы (1) при всевозможных наборах чистых стратегий (всевозможных „подматрицах“) покрывают множество всех СР. А так как число этих наборов конечно, то эффективному описанию множества всех СР может помешать лишь невозможность эффективно описать множество решений системы (1). К сожалению, вообще так оно и есть.

Пусть наборы чистых стратегий, участвующих в (1), всех игроков имеют одинаковое число элементов („кубическая подматрица“), в частности, скажем, $m_i=s$, $i=1, ..., n$. Тогда, предполагая невырожденность матрицы $\| h_i(\Pi_i, \Pi_j)\|$ при фиксированных стратегиях остальных игроков или действуя формально, мы можем по обыкновенным правилам линейной алгебры найти x_j, как функцию от $\{x_k\}$, $k\neq i, j$. Подставляя найденное x_j в остальные уравнения системы (1) и снова действуя аналогичным образом, через $n-1$ шагов придем к системе s алгебраических уравнений какой-то степени с s неизвестными.

Это можно сделать и на основе такой элементарной формулы:

$$\det \| \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} z_k \|_{n\times n} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{s} z_{k_1} \sum_{k_2=1}^{s} z_{k_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{s} z_{k_n} \det \| a_{\cdot 1k_1} a_{\cdot 2k_2} \cdots a_{\cdot nk_n} \| =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{s} z_{k_1} \cdots z_{k_n} \| a_{\cdot 1k_1} a_{\cdot nk_n} \|,$$

где $a_{\cdot jk_j} = (a_{1jk_j}, \ldots, a_{njk_j})^T$.

Сведе́ние системы (1) к системе алгебраических уравнений для $x_{i1}, ..., x_{im_i}$ с числом уравнений m_i возможно и в других случаях, т.е. когда m_i различны.

Итак, нахождение x_i, удовлетворяющего системе (5), эквивалентно решению системы алгебраических относительно $x_{i\Pi_i}$ уравнений. Если эта система невырождена, то выбранная подматрица может дать не более, чем конечное число решений. Конечно, не все они должны быть равновесными стратегиями, но, как показывает нижеследующий пример, равновесная стратегия, соответствующая невырожденной подматрице, необязательно единственна.

Пример 1.

$$\mathrm{I}: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{II}: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{III}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I игрок выбирает строку, II — столбец, а III — номер матрицы. Первая тройка матриц — это соответствующие выигрыши I игрока, вторая — второго и третья — третьего. Здесь имеются две вполне смешанные ситуации равновесия:

$$x_1' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad x_2' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad x_3' = \left(\frac{3}{35}, \frac{12}{35}, \frac{20}{35}\right), \quad v_1' = \frac{64}{105}, \quad v_2' = \frac{98}{105}, \quad v_3' = \frac{2}{3}$$

и

$$x''_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \; x''_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \; x''_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$v''_1 = \frac{2}{3}, \; v''_2 = \frac{5}{6}, \; v''_3 = \frac{3}{4}.$$

Если система вырождена, мы получаем бесконечное множество решений, которое (или часть его) может принадлежать множеству СР.

Такую возможность показывает и пример 2.

Пример 2.

$$\mathrm{I}: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{II}: \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{III}: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество вполне смешанных стратегий здесь таково:

$$\frac{11}{17} \leqslant x_{11} \leqslant \frac{2}{3}, \qquad x_{21} = \frac{8 - 9x_{11}}{25x_{11} - 14}, \qquad x_{31} = \frac{2 - 3x_{11}}{x_{11}},$$

$$x_{12} = 1 - x_{11}, \qquad x_{22} = 1 - x_{21}, \qquad x_{32} = 1 - x_{31}.$$

Ввиду невыпуклости это множество не может быть описано эффективно. Очевидно, бесконечное множество решений вообще будет не только невыпуклым, но и нелинейным, и поэтому тогда эффективное задание его крайних точек (если выпукло) будет невозможным.

Множество всех СР становится бесконечным, когда появляются стратегически эквивалентные существенные стратегии некоторого игрока в некоторых существенных ситуациях, в частности, когда для некоторого i и Π'_i, Π''_i выполняется равенство

$$h_i(\Pi \,\|\, \Pi'_i) = h_i(\Pi \,\|\, \Pi''_i) \tag{2}$$

для всех существенных Π.

Полностью этот вопрос может быть решен (хотя бы теоретически) с помощью якобиана системы (1).

Итак, в известном смысле стратегически определенная игра имеет только конечное число СР. и наоборот.

Будем говорить, что множество всех СР не имеет нелинейной компоненты если оно является объединением конечного числа подмножеств вида $X_1 \times \times X_2 \times \ldots \times X_n$, где все X_i суть выпуклые многогранники.

Бесконечная линейная компонента, очевидно, имеется тогда и только тогда, когда некоторый игрок имеет хотя бы две такие равновесные стратегии x'_i и x''_i, что $\bar{x} \,\|\, x'_i$ и $\bar{x} \,\|\, x''_i$ суть СР.

Крайними решениями системы (1) назовем все решения, если их конечное число и крайние точки бесконечной линейной компоненты системы (1), если такова имеется.

Пусть $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ – множества всех крайних решений систем (1), а $X_1 \subset \mathcal{X}_1, \ldots, X_n \subset \mathcal{X}_n$. Пусть далее

$$S(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \{ x_n : (x_1, \ldots, x_n) \in S_\Gamma \},$$

где S_Γ – множество всех равновесных ситуаций игры Г.
Положим

$$S(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \bigcap_{\substack{x_i \in X_i, \\ i=1, \ldots, n-1}} S(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

а $[X]$ обозначим выпуклую оболочку некоторого множества X. Аналогично случаю биматричных игр можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Если S_Γ не имеет нелинейной компоненты, то*

$$S_\Gamma = \bigcup_{\substack{X_i \subset \mathcal{X}_i \\ i=1, \ldots, n-1}} [X_1] \times \cdots \times [X_{n-1}] \times S(X_1, \ldots, X_{n-1}). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in S_\Gamma$. Докажем, что для некоторых $X_1, \ldots, X_{n-1}$

$$\bar{x}_1 \in [X_1], \ \ldots, \ \bar{x}_{n-1} \in [X_{n-1}], \ \bar{x}_n \in S(X_1, \ldots, X_{n-1}). \tag{4}$$

Если $\bar{x}_i \in \mathcal{X}_i$, $i=1, \ldots, n-1$, то утверждение очевидно. Если (4) верно, когда некоторые k из стратегий $\bar{x}_i$ не являются крайними, то оно верно и для $k+1$. Действительно, пусть $\bar{x}_1 \notin \mathcal{X}_1$. Тогда $\bar{x}_1$ принадлежит некоторой бесконечной линейной компоненте (по условию теоремы),

$$\bar{x}_1 \in [X_1], \ X_1 = \{x_1^t, \ t=1, \ldots, p\}.$$

Кроме того,

$$(x_1^t, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \in S_\Gamma. \tag{5}$$

К точкам (5) применимо индуктивное предположение:

$$x_1^t \in \mathcal{X}_1, \ \bar{x}_2 \in [X_2^t], \ \ldots, \ \bar{x}_{n-1} \in [X_{n-1}^t], \ \bar{x}_n \in S(x_1^t, X_2^t, \ \ldots, X_{n-1}^t],$$
$$t = 1, \ \ldots, p.$$

Но отсюда следует, что

$$x_n \in S(X_1, \bigcup_t X_2^t, \ldots, \bigcup_t X_{n-1}^t)$$

и, конечно,

$$x_1 \in [X_1], \ \bar{x}_2 \in [\bigcup_t X_2^t], \ \ldots, \ \bar{x}_{n-1} \in [\bigcup_t X_{n-1}^t].$$

Пусть теперь, наоборот,

$$x_1 \in [X_1], \ \ldots, \ x_{n-1} \in [X_{n-1}], \ x_n \in S(X_1, \ \ldots, X_{n-1}).$$

Докажем, что $(x_1, \ldots, x_n) \in S_\Gamma$. Это утверждение верно для $n=2$ (см. [2] или [3]). Предположим, что оно верно для $n-1$ и фиксируем последовательно, скажем, x_1 и x_2. Тогда

$$x_n \in S_1(x_1, \ \ldots, x_{n-1}), \ x_n \in S_2(x_1, \ \ldots, x_{n-1}), \tag{6}$$

где S_i отнесено к случаю игры $n-1$ лиц, получающейся из Γ при фиксированном x_i. Непосредственно можно убедиться, что ситуация, удовлетворяющая соотношениям (6), удовлетворяет определению СР.

Как видно из доказательства, формула (3) симметрична относительно игроков, т.е. в роли n может быть любой индекс i.

Наконец следует заметить, что если любое решение из нелинейной компоненты назвать крайним, то формула (3) будет верна для любой игры n лиц. Но, как мы отмечали ранее, с ее помощью нельзя будет тогда эффективно построить S_Γ.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
26.V.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Нэш, Бескоалиционные игры, сб. Матричные игры, Физматгиз, М., 1961, 205–221.
2. Н. Н. Воробьев, Ситуации равновесия в биматричных играх, Теория вероятн. и ее прим., 3(1958), 318–331.
3. H. Kuhn, An algorithm for equilibrium points in bimatrix games, Proc. Nat. Acad. Sci., **47**, 10 (1961), 1657–1662.

KELETAS PASTABŲ APIE NEKOALICINIŲ DAUGELIO ASMENŲ LOŠIMŲ PUSIAUSVYROS SITUACIJAS

E. VILKAS

(Reziumė)

Įrodoma formulė nekoalicinių lošimų pusiausvyros situacijų aibei, visiškai analogiška bimatricinių lošimų atveju.

SOME REMARKS ABOUT EQUILIBRIUM POINTS IN n-PERSON NON-COALITION GAMES

E. VILKAS

(Summary)

There is proved the formula for the set of equilibrium points similar to it for the case of bimatrix game.