LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ МНОГИХ ЛИЦ

Э. Й. ВИЛКАС

Настоящая заметка является продолжением работы автора (см. [1] и [2]). Доказывается несколько теорем, аналогичных случаю матричных игр, теорема существования вполне смешанной ситуации равновесия. Рассматривается существование подобных ситуаций равновесия (см. [1]).

1. Определения и обозначения. Игра Γ. Обозначим через $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ ситуацию в чистых стратегиях и $h_i(\pi)$ — выигрыш i-го игрока в этой ситуации, через $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — ситуацию в смешанных стратегиях $x_i=(x_{i1}, \ldots, x_{im_i})$ и через $H_i(x)$ — средний выигрыш i-го игрока в этой ситуации. Как обычно,

$$x \,||\, x_i'=(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Дж. Нэш [3] назвал *ситуацией равновесия* (сокращенно СР) такую ситуацию $\bar{x}$, для которой

$$H_i(\bar{x}) \geqslant H_i(\bar{x} \,||\, x_i)$$

при всех x_i и $i=1, \ldots, n$. Ввиду полилинейности H_i это равносильно требованию:

$$H_i(\bar{x}) \geqslant H_i(\bar{x} \,||\, \pi_i) \tag{1}$$

для всех π_i и $i=1, \ldots, n$.

Подобные СР и вполне смешанные СР мы определим несколько иначе, чем в [1], чтобы охватить вырожденные случаи. Ситуации равновесия назовем *подобными*, если их наборы чистых стратегий π_i, при которых имеет место равенство в неравенстве (1), совпадают. СР называется *вполне смешанной* (нестрого), если равенство в (1) имеет место для всех π_i. Если для некоторого π_i имеет место равенство в (1), и тем не менее, $x_{i\pi_i}=0$, то мы имеем случай вырождения. Только в этих случаях новые определения не совпадают с введенными в [1], потому что из $x_{i\pi_i}>0$ равенство в (1) всегда следует.

Иногда для нахождения СР или доказательства теорем может быть использован следующий *принцип декомпозиции* игры. Если $\bar{\sigma}=(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$ является СР в игре $\Gamma_{\bar{\nu}}$, а $\bar{\nu}=(\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ — СР в игре $\Gamma_{\bar{\sigma}}$, то $\bar{x}=(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$ является СР в игре Γ, где через $\Gamma_{\bar{\nu}}$ и $\Gamma_{\bar{\sigma}}$ обозначены игры $n-k$ и k игроков, получающиеся из Γ, если фиксировать стратегии остальных игроков $\bar{\sigma}$ и $\bar{\nu}$, соответственно. Доказательство получается немедленно:

$$H_i(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \geqslant H_i(\bar{\sigma} \,||\, \pi_i, \bar{\nu}), \qquad i=1, \ldots, k,$$

$$H_i(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \geqslant H_i(\bar{\sigma}, \bar{\nu} \,||\, \pi_i), \qquad i=k+1, \ldots, n,$$

и отсюда следует (1). Этот принцип может быть обобщен на случай разделения игры на $s>2$ частей.

2. Рассмотрим параметрическую игру $\Gamma(\xi)$, $\xi \in D$, где D некоторая область евклидова пространства. Пусть $X(\xi)$ — множество всех СР игры $\Gamma(\xi)$. Следующая теорема является аналогом соответствующей теоремы для матричных игр.

Теорема 1. *Если игра $\Gamma(\xi)$ имеет вполне смешанную СР для каждого $\xi \in D$ и $h_i(\xi, \pi)$ непрерывны по ξ для всех π, то существует такая непрерывная функция $x(\xi)$, что $x(\xi) \in X(\xi)$, $\xi \in D$.*

Доказательство. Пусть верно обратное и для некоторого $\xi_0 \in D$

$$\inf_{\xi \in \varepsilon(\xi_0) \setminus \{\xi_0\}} \{ \|x(\xi_0) - x(\xi)\| : x(\xi_0) \in X(\xi_0), \quad x(\xi) \in X(\xi) \} > 0 \tag{2}$$

в любой достаточно малой окрестности $\varepsilon(\xi_0)$ точки ξ_0, где $\|x\| = \max_{ij} |x_{ij}|$.

Возьмем последовательность $\xi_n \to \xi_0$, $n \to \infty$ и выберем такую подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$, что последовательность $\{x(\xi_{n_k})\}$ сходится. Пусть

$$\lim_{k \to \infty} x(\xi_{n_k}) = \bar{x}.$$

Ввиду ограниченности $\{x(\xi_n)\}$ это сделать можно. Покажем, что $\bar{x} \in X(\xi_0)$. А так как это противоречит допущению (2), этим доказательство будет завершено.

Множество $X(\xi)$ совпадает с множеством неотрицательных решений системы

$$\begin{gathered} \sum_{\{\pi_k\},\, k \neq i} h_i(\xi;\ \pi_1, \ldots, \pi_n)\, x_{1\pi_1} \ldots x_{i-1,\pi_{i-1}} x_{i+1,\pi_{i+1}} \ldots x_{n\pi_n} = v_i, \\ \pi_k = 1, \ldots, m_k, \\ \sum_{\pi_i} x_{i\pi_i} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3}$$

Подставим сюда ξ_{n_k} и $x(\xi_{n_k})$ и перейдем к пределу $k \to \infty$. В силу непрерывности $h_i(\xi)$ вектор $\bar{x}$ будет удовлетворять системе (3) при $\xi = \xi_0$. Следовательно, $\bar{x} \in X(\xi_0)$.

3. Укажем достаточные условия существования вполне смешанных СР.

Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ — игры $n-1$ лиц, получающиеся из Γ при фиксированных чистых стратегиях n-го игрока, $\Gamma_\mu = \mu_1\Gamma_1 + \ldots + \mu_t\Gamma_t$, $\mu_i \geq 0$, $\Sigma \mu_i = 1$. Мы фиксируем стратегии n-го игрока, а не любого другого только ради удобства.

Лемма. *Пусть $\pi^j = (\pi_{1j}, \pi_{2j}, \ldots, \pi_{nj})$, $j = 1, \ldots, t$ суть СР в Γ, в которой каждый игрок имеет t чистых стратегий. Если*

$$h_i(\pi^j) > h_i(\pi^j \,\|\, \pi_{ik}), \qquad k \neq j,$$

для всех i и аналогичное условие выполняется для всех Γ_μ, $\mu > 0$, кроме того, нет таких π_{nj_1} и π_{nj_2}, что

$$h_n(\pi \,\|\, \pi_{nj_1}) \equiv h_n(\pi \,\|\, \pi_{nj_2}),$$

тогда Γ имеет вполне смешанные СР, причем только конечное их число.

Доказательство. Лемма справедлива для $n = 2$. Пусть она справедлива для $n-1$. Докажем, что тогда она справедлива и для n.

По предположению индукции игра Γ_μ имеет конечное число вполне смешанных СР. Если Γ_μ рассматривать как параметрическую игру, то к ней применима теорема 1, и, значит, для каждого μ можно так выбрать вполне смешанную СР $x(\mu)$ игры Γ_μ, что $x(\mu)$ будет непрерывной функцией μ.

Предположим сначала, что n-й игрок имеет только две чистые стратегии. По условиям леммы либо

$$H_n\left(x\,[(1,\ 0)],\ \pi_{n1}\right)>H_n\left(x\,[(1,\ 0)],\ \pi_{n2}\right)$$

и

$$H_n\left(x\,[(0,\ 1)],\ \pi_{n1}\right)<H_n\left(x\,[(0,\ 1)],\ \pi_{n2}\right), \tag{4}$$

либо выполняются обратные неравенства. Функции $H_n\ (x\,[\mu],\ \pi_n)$ непрерывны по μ, и поэтому из (4) или обратных им неравенств следует существование такого $\mu^*>0$, что

$$H_n\ (x\,[\mu^*],\ \pi_{n1})=H_n\ (x\,[\mu^*],\ \pi_{n2}).$$

По принципу декомпозиции это означает, что вполне смешанная ситуация $(x\,[\mu^*],\ \mu^*)$ является СР в игре Γ.

Если n-й игрок имеет больше, чем 2 чистые стратегии, продолжаем доказательство по индукции, взяв его смешанную стратегию в игре с $t-1$ чистой стратегией за чистую. Повторив проведенное рассуждение, получим утверждение для любого t.

Остается доказать конечность множества вполне смешанных СР.

Пусть наоборот, это множество бесконечно. Так как для каждого μ множество вполне смешанных СР $x\ (\mu)$ в игре Γ_μ конечно, то бесконечным должно быть множество равновесных μ. Из полилинейности выражений (3) следует, что некоторые равенства (3) при $i=n$ будут выполняться тождественно, и, следовательно, некоторые чистые стратегии n-го игрока будут стратегически эквивалентными. Последнее имеет здесь место только тогда, когда для некоторых j_1 и j_2

$$h_n\ (\pi\ ||\ \pi_{nj_1})\equiv h_n\ (\pi\ ||\ \pi_{nj_2}). \tag{5}$$

Противоречие.

Будем говорить, что две СР не перекрываются, если наборы их чистых стратегий не перекрываются.

Теорема 2. *Если в игре* Γ *существует неперекрывающаяся система* СР, *объединение которых подобно вполне смешанной ситуации, а игра* Γ', *составленная из этих* СР, *принимаемых за чистые, удовлетворяет условиям леммы, то игра* Γ *обладает хотя бы одной вполне смешанной* СР.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что расширенная вполне смешанная СР игры Γ' есть СР в игре Γ. Пусть μ^j — ситуации равновесия в игре Γ, а $\bar{x}$ — СР в игре Γ'. Тогда

$$H_i\ (\mu^j)\geqslant H_i\ (\mu^j\ ||\ \pi_i), \qquad i=1,\ \ldots,\ n \tag{6}$$

и

$$H_i\ (\bar{x})\geqslant H_i\ (\bar{x}\ ||\ \mu_i^j), \qquad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{7}$$

Умножим (6) на $\bar{x}_{kj},\ k\neq i$ и просуммируем по j. Получим

$$H_i\ (\bar{\bar{x}}\ ||\ \mu_i^j)\geqslant H_i\ (\bar{\bar{x}}\ ||\ \pi_i), \qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{8}$$

где вектор $\bar{\bar{x}}=\bar{x}_1\mu^1+\ \ldots\ +\bar{x}_t\mu^t$. Очевидно,

$$H_i\ (\bar{x})=H_i\ (\bar{\bar{x}})$$

и поэтому из (7) и (8)

$$H_i\ (\bar{\bar{x}})\geqslant H_i\ (\bar{\bar{x}}\ ||\ \mu_i^j)\geqslant H_i\ (\bar{x}\ ||\ \pi_i), \qquad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Замечание. Единственность вполне смешанной СР можно установить с помощью теорем о приближенном решении систем нелинейных уравнений

$$H_n(x(\mu)\,||\,\pi_n') = H_n(x(\mu)\,||\,\pi_n'')$$

или просто уравнений (3), используя идею оператора сжатия. Этот вопрос автор предполагает рассмотреть в другом месте.

4. Приведем несколько утверждений о существенности стратегий. Обозначим через $\mathrm{Rel}\, x$ множество чистых стратегий, существенных в ситуации x.

Теорема 3. *Пусть x^j – ситуация равновесия в игре Γ_j, $j=1, \ldots, t$. Если существуют такие j_0 и π_n^0, что для всех $\pi_n \neq \pi_n^0$*

$$H_n(x^{j_0}, \pi_n^0) > H_n(x^{j_0}, \pi_n), \tag{9}$$

то стратегия π_n^0 существенна для каждой СР $\bar{x}$, для которой

$$\mathrm{Rel}\, x^{j_0} \subset \mathrm{Rel}\, \bar{x}. \tag{10}$$

Доказательство проведем от противного. Пусть в ситуации $\bar{x}$ стратегия π_n^0 несущественна. Это значит, что она будет доминироваться другими чистыми хотя бы так:

$$h_n(\pi\,||\,\pi_n^0) \leqslant \sum_j \lambda_j h_n(\pi\,||\,\pi_{nj}), \qquad \pi_{nj} \neq \pi_n^0,$$

для всех $\pi \in \mathrm{Rel}\, \bar{x}$, где $\lambda_j \geqslant 0$, $\Sigma \lambda_j = 1$. Отсюда, ввиду соотношения (10),

$$h_n(\pi\,||\,\pi_n^0) \leqslant \sum_j \lambda_j h_n(\pi\,||\,\pi_{nj}), \qquad \pi_{nj} \neq \pi_n^0$$

для всех $\pi \in \mathrm{Rel}\, x^{j_0}$. Следовательно,

$$H_n(x^{j_0}, \pi_n^0) \leqslant \sum_j \lambda_j H_n(x^{j_0}, \pi_{nj}).$$

Но это противоречит условию (9).

Приведем еще такое очевидное утверждение.

Теорема 4. *Если выполняется хотя бы одно условие из следующих трех*

1) *все игры $\Gamma_\mu = \mu_{n1}\Gamma_1 + \ldots + \mu_{nt}\Gamma_t$ имеют СР подобные $\bar{x}^{j_0}$;*

2) *игры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ имеют подобные чистые СР $\bar{x}^{j_0}$;*

3) *хотя бы для одного $j=1, \ldots, t$*

$$H_n(x^j, \pi_{nj}) = \max_{\pi_n} H_n(x^j, \pi_n),$$

тогда в игре Γ существует СР x^*, подобная некоторой ситуации $(\bar{x}^{j_0}, x_n)$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
3.VI.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Й. Вилкас, Аксиоматическое определение ситуации равновесия и значения некооперативной игры n лиц, Теория вероятн. и ее прим., (в печати).
2. Э. Й. Вилкас, Несколько замечаний о ситуациях равновесия бескоалиционной игры n лиц, Лит. мат. сб., VII, № 4 (1967), 587–591.
3. Дж. Нэш, Бескоалиционные игры, сб. Матричные игры, Физматгиз, М., 1961, 205–221.

NEKOALICINIŲ DAUGELIO ASMENŲ LOŠIMŲ PUSIAUSVYROS SITUACIJOS

E. VILKAS

(Reziumė)

Įrodoma keletas teoremų, analogiškų matricinių lošimų atvejui, ir pilnai sumaišytų pusiausvyros situacijų egzistavimas. Nagrinėjama panašių pusiausvyros situacijų egzistavimas.

EQUILIBRIUM POINTS IN NON-COALITION n-PERSON GAMES

E. VILKAS

(Summary)

There is proved some theorems on continuity of eguilibrium points of parametric n-person games on existence of completely mixed equilibrium points, and on passive pure strategies.

/