LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. В. СТРЫГИН

В настоящей работе принцип усреднения Боголюбова-Крылова [1] переносится на многомерные дифференциальные уравнения. Доказательство соответствующего утверждения основано на одной теореме о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от параметра.

1. Основные понятия и обозначения. Пусть E_x и E_y – два конечномерных пространства; нормы элементов $x \in E_x$ и $y \in E_y$ мы будем обозначать через $|x|$ и $|y|$. Через K мы будем обозначать некоторый конус в пространстве E_x (замкнутое, выпуклое множество, инвариантное относительно умножения на $\lambda \geqslant 0$, причем, если $x \in K$, то $-x \in K$). Символ $x_1 \geqslant x_2$ означает, что $x_1 - x_2 \in K$.

Пусть D – некоторая ограниченная область в пространстве E_y, а $G = K \times D$ – топологическое произведение K на D. Пусть при любых $(x, y) \in G$ $f(x, y)$ – линейный оператор, действующий из пространства E_x в пространство E_y.

Будем говорить, что оператор-функция $f(x, y)$ допускает *усреднение* $\bar{f}(y)$ *по конусу* K, если при каждом $y \in D$ $\bar{f}(y)$ является линейным оператором, действующим из E_x в E_y, причем при любом $k \in K$ справедливо равенство

$$\bar{f}(y)\,k = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{\Theta}^{Rk} f(x, y)\, dx. \tag{1}$$

(Последний интеграл вычисляется по отрезку, соединяющему точки Θ и Rk.) Пусть $T \in K$. Через $[\Theta, T]$ мы обозначаем конусный отрезок $\Theta \leqslant x \leqslant T$, т.е. множество точек x из конуса K для которых $T - x \in K$.

Рассматриваются две задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon f(x, y), \quad \varepsilon > 0, \quad \Theta \leqslant x \leqslant \frac{T}{\varepsilon};$$
$$y(\Theta) = y_0; \tag{2}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \bar{f}(y), \quad \varepsilon > 0, \quad \Theta \leqslant x \leqslant \frac{T}{\varepsilon}:$$
$$y(\Theta) = y_0. \tag{3}$$

Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях при $\varepsilon \to 0$ разность решений этих задач стремится к Θ на конусном отрезке $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$.

Дадим еще два определения.

Будем говорить, что оператор-функция $f(x, y)$ *потенциальна по* x, если

$$\int_{\gamma} f(x, y)\, dx = \Theta, \tag{4}$$

где γ — произвольный замкнутый контур в конусе K. Пусть, наконец, Λ — некоторое множество точек, $\lambda_0 \in \Lambda$ и является точкой сгущения для Λ. Рассмотрим семейство оператор-функций $F(x, y, \lambda)$ $\big((x, y) \in G,\ \lambda \in \Lambda\big)$, действующих из пространства E_x в пространство E_y.

Говорят, что $F(x, y, \lambda)$ *интегрально непрерывна по x при* $\lambda \to \lambda_0$, если при любом $x \in [\Theta, T]$ $(T \in K)$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{\Theta}^{x} F(s, y, \lambda)\, ds = \int_{\Theta}^{x} F(s, y, \lambda_0)\, ds. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что семейство $F(x, y, \varepsilon)$, определенное равенством

$$F(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, y\right), & \Theta < \varepsilon < \bar{\varepsilon} \\ \bar{f}(y), & \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{6}$$

интегрально непрерывно по x при $\varepsilon \to 0$, если $f(x, y)$ допускает усреднение по конусу K.

Принцип усреднения. Установим сначала одну теорему о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от параметра. С помощью этой теоремы будет получен помянутый выше принцип.

Теорема 1. *Предположим, что семейство оператор-функций $f(x, y, \lambda)$, $(x, y) \in G$, $\lambda \in \Lambda$ обладает следующими свойствами:*

1) *$f(x, y, \lambda)$ потенциальна по x при фиксированных $y \in D$, $\lambda \in \Lambda$;*

2) *$f(x, y, \lambda)$ при фиксированном $\lambda \in \Lambda$ непрерывна по совокупности переменных;*

3) *семейство $f(x, y, \lambda)$ интегрально непрерывно по x при $\lambda \to \lambda_0$;*

4) *$f(x, y, \lambda)$ равномерно ограничена вместе со своей непрерывной производной $f_y(x, y, \lambda)$, причем для любых g, $h \in E_x$ справедливо тождество*

$$f_y(x, y, \lambda) f(x, y, \lambda) gh \equiv f_y(x, y, \lambda) f(x, y, \lambda) hg \tag{7}$$

при всех $x \in K$, $y \in D$, $\lambda \in \Lambda$;

5) *при $\lambda = \lambda_0$ задача Коши*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda_0),$$

$$y(\Theta) = y_0 \tag{8}$$

имеет единственное решение $y_{\lambda_0}(x)$, определенное на конусном отрезке $[\Theta, T]$ $(T \in K)$, которое лежит в D вместе с некоторой окрестностью.

Тогда по любому $\eta > 0$ можно указать такое δ, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ решения $y(x, \lambda)$ задачи

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad y(\Theta) = y_0$$

определены при $x \in [\Theta, T]$, причем

$$|y(x, \lambda) - y_{\lambda_0}(x)| < \eta \quad (\Theta \leqslant x \leqslant T).$$

Теорема 1 доказывается следующим образом. Сначала устанавливается

Лемма 1. *Пусть при $\lambda \to \lambda_0$ функции $y(x, \lambda)$ равномерно сходятся к* *некоторой функции* $\varphi(x)$ *на конусном отрезке* $[\Theta, T]$. *Тогда для любого* $x \in [\Theta, T]$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_\Theta^x f[s, y(s, \lambda), \lambda]\,ds = \int_\Theta^x f[s, \varphi(s), \lambda_0]\,ds. \tag{9}$$

Эта лемма доказывается так же, как аналогичное утверждение в работе [2].

Далее, используя условия 1, 2, 4, можно показать, что для всех точек z, лежащих в достаточно малой окрестности решения $y_{\lambda_0}(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant T)$, справедлива локальная теорема существования на некотором шаре $|x - x_0| \leqslant r$ для любой задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad (\lambda \in \Lambda),$$

$$y(x_0) = z, \quad (\Theta \leqslant x_0 \leqslant T).$$

Рассмотрим решения $y(x, \lambda)$ задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda),$$

$$y(\Theta) = y_0$$

на пересечении K_r конуса K с шаром $T(\Theta, r)$ радиуса r и центром в точке Θ. Покажем, что при $\lambda \to \lambda_0 : y(x, \lambda) \to y_{\lambda_0}(x)$.

В предположении противного найдутся такие $\varepsilon > 0$ и последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$ и $x_n \in K_r$, что

$$|y(x_n, \lambda_n) - y_{\lambda_0}(x_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Из равномерной ограниченности $f(x, y, \lambda)$ следует компактность множества $y(x, \lambda_n)$ $(x \in K_r)$; поэтому можно считать, что $y(x, \lambda_n) \to \varphi(x)$. Очевидно, можно считать, что $x_n \to \xi \in K$.

Из тождеств

$$y(x, \lambda_n) \equiv y_0 + \int_\Theta^x f[s, y(s, \lambda_n), \lambda_n]\,ds, \quad x \in K_r$$

следует, что $\varphi(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_\Theta^x f[s, \varphi(s), \lambda_0]\,ds, \quad x \in K_r.$$

Нетрудно проверить, что из единственности решений задачи Коши (8) следует, что $y_{\lambda_0}(x) = \varphi(x)$ [3].

Оператор-функции $f[s, y(s, \lambda_n), \lambda_n]$ являются производными от вектор-функции $y(s, \lambda_n)$. Поэтому они потенциальны и, следовательно, интеграл от $f[s, y(s, \lambda_n), \lambda_n]$ на отрезке $[\Theta, x]$ не зависит от выбора пути интегрирования и его можно представить в виде суммы двух интегралов по прямолинейным отрезкам $[\Theta, \xi]$, $[\xi, x_n]$.

Из вышесказанного и того, что $|f(x, y, \lambda)| < M$, вытекают неравенства

$$|y(x_n, \lambda_n) - y_{\lambda_0}(x_n)| = \left|\int_\Theta^{x_n} \{f[s, y(s, \lambda_n), \lambda_n] - f[s, y_{\lambda_0}(s), \lambda_0]\}\,ds\right| \leqslant \left|\int_\Theta^{\xi} \{f[s, y \times\right.$$

$$\times (s, \lambda_n), \lambda_n] - f[s, \varphi(s), \lambda_0]\}\,ds + \int_\xi^{x_n} \{f[s, y(s, \lambda_n), \lambda_n] - f[s, \varphi(s), \lambda_0]\}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M|x_n - \xi| + \left|\int_\Theta^\xi \{f[s, y(s, \lambda_n), \lambda_n] - f[s, \varphi(s), \lambda_0]\}\,ds\right|. \tag{11}$$

Из соотношения (9) и того, что $x_n \to \xi$, следует противоречивость неравенств (10) и (11).

Таким образом, на множестве $K_r = K \cap T(\Theta, r)$ $y(x, \lambda) \to y_{\lambda_0}(x)$ при $\lambda \to \lambda_0$. Легко показать, что при малых $|\lambda - \lambda_0|$ любое решение $y(x, \lambda)$ определено на $K_{2r} = K \cap T(\Theta, 2r)$. Подобными рассуждениями мы получаем, что на K_{2r} $y(x, \lambda) \to$ $\to y_{\lambda_0}(x)$ при $\lambda \to \lambda_0$, и т.д.

Теорема доказана.

В задачах (2) и (3) сделаем замену переменной $x\varepsilon = z$. Получим следующие задачи:

$$\frac{dy}{dz} = f\left(\frac{z}{\varepsilon}, y\right), \quad \delta > 0, \quad \Theta \leqslant z \leqslant T,$$
$$y(\Theta) = y_0 \tag{12}$$

и

$$\frac{dy}{dz} = \bar{f}(y), \quad \Theta \leqslant z \leqslant T,$$
$$y(\Theta) = y_0. \tag{13}$$

Из теоремы 1 и интегральной непрерывности семейства (6) при $\varepsilon \to 0$ получаем следующую теорему.

Теорема 2. (*принцип усреднения*). *Пусть оператор-функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $(x, y) \in G$ вместе со своей производной $f_y(x, y)$. Пусть $f(x, y)$ и $f_y(x, y)$ равномерно ограничены и $f(x, y)$ имеет усреднение $\bar{f}(y)$. Предположим, что $\bar{f}_y(y)$ также равномерно непрерывна. Пусть для всех g, $h \in E_x$ справедливы тождества*

$$f_y(x, y) f(x, y) gh \equiv f_y(x, y) f(x, y) hg$$

и

$$\bar{f}_y(y) \bar{f}(y) gh \equiv \bar{f}_y(y) \bar{f}(y) hg$$

при любых $y \in D$, $x \in K$.

Пусть, наконец, при $\varepsilon = 1$ задача (12) имеет единственное решение $\bar{y}(z)$, определенное на $[\Theta, T]$ и лежащее внутри D.

Тогда по любому $\eta > 0$ можно указать такое ε_0, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решения $y(x, \varepsilon)$ задачи (2) определены на $\left[\Theta, \frac{T}{\varepsilon}\right]$, причем

$$|y(x, \varepsilon) - \bar{y}(\varepsilon x)| < \eta \qquad \left(\Theta \leqslant x \leqslant \frac{T}{\varepsilon}\right).$$

В заключение отметим, что если оператор-функция $f(x, y)$ почти-периодична по x, то она имеет усреднение $\bar{f}(y)$ по любому конусу. Это вытекает из того факта, что любая оператор-фунция $\psi(x)$, почти-периодическая по x, может быть с любой точностью приближена на всем E_x тригонометрическим полиномом

$$P(x) = \sum_{j-1}^{k} A_j e^{i\lambda_j(x)},$$

здесь A_j – линейные операторы, λ_j – линейные функционалы. Это замечание позволяет провести следующее рассуждение.

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ – базис в пространстве E. Обозначим через τ произвольный набор $\tau = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$ ($\delta_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, m$). Пусть K_τ – конус, натянутый на элементы $\{\delta_1 e_1, \ldots, \delta_m e_m\}$. Для любого $R > 0$ можно подобрать элементы $T_\tau \in K_\tau$ так, что шар $T_R = \{x / \ |x| \leqslant R\}$ лежит в объединении конусных отрезков $\Theta \leqslant x \leqslant T_\tau$. Применяя теорему 2, мы получаем

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 2 *оператор-функция* $f(x, y)$ *почти – периодична по* x, *то по любому* $\eta > 0$ *и* $R > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *решения* $y(x, \varepsilon)$ *и* $\bar{y}(\varepsilon x)$ *соответственно задачам*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varepsilon f(x, y) \quad \varepsilon > 0, \\ y(\Theta) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varepsilon \bar{f}(y), \\ y(\Theta) = y_0 \end{cases}$$

определены на шаре $|x| \leqslant R / \varepsilon$, *причем выполнены неравенства*

$$|y(x, \varepsilon) - \bar{y}(\varepsilon x)| < \eta \quad (|x| \leqslant R/\varepsilon).$$

Автор благодарит М. А. Красносельского и А. И. Перова за обсуждение работы.

Воронежский Государственный
университет

Поступило в редакцию
25.I.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва, 1963.
2. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, О принципе усреднения в нелинейной механике, УМН, **10**, в. 3, 1955.
3. I. S. Zouhivaare, Ueber, die, Differentialgleichung erster Ordinung in normierten linearen Raeumen, Circolo mat. Palermo, **10**, N I, 1961.
4. В. В. Стрыгин, Полная разрешимость многомерных дифференциальных уравнений с потенциальной правой частью, ДУ, (в печати).

VIDURKIO RADIMO PIRMOS EILĖS DAUGIAMATĖMS DIFERENCIALINĖMS LYGTIMS PRINCIPAS

V. STRYGINAS

(Reziumė)

Šiame darbe gerai žinomas Bogoliubovo—Krylovo vidurkio radimo principas įrodomas daugiamatėms diferencialinėms lygtims. Principo įrodymas pagrįstas teorema apie diferencialinės lygties sprendimų tolygią priklausomybę nuo parametro, kuri taip pat įrodoma šiame straipsnyje.

THE PRINCIPLE OF AVERAGING FOR MULTI-DIMENTIONAL DIFFERENTIAL EQUANTIONS OF THE FIRST ORDER

V. STRYGIN

(Summary)

In present paper the well-known method of averaging by Bogolyobov—Krylov is transferred to multidimentional differential equations of the first order. The proof of the principle is based on the theorem about the continious dependance of the solutions of the differential equation upon the parameter.