LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ

В. Я. СТЕЦЕНКО, Д. М. ЧУРЧИЧ

1. В [1–3] изучены общие свойства линейных положительных операторов. В частности, в этих работах установлены интересные спектральные свойства таких операторов, во многом аналогичные свойствам неотрицательных неразложимых матриц, выраженным теоремой Фробениуса-Перрона. В связи с этим приобретают интерес различные признаки неразложимости конкретных операторов (линейных интегральных операторов, бесконечных матриц и других). В работе приводится новый признак неразложимости бесконечной матрицы и различные признаки неразложимости операторов-матриц. Эти признаки применяются к изучению свойств различных классов уравнений.

В статье используется терминология и обозначения из [4–5].

2. Пусть E – вещественное банахово пространство, полуупорядоченное конусом K, A – линейный оператор, $A(E \to E)$, $AK \subset K$. Предполагается, что K содержит квазивнутренние элементы [3]. Оператор A будем называть *неразложимым*, если из справедливости для элемента $x_0 \in K$, $x_0 \neq \Theta$ при некотором $\alpha > 0$ неравенства $x_0 \geqslant \alpha A x_0$ следует, что x_0 – квазивнутренний элемент K [3].

3. Пусть $E = l_p$ $(p > 1)$ и K конус неотрицательных последовательностей из l_p. Пусть бесконечная неотрицательная матрица

$$A = (a_{ij}) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

удовлетворяет условию Гильберта

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{q} \Big)^{p/q} < +\infty, \tag{2}$$

где $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда, очевидно, матрица (1) порождает линейный вполне непрерывный положительный оператор, действующий в l_p. Имеет место следующий критерий неразложимости оператора (1).

Теорема 1. *Для неразложимости оператора* (1) *необходимо и достаточно, чтобы при любом разбиении последовательности* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *на две дополнительные (без общих элементов) подпоследовательности* $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots, k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ *существовали такие* p_0 *и* q_0, *для которых выполняется неравенство*

$$a_{i_{p_0} k_{q_0}} > 0 \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Допустим противное-допустим, что для некоторых дополнительных подпоследовательностей (без общих элементов) (A_1), (A_2):

$$i_1^0, \quad i_2^0, \ \ldots, \ i_n^0, \ \ldots \tag{A_1}$$

$$k_1^0, \quad k_2^0, \ \ldots, \ k_n^0, \ \ldots \tag{A_2}$$

последовательности натуральных чисел выполняются равенства

$$a_{i_p^0 k_q^0}=0 \qquad (p,\ q=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Пусть $x_0=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\xi_n,\ \ldots)$, где

$$\xi_n=\begin{cases} 0, & \text{если}\quad n\in(A_1)\\ \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}^q\right)^{1/q}, & \text{если}\quad n\in(A_2),\end{cases} \tag{5}$$

Так как $A\neq\Theta$, то $x_0\neq\Theta$ и, в силу (2), $x_0\in K\subset l_p$. Докажем, что

$$x_0\geqslant\frac{1}{\|x_0\|}Ax_0. \tag{6}$$

Последнее будет противоречить неразложимости оператора A, так как x_0 не квазивнутренний элемент K. Обозначим через $(x)_i-i$-ую компоненту вектора x. Имеем для произвольного n в силу (4) и (5)

$$(Ax_0)_{i_n^0}=\sum_{m=1}^{\infty}a_{i_n^0 m}\xi_m=\sum_{m=1}^{\infty}a_{i_n^0 k_m^0}\xi_{k_m^0}=0,$$

и тем самым

$$(x_0)_{i_n^0}=\frac{1}{\|x_0\|}(Ax_0)_{i_n^0}. \tag{7}$$

В силу неравенства Гельдера для $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$(Ax_0)_{k_n^0}=\sum_{m=1}^{\infty}a_{k_n m}\xi_m\leqslant\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{k_n^0 m}\right)^{1/q}\|x_0\|=(x_0)_{k_n^0}\|x_0\|,$$

откуда

$$(x_0)_{k_n^0}\geqslant\frac{1}{\|x_0\|}(Ax_0)_{k_n^0}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует (6). Необходимость доказана.

Достаточность. Снова предположим противное: пусть для некоторого $x^*=(\xi_1^*,\ \xi_2^*,\ \ldots,\ \xi_n^*,\ \ldots)$, $x^*>\Theta$, не являющегося квазивнутренним элементом конуса K, выполняется неравенство: $x^*\geqslant\alpha Ax^*$, $\alpha>0$. Обозначим через $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n,\ \ldots$ номера тех компонент вектора x^*, которые равны нулю. В силу предположения это множество не пусто. Пусть $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ \ldots$ дополнительное до $1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ множество. Пусть для определенности $a_{i_{p_0}k_{q_0}}>0$. Имеем

$$0=\xi_{i_{p_0}}^*\geqslant\alpha\sum_{m=1}^{\infty}a_{i_{p_0}m}\xi_m\geqslant\alpha a_{i_{p_0}k_{q_0}}\xi_{k_{q_0}}>0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Теорема доказана.

Укажем одно приложение доказанной теоремы.

Теорема 2. *Пусть матрица* (1) *удовлетворяет условию Гильберта* (2) *и пусть для любой пары индексов* $(p,\ q)$ *найдется такое* $N=N(p,\ q)$, *что*

$$a_{pq}^{(N)}>0, \tag{9}$$

где через $a_{pq}^{(N)}$ $(p,\ q=1,\ 2,\ \ldots)$ *обозначены элементы матрицы* A^N.

Тогда система уравнений

$$\lambda\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots) \tag{10}$$

имеет единственное нормированное решение $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)$, *причем* $x \in l_p$, $x > \Theta$. *Соответствующее ему положительное собственное значение простое и равно* $\rho(A)$. *Аналогичное утверждение* (с заменой p на q) *верно и для сопряженной системы*

$$\lambda\eta_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\eta_k = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Для доказательства установим два вспомагательных утверждения. Ниже через $\rho(A)$ обозначается спектральный радиус оператора A.

Лемма 1. *Из* (9) *следует, что* $\rho(A) > 0$.

Доказательство. Из (9) следует, что для $p=q=1$ найдется N, что $a_{11}^{(N)} > 0$. Положим $x_0=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, очевидно, $A^N x_0 \geqslant a_{11}^{(N)} x_0$. Но тогда на основании теоремы 6.2 [4] выполняется неравенство

$$\rho(A) \geqslant \sqrt[N]{a_{11}^{(N)}}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 2 *оператор* A *неразложим.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in K$, $x_0 \neq \Theta$ и

$$x_0 \geqslant \alpha A x_0 \qquad (\alpha > 0). \tag{11}$$

Очевидно, для некоторого p_0 $\xi_{p_0} > 0$. Возьмем произвольное $n_0 \neq p_0$. По условию для некоторого $N=N(n_0,\ p_0)$ $a_{n_0 p_0}^{(N)} > 0$. Из (11) следует $x_0 \geqslant \alpha^N A^N x_0$, откуда $\xi_{n_0} \geqslant \alpha^N \sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0 m}^{(N)}\xi_m \geqslant a_{n_0 p_0}^{(N)}\xi_{p_0} > 0$. Итак, $\xi_{n_0} > 0$ и ввиду произвольности n_0 доказано, что x_0 — квазивнутренний элемент K.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Систему уравнений (10) можно переписать в виде следующего операторного уравнения в пространстве $l_p: \lambda x = Ax$. В силу леммы 1 $\rho(A) > 0$ и в силу леммы 2 A неразложим. Ввиду неравенства Гильберта оператор A действует в l_p и вполне непрерывен. Поэтому на основании теоремы 6.2 Крейна-Рутмана [4] оператор A имеет в K собственный вектор x^*, отвечающий собственному значению $\rho(A): Ax^* = \rho(A)x^*$ $(x^* \in K, x^* \neq \Theta)$, откуда следует, что x^* квазивнутренний элемент K. Из неразложимости оператора A в силу результатов статьи [3] следует, что $\rho(A)$ простое собственное значение оператора A. Доказательство для сопряженной системы вытекает из неразложимости сопряженной матрицы A^*.

Заметим, что в [4] было установлено следующее достаточное условие единственности нормированного положительного решения системы (10) в l_2: для любых p, q найдется такое натуральное $N=N(p,\ q)$, что для всех $n \geqslant N(p,\ q)$ выполняется неравенство: $a_{pq}^{(n)} > 0$. Легко видеть, что условие (9) менее жесткое. Вместе с тем утверждение теоремы 2 более сильное — не только доказана единственность нормированного решения, но и простота соответствующего ему собственного значения.

4. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — банаховы пространства с конусами K_1, $K_2, \ldots, K_n$ соответственно, $\tilde{E}$ — прямая сумма этих пространств: $\tilde{E}=E_1\oplus\oplus E_2\oplus\ldots\oplus E_n$, $\tilde{K}=K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_n$. Положим $\|\tilde{x}\|=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_{E_i}\left(\tilde{x}\in\tilde{E},\ \tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)\right)$. Тогда $\tilde{E}$ банахово пространство, $\tilde{K}$ — конус в нем. Пусть A_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ линейные операторы, действующие из E_j в E_i. Оператор A_{ij} назовем *положительным*, если $A_{ij}K_j\subset K_i$. Ниже предполагается, что операторы A_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ положительны, а все конусы K_i телесны. Это обеспечивает телесность конуса $\tilde{K}$. Заметим, что квазивнутренними элементами телесного конуса $\tilde{K}$ являются лишь внутренние элементы K. Введем в рассмотрение оператор-матрицу $\tilde{A}=(A_{ij})$, A действует в $\tilde{E}$ и положителен. Ниже приводятся достаточные условия неразложимости оператора $\tilde{A}$.

Введем следующие определения. Совокупность операторов $A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\ldots\ldots A_{i_{k-1}i_k}A_{i_ki_1}$ назовем *дорожкой* матрицы $\tilde{A}$ длины k [6], если $i_{m-1}\neq i_m$, $i_k\neq i_1$ $(m=2, 3, \ldots, k)$. Дорожку будем называть *полной дорожкой*, если ее длина не меньше $n: k\geqslant n$ и если среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k$ содержатся по крайней мере один раз числа $1, 2, \ldots, n$. Оператор $A_{i_0j_0}$ будем называть *сильно положительным*, если он преобразует каждый ненулевой элемент конуса K_{j_0} во внутренний элемент конуса K_{i_0}.

Теорема 3. *Для неразложимости оператора-матрицы $\tilde{A}$ доистаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *$\tilde{A}$ имеет полную дорожку и при этом составляющие дорожку операторы $A_{i_{m-1}i_m}$ переводят ненулевые элементы конуса K_{i_m} в ненулевые элементы конуса $K_{i_{m-1}}$ и внутренние элементы K_{i_m} во внутренние элементы;*

2) *хотя бы один из операторов A_{ii} $(i=1, 2, \ldots, n)$ неразложим.*

Доказательство. Пусть $\tilde{x}\geqslant\alpha\tilde{A}\tilde{x}$ $(\alpha>0)$, $\tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)>\Theta$. Пусть для определенности $x_k>\Theta$ и $k=i_p$. Тогда $x_{i_{p-1}}\geqslant\alpha\sum_{m=1}^{n}A_{i_{p-1}m}x_m\geqslant\alpha A_{i_{p-1}i_p}x_{i_p}>$ $>\Theta$. Из последнего неравенства аналогично следуют неравенства $x_{i_{p-2}}>\Theta,\ldots$, $x_{i_1}>\Theta$. Поэтому $x_{i_n}\geqslant\alpha\sum_{m=1}^{n}A_{i_nm}x_m\geqslant\alpha A_{i_ni_1}x_{i_1}>\Theta$ и, следовательно, $x_{i_{n-1}}>\Theta$, $\ldots$, $x_{i_{p+1}}>\Theta$. Таким образом, все компоненты вектора $\tilde{x}$ отличны от нуля. Предположим для определенности, что неразложим оператор $A_{i_qi_q}$. Тогда из неравенства $x_{i_q}\geqslant\alpha\sum_{m=1}^{n}A_{i_qm}x_m\geqslant\alpha A_{i_qi_q}x_{i_q}$ следует, что x_{i_q} внутренний элемент K_{i_q}. Используя этот факт и условие 1, рассуждениями, аналогичными вышепроведенным, легко показать, что $\tilde{x}$ — внутренний элемент $\tilde{K}$.

Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда все пространства E_i совпадают, условие 1 теоремы 3 выполняется, если $\tilde{A}$ имеет полную дорожку, составленную из неразложимых операторов.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 1 теоремы 3 и хотя бы один элемент матрицы $|\tilde{A}|$ является сильно положителным оператором. Тогда оператор $\tilde{A}$ неразложим.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично предыдущему случаю: в силу условия 1, все компоненты ненулевого вектора $\tilde{x}>\Theta$, удовлетворяющего неравенству $\tilde{x}\geqslant\alpha\tilde{A}\tilde{x}$ $(\alpha>0)$ являются ненулевыми элементами соответствующих конусов K_i, поэтому, используя сильную положительность одного из элементов $\tilde{A}$ заключаем, что одна из компонент вектора $\tilde{x}$ — внут ренний элемент соответствующего конуса. Заканчивается доказательство как и в теореме 3.

Рассмотрим пример, показывающий существенность условий теорем 3, 4. Пусть $E=E^4=E^2\oplus E^2$, $A_{11}=A_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_{12}=A_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Матрица $\tilde{A}=$ $=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$ имеет дорожку A_{12} A_{21}, удовлетворяющую условию 1 теоремы 3. Вместе с тем $\tilde{A}$ разложима.

5. Существует определенный класс положительных операторов, не являющихся неразложимыми и тем не менее обладающих рядом важных свойств неразложимых операторов. Это послужило основанием для выделения класса так называемых u_0*—неразложимых* операторов.

Пусть E—банахово пространство с конусом K, $A\,(E\to E)$ и $AK\subset K$. Оператор A назовем u_0*—неразложимым*, если из соотношений $\alpha Ax\leqslant x\leqslant\beta Ax$, $(\alpha,\ \beta>0,\ x>\Theta)$ вытекает, что $\alpha_1u_0\leqslant x\leqslant\beta_1u_0$ для некоторых α_1, $\beta_1>0$.

Примеры u_0 — неразложимых операторов представляют например, функции Грина некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Приведем один признак $\tilde{u}_0$ — неразложимости оператора-матрицы $\tilde{A}$, где $\tilde{u}_0$ — некоторый фиксированный элемент $\tilde{K}$.

Теорема 5. *Пусть оператор-матрица $\tilde{A}$ имеет дорожку длины $n-1$: $A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\ \ldots\ A_{i_{n-1}i_1}$, где $i_k\neq i_m$ при $k\neq m$, причем операторы, составляющие дорожку удовлетворяют условию 1 теоремы 3. Пусть по крайней мере один из операторов A_{ij} $(i,\ j\neq i_n)$ сильно положителен, а один из операторов $A_{i_ni_1},\ \ldots\ ,\ A_{i_ni_{n-1}}$ переводит каждый внутренний элемент соответствующего конуса во внутренний элемент соответствующего конуса. Наконец, пусть $A_{i_ni_n}=\Theta$.*

Тогда оператор $\tilde{A}$ $\tilde{u}_0$ — неразложим, где $\tilde{u}_0$ произвольный внутренний элемент $\tilde{K}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Действительно, пусть $\tilde{x}\in\tilde{K}$, $\tilde{x}\neq\Theta$ и $\alpha_1\tilde{A}\tilde{x}\leqslant\tilde{x}\leqslant\alpha_2\tilde{A}\tilde{x}$. Так как по крайней мере одна компонента вектора $\tilde{x}$ отлична от Θ, то используя последние неравенства и условия теоремы легко показать, что отлична от нуля одна из компонент $x_{i_k}(1\leqslant$ $\leqslant k\leqslant n-1)$. Далее рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 3, легко показать, что все компоненты $x_{i_k}(1\leqslant k\leqslant n-1)$ являются внутренними элементами соответствующих конусов K_{i_k}. Остается заметить, что

$x_{i_n} \geqslant \alpha_1 \sum_{m=1}^{n} A_{i_n m} x_{i_m}$ и поэтому x_{i_n} также внутренний элемент конуса K_{i_n}.

Теорема доказана.

6. В заключение приведем одно простое следствие теорем пункта 4. Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений

$$\lambda x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(t, s) x_j(s) ds \tag{12}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ядра $K_{ij}(t, s)$ предполагаются непрерывными по $(t, s) \in [a, b] \times [a. b]$ и неотрицательными. В этих условиях оператор-матрица $\tilde{A} = (A_{ij})$, где операторы A_{ij} определены равенствами $A_{ij}x(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$, действует как вполне непрерывный положительный оператор в пространстве $\tilde{E}$ непрерывных вектор-функций: $\tilde{E} = C[a, b] \oplus \ldots \oplus C[a, b]$, полуупорядоченном конусом $\tilde{K}$ неотрицательных вектор-функций.

Определение. Неотрицательную функцию $K(t, s)$, определенную для всех $t, s \in [a, b]$ назовем *разложимой* в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$, если для некоторых множеств $F_1, F_2 \subset [a, b]$, таких что $F_1 \cup F_2 = [a, b]$ и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ выполняется равенство $K(t, s) \equiv 0$ для $t \in F_1$, $s \in F_2$. В противном случае функция $K(t, s)$ называется *неразложимой*.

Теорема 6. *Пусть матрица* $\left(K_{ij}(t, s)\right)$ *имеет полную дорожку, состоящую целиком из неразложимых ядер. Пусть выполнено одно из двух условий:*

1) *одно из ядер* $K_{ii}(t, s)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *неразложимо;*

2) *одно из ядер* $K_{ij}(t, s)$ *положительно.*

Тогда

а) *система уравнений* (12) *имеет при некотором* $\lambda = \lambda^* > 0$ *единственное* (с точностью до нормы) *непрерывное положительное решение* $\bar{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right)$,

б) *собственное значение* λ^* *является простым и равно спектральному радиусу оператора* $\tilde{A}$.

Воронеж, Белград

Поступило в редакцию 5.IV.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. H. H. Schaefer, Spektraleigenschaften positiver linearer Operatoren, Math. Z 82 (1963), 304—313.
2. С. Н. Мухтаров, В. Я. Стеценко, О некоторых свойствах уравнений с неразложимыми линейными операторами, ДАН Тадж. ССР 8, № 2(1965), 7—10.
3. В. Я. Стеценко, Критерии неразложимости линейных операторов, УМН, XXI, вып. 5(1966), 265—267.
4. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН 3, вып. I (1948), 3—98.

5. М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962.
6. М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М, „Наука“, 1966.

KAI KURIŲ OPERATORIŲ NEIŠSKAIDOMUMO POŽYMIAI

V. STECENKA, D. ČIURČIČIUS

(Reziumė)

Straipsnyje įrodomos begalinės eilės matricų erdvėje l_p ir operatorių-matricų Banacho erdvėje neišskaidomumo būtinos ir pakankamos sąlygos.

SOME CONDITIONS OF THE NON-REDUCIBLE OPERATORS

V. STECENKO, D. CURCIC

(Summary)

In this paper the necessary and sufficient condition of the non-reducible infinite matrix in the space l_p and operator-matrix in Banach space are proved.