LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИК В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЛИНЕЙНОЙ ГРУППОЙ ИЗОТРОПИИ ТЕНЗОРНОГО ТИПА. II

А. ИОНУШАУСКАС

1. Введение

Если дано однородное пространство $\mathfrak{M}$, то линейная группа изотропии $\mathfrak{G}$ этого пространства [1, 2] есть некоторая линейная группа, действующая в N-мерном ($N=\dim\mathfrak{M}$) вещественном векторном пространстве R^N. Существование инвариантной финслеровой метрики в $\mathfrak{M}$ равносильно [2] существованию в R^N тангенциально невырожденной гиперповерхности, инвариантной относительно $\mathfrak{G}$.

В предыдущей работе [3] в качестве линейной группы $\mathfrak{G}$ было взято тензорное представление прямого произведения *нескольких* линейных групп ([3], теорема 1 и др.) и указаны некоторые общие случаи, когда в соответствующем тензорном пространстве R^N существует тангенциально невырожденная инвариантная гиперповерхность или, напротив, когда заведомо такая гиперповерхность невозможна.

Настоящая статья предназначена для более детального исследования случая, когда $\mathfrak{G}$ есть тензорное представление *одной* линейной группы (в основном группы $SL(n, R)$). При этом непосредственно изучаются, орбиты (траектории) представления и указаны некоторые конкретные тангенциально невырожденные инвариантные гиперповерхности.

Результаты, которые составляют содержание этой работы, были доложены на Семинаре по классической дифференциальной геометрии при Кафедре дифференциальной геометрии Московского Государственного университета им. М. В. Ломоносова, и автору приятно здесь выразить свою благодарность руководителям этого семинара проф. Г. Ф. Лаптеву и проф. А. М. Васильеву и участникам Семинара за оказанное любезное внимание. Кроме того, автор глубоко благодарен проф. А. М. Васильеву за полезные обсуждения настоящей работы.

2. О тангенциальной невырожденности поверхностей

Определение 2.1. Пусть $M(x)=M(x^1, \ldots, x^n)$ – точка на гладкой поверхности, лежащей в R^n. Говорят, что эта поверхность *тангенциально невырождена* в точке M, если касательная плоскость к поверхности ни в какой инфинитезимально близкой к M точке $M'(x+\delta x)=M'(x^1+\delta x^1, \ldots, x^n+\delta x^n)$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\delta x^i)^2>0\right)$ не параллельна касательной плоскости к поверхности в точке M.

Базис пространства R^n будем считать во всех рассмотрениях фиксированным, и базисные векторы обозначим через $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть дано линейное представление

$$dx^i = \sum_{k,\xi} x^k \varphi^i_{k\xi} \omega^\xi \; (i, \; k = 1, \; \ldots, \; n; \; \xi, \; \eta = 1, \; \ldots, \; r) \tag{2.1}$$

r-мерной группы Ли H в пространстве R^n; здесь ω^ξ — базисные и инвариантные формы группы H, а $\varphi^i_{k\xi}$ — константы, причем система (2.1) вполне интегрируема, т.е. константы $\varphi^i_{k\xi}$ вместе со структурными константами группы H удовлетворяют известным „уравнениям Ли“ (см., напр., [4]). Введем обозначения:

$$\Phi^i_\xi(x) = \sum_k x^k \varphi^i_{k\xi},$$

$$\Phi^i_\xi(x+\delta x) = \sum_k (x^k + \delta x^k) \varphi^i_{k\xi}, \tag{2.2}$$

где δx^k есть значения величин (2.1) при некоторых значениях форм ω^ξ. В этих обозначениях имеет место

Предложение 2.2. *Орбита представления* (2.1) *тангенциально невырождена в точке* $M(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} \Phi^i_\xi(x) \\ \Phi^i_\eta(x+\delta x) \end{matrix} \right\| > \operatorname{rang} \| \Phi^i_\xi(x) \|, \tag{2.3}$$

как только $\sum_i (\delta x^i)^2 > 0$.

Доказательство. Касательная плоскость к орбите в точке $M(x)$ натянута на точки $M(x) + M_\xi(x)$, где

$$M_\xi(x) = \sum_i \Phi^i_\xi(x) e_i,$$

а касательная плоскость в точке $M'(x+\delta x)$ — на точки $M' + M_\xi(x+\delta x)$, где

$$M_\xi(x+\delta x) = \sum_i \Phi^i_\xi(x+\delta x) e_i.$$

Непараллельность этих двух плоскостей означает, что подпространство, натянутое на векторы $M_\xi(x+\delta x)$, не содержится в подпространстве, натянутом на векторы $M_\xi(x)$, а это равносильно неравенству (2.3).

Предложение 2.3. *Гладкая гиперповерхность в* R^n $(n > 1)$, *заданная уравнением*

$$F(x^1, \; \ldots, \; x^n) = \text{const}, \tag{2.4}$$

будет тангенциально невырожденной в точке $M(x)$ *этой гиперповерхности, если*

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{matrix} \right\| = n \tag{2.5}$$

и

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} F_1 & F_2 \dots F_n & 0 \\ F_{11} & F_{12} \dots F_{1n} & F_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} \dots F_{nn} & F_n \end{matrix}\right\| = n+1, \tag{2.6}$$

где $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$, $F_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k}(x)$.

Доказательство. Касательная плоскость к гиперповерхности (2.4) в точке $M(x)$ определяется уравнением

$$\sum_i F_i (X^i - x^i) = 0, \tag{2.7}$$

где X^i – координаты текущей точки этой плоскости. В инфинитезимально близкой точке $M'(x)' = M'(x + \delta x)$ уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\sum_i \left(F_i + \sum_k F_{ik} \delta x^k\right)(X^i - x'^i) = 0, \tag{2.8}$$

и условие параллельности гиперплоскостей (2.7) и (2.8) выглядит так:

$$\sum_k F_{ik} \delta x^k = \lambda F_i. \tag{2.9}$$

Следовательно, величины δx^k удовлетворяют системе (2.9) и уравнению

$$\sum_k F_k \delta x^k = 0. \tag{2.10}$$

Из условия (2.5) вытекает, что ненулевое решение δx^k системы линейных уравнений (2.9), (2.10) возможно лишь тогда, когда $\lambda \neq 0$. Но в таком случае условие (2.6) означает, что эта система (2.9), (2.10) несовместна.

3. Основная лемма

Лемма 3.1. *Пусть дано приводимое линейное представление*

$$\mathfrak{H} = \left\|\begin{matrix} \mathfrak{A} & 0 \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \end{matrix}\right\| \tag{3.1}$$

r-мерной группы Ли H в R^{n+m} ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 0$), причем через $R^n \subset R^{n+m}$ обозначено инвариантное подпространство, в котором представление (3.1) *индуцирует представление $\mathfrak{H}_1$. Тогда, если орбита представления $\mathfrak{H}_1$ в точке $M(x) = M(x^1, \dots, x^n)$*

1) *имеет размерность $r = \dim H$ и*

2) *тангенциально невырождена,*

то орбиты всего представления $\mathfrak{H}$ также обладают этими двумя свойствами в точках $P(x) = P(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+m})$, где $x^{n+1}, \dots, x^{n+m}$ произвольны.

(Ясно, что при $m = 0$ приводимость не утверждается.)

Доказательство. Представление (3.1) может быть записано так:

$$dx^i = \sum_{k,\xi} x^k \varphi^i_{k\xi} \omega^\xi, \tag{3.1i}$$

$$dx^a = \sum_{\xi} \left(\sum_{k=1}^{n} x^k \psi^a_{k\xi} + \sum_{b=n+1}^{n+m} x^b \psi^a_{b\xi} \right) \omega^\xi, \tag{3.1a}$$

ξ, $\eta = 1, \ldots, r$; i, $k = 1, \ldots, n$; a, $b = n+1, \ldots, n+m$; ω^ξ – базисные инвариантные формы группы H; $\varphi^i_{k\xi}$, $\psi^a_{k\xi}$, $\psi^a_{b\xi}$ – константы, удовлетворяющие (вместе со структурными константами группы H) уравнениям Ли.

В обозначениях вида (2.2)

$$\Phi^i_\xi(x) = \sum_k x^k \varphi^i_{k\xi},$$

$$\Psi^a_\xi(x) = \sum_k x^k \psi^a_{k\xi} + \sum_b x^b \psi^a_{b\xi}$$

и понятных $\Phi^i_\xi(x+\delta x), \Psi^a_\xi(x+\delta x)$ условие 1) леммы означает, что

$$\operatorname{rang} \| \Phi^i_\xi(x) \| = r, \tag{3.2}$$

и, следовательно, если хотя бы одна из форм ω^ξ отлична от нуля, то $\sum_i (dx^i)^2 > 0$, а условие 2) леммы означает неравенство (2.3) , т.е.

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} \Phi^i_\xi(x) \\ \Phi^i_\eta(x+\delta x) \end{matrix} \right\| > r, \tag{3.3}$$

если хотя бы одна из форм ω^ξ отлична от нуля.

Но из (3.2) вытекает, что

$$\operatorname{rang} \| \Phi^i_\xi(x), \ \Psi^a_\xi(x) \| = r,$$

т.е. размерность орбит представления $\mathfrak{H}$ тоже равна $\dim H$, а из (3.3) следует неравенство

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} \Phi^i_\xi(x) & \Psi^a_\xi(x) \\ \Phi^i_\eta(x+\delta x) & \Psi^a_\eta(x+\delta x) \end{matrix} \right\| > r,$$

если хотя бы одна из форм ω^ξ отлична от нуля, т.е. орбиты представления $\mathfrak{H}$ тангенциально невырождены.

Значение доказанной леммы для наших целей состоит в следующем. Если орбита линейного представления $\mathfrak{G}$ тангенциально невырождена в некоторой точке M, то из соображений непрерывности вытекает *тангенциальная невырожденность орбит и во всех точках некоторой окрестности точки* M (в дальнейшем, строго говоря, только в таком смысле мы и употребляем высказывание ,,орбиты тангенциально невырождены"), а в таком случае из этих орбит можно составить в пространстве представления *тангенциального невырожденную гиперповерхность, инвариантную относительно* $\mathfrak{G}$.

4. Орбиты тензорных представлений группы $SL(n, R)$.

Через $T_p^s(n)$ мы будем обозначать пространство тензоров $x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_s}$ $s \geqslant 0$ раз контравариантных и $p \geqslant 0$ раз ковариантных, $p+s \geqslant 1$; здесь и всюду в дальнейшем предполагается

$$n \geqslant 2;\ i, j, k, \ldots, i_1, \ldots, i_p, k_1, \ldots, k_s, i', i'', \ldots = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

На n^{p+s} чисел $x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_s}$ можно смотреть как на координаты точки M пространства $T_p^s(n)$ относительно фиксированного базиса, векторы которого мы будем обозначать через $e_{k_1 \ldots k_s}^{i_1 \ldots i_p}$. В таком пространстве дейстие группы $GL(n, R)$ определяется системой

$$dx_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_s} = \sum_l (\omega_{i_1}^l x_{l \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_s} + \cdots + \omega_{i_p}^l x_{i_1 \ldots l}^{k_1 \ldots k_s} - \omega_l^{k_1} x_{i_1 \ldots k_s}^{l \ldots i_p} - \cdots - \omega_l^{k_s} x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots l}), \tag{4.2}$$

где ω_i^k – инвариантные формы группы $GL(n, R)$, т.е. имеют следующую структуру:

$$D\omega_i^k = \sum_l \omega_i^l \wedge \omega_l^k. \tag{4.3}$$

Действие группы $SL(n, R)$ в пространстве $T_p^s(n)$ определяется той же системой (4.2), только инвариантные формы ω_i^k связаны, кроме уравнений (4.3), еще линейным уравнением

$$\sum_i \omega_i^i = 0. \tag{4.4}$$

В [3, теорема 1] доказано, что только при $p=s$ в пространстве $T_p^s(n)$ существует тангенциально невырожденная гиперповерхность, инвариантная относительно действия (4.2) группы $GL(n, R)$; при $p \neq s$ среди преобразований (4.2) имеются „лучистые расширения“ $x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_s} \to \lambda x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_s}$, так что орбиты являются конусами с вершиной в нуле, и поэтому в $T_p^s(n)$ невозможна тангенциально невырожденная инвариантная гиперповерхность.

Предложение 4.1. *Орбиты тензорного представления* (4.2) *группы* $GL(n, R)$ *при* $p=s$ *имеют размерность, меньшую чем* $n^2 = \dim GL(n, R)$.

Доказательство. В уравнениях (4.2) выделяем члены, содержащие диагональные формы ω_i^i:

$$dx_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_p} = (\omega_{i_1}^{i_1} + \cdots + \omega_{i_p}^{i_p} - \omega_{k_1}^{k_1} - \cdots - \omega_{k_p}^{k_p}) x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_p} +$$

$$+ \sum_{l \neq i_1} \omega_{i_1}^l x_{l \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_p} + \cdots + \sum_{l \neq i_p} \omega_{i_p}^l x_{i_1 \ldots l}^{k_1 \ldots k_p} - \sum_{l \neq k_1} \omega_l^{k_1} x_{i_1 \ldots i_p}^{l \ldots k_p} - \cdots - \sum_{l \neq k_p} \omega_l^{k_p} x_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots l}$$

Отсюда видно, что все $dx_{i_1 \ldots i_p}^{k_1 \ldots k_p}$ линейно выражаются через n^2-n форм ω_i^k $(i \neq k)$ и через формы вида

$$\omega_{i_1}^{i_1} + \cdots + \omega_{i_p}^{i_p} - \omega_{k_1}^{k_1} - \cdots - \omega_{k_p}^{k_p}, \tag{4.5}$$

причем среди форм (4.5) линейно независимых меньше чем n. Действительно, из равенств $\omega_1^1=\omega_2^2=\cdots=\omega_n^n$ вытекает обращение в нуль всех форм (4.5).

В пространствах $T_1^0(n)$ и $T_0^1(n)$ представление (4.2) как группы $GL(n,R)$, так и группы $SL(n, R)$ транзитивно. Ясно, что при $p+s\geqslant 3$ в пространстве $T_p^s(n)$ представление (4.2) не может быть транзитивным, поскольку $\dim T_p^s(n)=n^{p+s}$.

Предложение 4.2. *В пространстве* $T_2^0(n)$ *представление* (4.2) *группы* $GL(n, R)$ *нетранзитивно, так как имеется семейство инвариантных конусов*

$$\frac{I_1}{I_2}=\text{const},$$

где $I_1=\det\|x_{ij}\|$, *а относительный инвариант* I_2 *определяется следующим образом*:

1) *если n четно, то* $I_2=(\bar I)^2$, *где*

$$\bar I=\sum_{i_1,\dots,i_n} x_{i_1i_2}x_{i_3i_4}\cdots x_{i_{n-1}i_n}\,\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4\cdots i_{n-1}i_n};$$

2) *если n нечетно, то*

$$I_2=\sum_{i_1,\dots,k_n}(x_{i_1i_2}x_{i_3i_4}\cdots x_{i_{n-2}i_{n-1}})\,x_{i_nk_n}\,(x_{k_1k_2}x_{k_3k_4}\cdots x_{k_{n-2}k_{n-1}})\times$$
$$\times\,\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4\cdots i_{n-2}j_{n-1}i_n}\,\varepsilon^{k_1k_2k_3k_4\cdots k_{n-2}k_{n-1}k_n}.$$

Аналогичное утверждение имеет место также о пространстве $T_0^2(n)$.

Для доказательства нужно только заметить, что относительные инварианты I_1, I_2 линейно независимы. В случае четного n указанный $\bar I$ не зависит от симметрической компоненты тензора x_{ij}, следовательно, сохраняя ту же кососимметрическую компоненту и изменяя симметрическую (напр., меняя диагональные значения $x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}$), мы будем менять I_1, в то время как I_2 сохранит первоначальное значение. К тому же замечаем, что в кососимметрической точке

$$x_{[12]}\neq 0,\ x_{[34]}\neq 0,\ \dots,\ x_{[n-1,\,n]}\neq 0,$$
$$\text{остальные } x_{[ij]}=0,$$

относительный инвариант $\bar I\neq 0$. В случае нечетного n можно рассмотреть точки вида

$$x_{n\alpha}=x_{\alpha n}=0,\qquad x_{nn}\neq 0,$$
$$\text{остальные } x_{\alpha\beta} \text{ произвольны } (\alpha,\ \beta=1,\dots,n-1).$$

В таких точках I_2 зависит только от кососимметрической части величин $x_{\alpha\beta}$, и можно дословно повторить рассуждение, приведенное для четного n.

Следствие 4.3. *В пространстве* $T_2^0(n)$ (и также в $T_0^2(n)$) *орбиты представления* (4.2) *группы* $SL(n, R)$ *имеют размерность меньшую чем* $n^2-1=$ $=\dim SL(n, R)$.

Действительно, инвариантные уравнения $I_1=c_1$, $I_2=c_2$, где c_1, c_2 — произвольные константы, а инварианты I_1, I_2 указаны в предложении 4.2, определяют инвариантную поверхность размерности n^2-2.

Предложение 4.4. *В пространстве $T_1^1(n)$ орбиты представления* (4.2) *группы $SL(n, R)$ имеют размерность, меньшую чем n^2-1.*

В самом деле, инварианты $\sum_i x_i^i$ и $\sum_{i,k} x_i^k x_k^i$ линейно независимы.

Из всего здесь сказанного вытекает, во-первых, что ни при каких p и s представление (4.2) группы $GL(n, R)$ не обладает по крайней мере одним из свойств 1), 2) представления $\mathfrak{H}_1$, используемых в лемме 3. 1; во-вторых, этим недостатком „страдает" также представление (4.2) группы $SL(n, R)$ при $p+s=1$ и $p+s=2$.

Теорема 4.5. *При $p+s\geqslant 3$ орбиты представления* (4.2) *группы $SL(n, R)$ в подпространстве симметрических тензоров $x_{(i_1\cdots i_p)}^{(k_1\cdots k_s)}$ пространства $T^s p(n)$ тангенциально невырождены и имеют размерность $n^2-1=\dim SL(n, R)$.*

Доказательство. *I случай*: $p>s$ (случай $s>p$ вполне аналогичен случаю $p>s$). Исследование проведем в точке $M(x)$ с координатами

$$x_{(i_1\cdots i_p)}^{(k_1\cdots k_s)}\begin{cases}\neq 0, \text{ если } i_1=\cdots=i_p=k_1=\cdots=k_s,\\ =0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \tag{4.6}$$

В такой точке

$$dx_{k\cdots k}^{k\cdots k}=(p-s)\,\omega_k^k x_{k\cdots k}^{k\cdots k},\quad dx_{(ik\cdots k)}^{k\cdots k}=\omega_i^k x_{k\cdots k}^{k\cdots k},$$
$$dx_{i\cdots i}^{(ki\cdots i)}=-\omega_i^k x_{i\cdots i}^{i\cdots i}\quad (i\neq k), \tag{4.7}$$

остальные же

$$dx_{(i_1\cdots i_p)}^{(k_1\cdots k_s)}=0.$$

Следовательно, касательная плоскость к орбите в точке (4.6) параллельна подпространству, натянутому на векторы

$$x_{\alpha\cdots\alpha}^{\alpha\cdots\alpha}e_{\alpha\cdots\alpha}^{\alpha\cdots\alpha}-x_{n\cdots n}^{n\cdots n}e_{n\cdots n}^{n\cdots n}\quad (\alpha=1, \ldots, n-1), \tag{4.8а}$$

$$x_{k\cdots k}^{k\cdots k}e_{k\cdots k}^{(ik\cdots k)}-x_{i\cdots i}^{i\cdots i}e_{(ki\cdots i)}^{i\cdots i}\quad (i\neq k), \tag{4.8б}$$

и имеет размерность этого подпространства, т.е. размерность орбиты равна n^2-1.

Теперь выясним, какая должна быть инфинитезимально близкая точка $M'(x+\delta x)$ (здесь $\delta x_{(i_1\cdots i_p)}^{(k_1\cdots k_s)}$ есть значения величин (4.2) в точке (4.6) при некоторых значениях $\bar\omega_i^j$ форм ω_i^j), чтобы в ней касательная плоскость к орбите была параллельна касательной плоскости к орбите в точке (4.6). Если $p+s>3$, то для этого, прежде всего, должно быть $dx_{(iik\cdots k)}^{k\cdots k}=0\ (i\neq k)$, откуда вытекает

$$\bar\omega_i^k=0\quad (i\neq k). \tag{4.9}$$

В оставшемся случае $p+s=3$ простые рассмотрения (мы их здесь даже не выписываем) приводят опять к условиям (4.9). Следовательно, точка $M'(x+\delta x)$ должна иметь вид

$$x'^{k\cdots k}_{k\cdots k}=\left(1+(p-s)\,\bar\omega_k^k\right)x_{k\cdots k}^{k\cdots k},$$

$$\text{остальные } x'^{(k_1\cdots k_s)}_{(i_1\cdots i_p)}=0, \tag{4.10}$$

т.е. вид (4.6). Касательная плоскость теперь параллельна подпространству, натянутому на векторы вида (4.8), где вместо x-ов стоят значения (4.10) x'-ов. Для удобства считая $x_{k\cdots k}^{k\cdots k}=1$, имеем, что

$$x'^{\alpha\cdots\alpha}_{\alpha\cdots\alpha}e^{\alpha\cdots\alpha}_{\alpha\cdots\alpha}-x'^{n\cdots n}_{n\cdots n}e^{n\cdots n}_{n\cdots n}=(p-s)\times$$

$$\times\left(\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha}+\sum_{\beta=1}^{n-1}\bar{\omega}^{\beta}_{\beta}\right)e^{n\cdots n}_{n\cdots n}+(\cdot\cdot\cdot)(e^{\alpha\cdots\alpha}_{\alpha\cdots\alpha}-e^{n\cdots n}_{n\cdots n}).$$

Следовательно, для параллельности касательных плоскостей в точках M и M' необходимо

$$\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha}+\sum_{\beta=1}^{n-1}\bar{\omega}^{\beta}_{\beta}=0. \tag{4.11}$$

Система (4.11) имеет ненулевой определитель, и, учитывая (4.9), мы получаем тангенциальную невырожденность орбиты в точке (4.6).

II случай: $p=s$. Здесь приходится рассматривать точку $M(x)$ более общего вида (причина тому видна из (4.7)):

$$x^{k\cdots k}_{k\cdots k}\neq 0,\qquad x^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha}\neq 0,\qquad x^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}\neq 0\qquad (\alpha=1,\ \ldots,\ n-1),$$

$$\text{остальные}\ x^{(k_1\cdots k_p)}_{(i_1\cdots i_p)}=0. \tag{4.12}$$

В точке (4.12)

$$dx^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha}=p\left(\omega^{\alpha}_{\alpha}+\sum\omega^{\beta}_{\beta}\right)x^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha},$$

$$dx^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}=-p\left(\omega^{\alpha}_{\alpha}+\sum\omega^{\beta}_{\beta}\right)x^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}, \tag{4.13}$$

$$dx^{k\cdots k}_{(ik\cdots k)}=\omega^{k}_{i}x^{k\cdots k}_{k\cdots k}$$

при

$$p>2\qquad (i\neq k)$$

или

$$dx^{kk}_{(ik)}=\omega^{k}_{i}x^{kk}_{kk}+\omega^{i}_{k}x^{kk}_{ii},$$

$$dx^{ii}_{(ik)}=\omega^{k}_{i}x^{ii}_{kk}+\omega^{i}_{k}x^{ii}_{ii}$$

при

$$p=2\qquad (i\neq k),$$

и во всяком случае можно все формы ω^{k}_{i}, ω^{α}_{α} разрешить через dx-сы. Это означает, что размерность орбиты в точке (4.12) равна n^2-1.

Поскольку в точке (4.12)

$$dx^{(ik\cdots k)}_{(ik\cdots k)}=0\qquad (i\neq k), \tag{4.14}$$

то для того, чтобы и в инфинитезимально близкой точке $M'(x+\delta x)$ касательная плоскость к орбите была параллельна касательной плоскости к орбите в точке M, необходимо выполнение равенств (4.14) и в точке M'. Это дает, как нетрудно подсчитать, условия

$$\bar{\omega}^{k}_{i}=0\qquad (i\neq k). \tag{4.15}$$

Следовательно, точка M' опять имеет вид (4.12):

$$x'^{k\cdots k}_{k\cdots k}=x^{k\cdots k}_{k\cdots k},$$

$$x'^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha}=\left(1+p\left(\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha}+\sum\bar{\omega}^{\beta}_{\beta}\right)\right)x^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha},$$

$$x'^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}=\left(1-p\left(\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha}+\sum\bar{\omega}^{\beta}_{\beta}\right)\right)x^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}, \tag{4.16}$$

остальные

$$x'^{(k_1\cdots k_p)}_{(i_1\cdots i_p)}=0.$$

Удобно предполагать, что

$$x^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha}=x^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}.$$

Тогда из (4.13) видно, что

$$dx^{n\cdots n}_{\alpha\cdots\alpha}+dx^{\alpha\cdots\alpha}_{n\cdots n}=0$$

в точке M, следовательно, такие же равенства должны выполняться и в точке M'. Из этого, ввиду (4.16) вытекает

$$\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha}+\sum\bar{\omega}^{\beta}_{\beta}=0,$$

т.е. все $\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha}=0$. Учитывая (4.15), мы опять получаем тангенциальную невырожденность орбиты.

Поскольку подпространство симметрических тензоров есть подпространство пространства $T^s_p(n)$, инвариантное относительно преобразований (4.2), то из доказанной теоремы и леммы 3.1 вытекает

Следствие 4.6. *При $p+s\geqslant 3$ орбиты представления* (4.2) *группы $SL(n, R)$ тангенциально невырождены и имеют размерность $n^2-1=\dim SL(n, R)$.*

Теорема 4.7. *Линейное представление*

$$\begin{gathered}\underset{(1)}{dx_i}=\sum_{k=1}^{n}\omega^k_i\underset{(1)}{x_k},\\ \underset{(2)}{dx_i}=\sum_{k=1}^{n}\omega^k_i\underset{(2)}{x_k},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \underset{(t)}{dx_i}=\sum_{k=1}^{n}\omega^k_i\underset{(t)}{x_k}\end{gathered} \tag{4.17}$$

группы $SL(n, R)$ в пространстве $(\underset{(1)}{x_1}, \ldots, \underset{(1)}{x_n}; \ldots; \underset{(t)}{x_1}, \ldots, \underset{(t)}{x_n})$ при $t<n$ транзитивно, а при $t\geqslant n$ орбиты представления тангенциально невырождены и имеют размерность $n^2-1=\dim SL(n, R)$.

Доказательство. Исследование проведем в точке

$$\underset{(a)}{x_i}\begin{cases}\neq 0, & \text{если } a=i,\\ =0, & \text{если } a\neq i\end{cases} \tag{4.18}$$

$(a=1, \cdots, t)$. Если $t<n$, то в точке (4.18) уравнения (4.17) принимают вид

$$dx_{\underset{(1)}{i}}=\omega_i^1 x_{\underset{(1)}{1}}, \ \ldots, \ dx_{\underset{(t)}{i}}=\omega_i^t x_{\underset{(t)}{t}},$$

и представление транзитивно. Если $t \geqslant n$, то уравнения таковы:

$$dx_{\underset{(1)}{i}}=\omega_i^1 x_{\underset{(1)}{1}}, \ \cdots, \ dx_{\underset{(n)}{i}}=\omega_i^n x_{\underset{(n)}{n}}, \ dx_{\underset{(a)}{i}}=0 \ (a>n). \tag{4.19}$$

Это означает, что касательная плоскость к орбите в точке M натянута на точки $M+M_i^j$, где

$$M_i^k = \underset{(i)}{e^k} \qquad (i \neq k),$$
$$M_\alpha^\alpha = x_{\underset{(\alpha)}{\alpha}} \underset{(\alpha)}{e^\alpha} - x_{\underset{(n)}{n}} \underset{(n)}{e^n}, \tag{4.20}$$

так что в самом деле орбита имеет размерность n^2-1. В инфинитезимально близкой точке M' $(x+\delta x)$ вместо M_i^k $(i\neq k)$ из (4.20) мы получим векторы

$$M'^k_i = x'_{\underset{(k)}{i}} \underset{(k)}{e^k} + \sum_{j\neq k} x'_{\underset{(j)}{i}} \underset{(j)}{e^k},$$

и для параллельности касательных плоскостей к орбите в точках M и M' необходимо $x'_{\underset{(k)}{i}}=0$ $(i\neq k)$, т.е.

$$\bar{\omega}_i^k = 0 \qquad (i \neq k). \tag{4.21}$$

В таком случае среди (4.19) ненулевыми остаются только $\delta x_{\underset{(i)}{i}}$, так что точка M' тоже имеет вид (4.18), только вместо касательных векторов M_α^α из (4.20) теперь касательными являются

$$M'^\alpha_\alpha = \left(\bar{\omega}_\alpha^\alpha + \sum \bar{\omega}_\beta^\beta\right) x_{\underset{(n)}{n}} \underset{(n)}{e^n} + (\cdots) M_\alpha^\alpha,$$

и для параллельности касательных плоскостей в точках M и M' должно быть

$$\bar{\omega}_\alpha^\alpha + \sum \bar{\omega}_\beta^\beta = 0,$$

т.е.

$$\bar{\omega}_\alpha^\alpha = 0.$$

Это, вместе с (4.21), означает тангенциальную невырожденность орбиты.

Ясно, что доказанное утверждение теоремы 4.7 для $t>n$ вытекает и из утверждения для случая $t=n$ при помощи леммы 3.1. Нетрудно также заметить, что теорему можно обобщить, но этим мы сейчас не будем заниматься.

В применении к решению вопроса существования инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах теоремы 4.5 и 4.7, с использованием леммы 3.1, означают следующее.

Теорема 4.8. *В однородном пространстве существует инвариантная финслерова метрика, если линейная группа изотропии этого пространства является линейным представлением группы SL (n, R) $(n\geqslant 2)$, имеющим вид* (3.1), *где* $\mathfrak{H}_1$ *является либо представлением, описанным в теореме* 4.5, *либо представлением* (4.17) *при* $t \geqslant n$.

5. Некоторые гиперповерхности в $T_p^0(n)$ и $T_0^s(n)$.

Здесь мы укажем несколько конкретных тангенциально невырожденных гиперповерхностей в тензорных пространствах $T_p^0(n)$, $T_0^s(n)$. Конечно, речь идет о гиперповерхностях, *инвариантных* относительно представления (4.2) группы $SL(n, R)$.

Предложение 5.1. *Гиперповерхность*

$$\det \| x_{ij} \| = c,$$

$c=\text{const}$, *в пространстве* $T_2^0(n)$ *тангенциально невырождена.*

Доказательство сводится к проверке условий (2.5), (2.6) предложения 2.3. Особенно удобна такая проверка в диагональной точке $x_{ii} \neq 0$, остальные $x_{ij}=0$.

Следствие 5.2. *В пространстве* $T_{2m}^0(n)$ *тангенциально невырожденной является гиперповерхность*

$$\det \| x_{IK} \| = c,$$

$c=\text{const}$, *где* $I=\{i_1, \ldots, i_m\}$, $K=\{i_{m+1}, \ldots, i_{2m}\}$.

Замечание. Поскольку проверка тангенциальной невырожденности проводится в диагональной точке, то указанные уравнения определяют инвариантные тангенциально невырожденные гиперповерхности также в подпространствах тензоров, обладающих соответствующей симметрией.

Среди более интересных инвариантов в $T_p^0(n)$ $(p \geqslant 2)$ отметим следующие (здесь, в отличие от всего предыдущего изложения, мы пользуемся правилом „суммирования по Эйнштейну"):

1) *гипердетерминант* [5]

$$H=\frac{1}{n!} x_{i_1 \cdots i_{2m}} x_{i'_1 \cdots i'_{2m}} \cdots x_{i_1^{(n-1)} \cdots i_{2m}^{(n-1)}} \varepsilon^{i_1 i'_1 \cdots i_1^{(n-1)}} \cdots \varepsilon^{i_{2m} i'_{2m} \cdots i_{2m}^{(n-1)}},$$

если $p=2m$;

2) *однородное выражение степени* $2n$

$$I = \begin{array}{ll} x_{i_1 i_2 \cdots i_p} & x_{k_1 k_2 \cdots k_p} \\ x_{i'_1 i'_2 \cdots i'_p} & x_{k'_1 k'_2 \cdots k'_p} \varepsilon^{i_1 i'_1 \cdots} \varepsilon^{i_2 \cdots} \cdots \varepsilon^{i_p k'_1 \cdots} \varepsilon^{k_1 k' \cdots} \cdots \varepsilon^{k_p i'_1 \cdots} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{i_1^{(n-1)} i_2^{(n-1)} \cdots i_p^{(n-1)}} & x_{k_1^{(n-1)} k_2^{(n-1)} \cdots k_p^{(n-1)}} \end{array}$$

(в правой стороне суммирование „параллельно главной диагонали"; хотя x-сы написаны в двух столбцах, мы понимаем это как их произведение). Напримеер, в случае $n=2$ I таково:

$$I = \begin{array}{l} x_{i_1 i_2 \cdots i_p} x_{k_1 k_2 \cdots k_p} \\ x_{i'_1 i'_2 \cdots i'_p} x_{k'_1 k'_2 \cdots k'_p} \end{array} \varepsilon^{i_1 i'_2} \varepsilon^{i_2 i'_3} \cdots \varepsilon^{i_{p-1} i'_p} \varepsilon^{i_p k'_1} \varepsilon^{k_1 k'_2} \cdots \varepsilon^{k_p i'_1}.$$

При $p \geqslant n$ (независимо от четности p) выражение I в точке $x_{ii \cdots i} \neq 0$, остальные $x_{i_1 \cdots i_p}=0$, отлично от нуля.

Доказательство тангенциальной невырожденности гиперповерхностей $H=\text{const}$ или $I=\text{const}$ в общем случае затруднительно. Но при небольших n это можно сделать.

Аналогичные инварианты очевидны для пространства $T_0^s(n)$.

Из следствия 4.6 и предложения 5.1 вытекает, что *при* $p+s \geqslant 2$ *в пространстве* $T_p^s(n)$ *всегда существует тангенциально невырожденная гиперповерхность, инвариантная относительно представления* (4.2) *группы* $SL(n, R)$, *а в однородном пространстве с такой линейной группой изотропии существует инвариантная финслерова метрика.* Это утверждение можно дополнять в том смысле, что оно имеет место и для представления вида (4.2) группы $SL(n, R)$ в случае тензоров, обладающих подходящей симметрией.

Из этого, а также из теорем 4.5 и 4.7, с использованием леммы из работы [3], получается

Теорема 5.3. *Инвариантные финслеровые метрики существуют во всех таких однородных пространствах, линейная группа изотропии которых вполне приводима*

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{G}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{G}_q \end{matrix} \right\|,$$

а части $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_q$ *являются тензорными представлениями* (4.2) *групп* $SL(n_1, R), \ldots, SL(n_q, R)$ *с* $p_1+s_1 \geqslant 2, \ldots, p_q+s_q \geqslant 2$, *или линейными представлениями унимодулярных групп, имеющими вид* (3.1) *с* $\mathfrak{H}_1$, *описанным в теоремах* 4.5 *или* 4.7 (*в последней при* $t \geqslant n$). *Представление* (4.2) *можно брать даже в подпространстве симметрических тензоров пространства* $T_p^s(n)$.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
6.III.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lichnérowicz, Géométrie des groupes de transformations, Paris, 1958.
2. А. Ионушаускас, О существовании инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах, Лит. мат. сб., V, № 1 (1965), 45–55.
3. А. Ионушаускас, Существование инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах с линейной группой изотропии тензорного типа, Лит. мат. сб., VI, № 1 (1966), 51–57.
4. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. матем. общества, 2 (1953), 275–382.
5. Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их приложения, ФМ, М., 1960.

INVARIANTIŠKŲ FINSLERIO METRIKŲ EGZISTENCIJA HOMOGENINĖSE ERDVĖSE SU TENZORINIO TIPO TIESINE IZOTROPIJOS GRUPE. II

A. JONUŠAUSKAS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamos tokios tiesinės izotropijos grupės, kurios yra unimoduliarios grupės $SL(n, R)$ reprezentacijos, turinčios pavidalą (3.1). Svarbiausias rezultatas: invariantiškos Finslerio metrikos egzistuoja, kai homogeninės erdvės tiesinės izotropijos grupės (3.1) dalis $\mathfrak{H}_1$ yra grupės $SL(n, R)$ reprezentacija (4.2) ($p+s \geqslant 3$) arba (4.17) ($t \geqslant n$).

EXISTENZ VON INVARIANTEN FINSLERSCHEN METRIKEN IN HOMOGENEN RÄUMEN MIT LINEARER ISOTROPIEGRUPPE TENSORISCHEN TYPUS, II

A. JONUŠAUSKAS

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit betrachtet man solche linearen Isotropiegruppen, die Darstellungen von Gestalt (3.1) der unimodulären Gruppe $SL(n, R)$ sind. Das wichtigste Resultat: invarianten Finslerschen Metriken existieren, wenn der Teil $\mathfrak{H}_1$ der linearen Isotropiegruppe (3.1) des homogenen Raumes die Darstellung (4.2) ($p+s \geqslant 3$) oder (4.17) ($t \geqslant n$) der Gruppe $SL(n, R)$ ist.