LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 4, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 4, 1967

НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. ЯСИЛИОНИС

В первой части статьи теорема о седловых точках переносится на сложные (выпуклые) задачи математического программирования. Во второй – полностью решается одна сложная задача математического программирования, точнее, дается способ нахождения всех равновесных решений.

1. Рассмотрим сложную задачу математического программирования

$$\min F^j(x); \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

при условиях

$$f^j_i(x)\leqslant 0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_j, \qquad x^j\in X_j, \tag{1}$$

где $F^j(x)=F^j(x^1,\ \ldots,x^j,\ \ldots,x^n)$, $f^j_i(x)=f^j_i(x^1,\ \ldots,x^j,\ \ldots,x^n)$ $(i=1,2,\ \ldots,m_j,$ $j=1,2,\ \ldots,n)$ – скалярные функции от $x=(x^1,\ \ldots,x^j,\ \ldots,x^n)$; x^j $(j=1,2,\ \ldots,n)$ – s_j – мерные векторы, а X_j $(j=1,2,\ \ldots,n)$ – множество в E_{s_j}.

Введем некоторые обозначения

$$\begin{aligned}
&X=X_1\times\cdots\times X_j\times\cdots\times X_n,\\
&X(j)=X_1\times\cdots\times X_{j-1}\times X_{j+1}\times\cdots\times X_n,\\
&\tilde{x}\,||\,x^j=(\tilde{x}^1,\ \ldots,\ \tilde{x}^{j-1},\ x^j,\ \tilde{x}^{j+1},\ \ldots,\ \tilde{x}^n),\\
&x(j)=(x^1,\ \ldots,\ x^{j-1},\ x^{j+1},\ \ldots,\ x^n),\\
&P[\tilde{x}(j)]=\{x^j\,|\,f^j_i(\tilde{x}\,||\,x^j)\leqslant 0,\quad x^j\in X_j,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_j\},\\
&\varphi^j(\tilde{x};\ x^j,\ u^j)=F^j(\tilde{x}\,||\,x^j)+\sum_{i=1}^{m_j}u^j_i f^j_i(\tilde{x}\,||\,x^j).
\end{aligned} \tag{2}$$

Равновесным решением задачи (1) называется (см. [1]) система векторов $\bar{x}=(\bar{x}^1,\ \ldots,\bar{x}^j,\ \ldots,\bar{x}^n)$, удовлетворяющая условиям

$$F^j(x)=\min_{x^j\in P[\bar{x}(j)]}F^j(\bar{x}\,||\,x^j),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Для каждого фиксированного вектора x определим обобщенную функцию Лагранжа

$$\varphi(\tilde{x};\ x,\ u)=\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(\tilde{x};\ x^j,\ u^j).$$

Докажем теорему о седловых точках для равновесного решения, аналогичную одной теореме С. Карлина [2].

Теорема 1. *Пусть $F^j(x)$ и $f_i^j(x)$ $(j=1,2, \dots n)$ – выпуклые функции по x_j на выпуклом множестве $x_j \subset E_{j_s}$ для всех $x(j) \in X(j)$ и, кроме того, для любого неотрицательного и неравного тождественно нулю u^j существует $x^j \in X_j$ для всех $x(j) \in X(j)$, что $\sum\limits_{i=1}^{m_j} u_i^j f_i^j(x) > 0$.*

Если $\bar{x}$ является равновесным решением задачи (1), *то существует такое $\bar{u}$, что $(\bar{x}, \bar{u})$ является седловой точкой функции $\varphi(\bar{x}; x, u)$, т.е.*

$$\varphi(\bar{x};\ \bar{x},\ u) \leqslant \varphi(\bar{x};\ \bar{x},\ \bar{u}) \leqslant \varphi(\bar{x};\ x,\ \bar{u}) \tag{4}$$

для всех $x \in X$ и $u \geqq 0$.

Обратно, если $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет (4), *то $\bar{x}$ является равновесным решением* (1).

Доказательство. Сначала покажем, что если $\bar{x}$ равновесное решение, то существует $\bar{u}$, для которого выполняется (4). К каждой частичной задаче

$$\min_{x^j \in P[\bar{x}(j)]} F^j(\bar{x} \,\|\, x^j)$$

в силу условий теоремы применима теорема С. Карлина (см. [2], стр. 236). Согласно этой теореме существует такое $\bar{u}^j$, что $(\bar{x}^j, \bar{u}^j)$ будет седловой точкой функции $\varphi^j(\bar{x}; x^j, u^j)$, т.е.

$$\varphi^j(\bar{x};\ \bar{x}^j,\ u^j) \leqslant \varphi^j(\bar{x};\ \bar{x}^j,\ \bar{u}^j) \leqslant \varphi^j(\bar{x};\ x^j,\ \bar{u}^j), \tag{5}$$

$$j=1,\ 2,\ \dots,\ n$$

для всех $x^j \in X_j$ и $u^j \geqslant 0$.

Из (5) следует, что $(\bar{x}, \bar{u})$, где $\bar{u}=(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^j, \dots, \bar{u}^n)$, является седловой точкой функции $\varphi(\bar{x}, x, u)$ и выполняется (4).

Теперь покажем обратное утверждение. Пусть $(\bar{x}, \bar{u})$ – седловая точка функции Лагранжа $\varphi(\bar{x}, x, u)$. Для того, чтобы убедиться, что $\bar{x}$ является равновесным решением, достаточно показать, что $(\bar{x}^j, \bar{u}^j)$ являются седловыми точками соответствующих функций $\varphi^j(\bar{x}; x^j, u^j)$. В неравенстве (4) в качестве x берем $x=(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{j-1}, x^j, \bar{x}^{j+1}, \dots, \bar{x}^n)$, а в качестве u берем $u=(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^{j-1}, u^j, \bar{u}^{j+1}, \dots, \bar{u}^n)$. Тогда (4) после сокращения превращается в

$$\varphi^j(\bar{x};\ \bar{x}^j,\ u^j) \leqslant \varphi^j(\bar{x};\ \bar{x}^j,\ \bar{u}^j) \leqslant \varphi^j(\bar{x};\ x^j,\ \bar{u}^j)$$

для всех $x^j \in X_j$ и $u^j \geqslant 0$.

Это означает, что $\bar{x}^j$ является решением j-той частичной задачи и, следовательно, $\bar{x}$ – равновесное решение задачи (1).

Аналогично на сложную задачу (1) можно перенести и другие свойства оптимальных решений задач математического программирования. Некоторые из них сформулируем в виде следствий.

Нетрудно убедиться, что для каждого фиксированного $\bar{x}$

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x};\ x,\ u)}{\partial x_l^j} = \frac{\partial \varphi^j(\bar{x};\ x^j,\ u^j)}{\partial x_l^j}, \quad l=1,\ 2,\ \dots,\ s_j;\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n$$

и

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x};\ x,\ u)}{\partial u_k^j} = \frac{\partial \varphi^j(\bar{x};\ x^j,\ u^j)}{\partial u_k^j}, \quad k=1,\ 2,\ \dots,\ m_j;\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Следствие 1. Пусть множество X является положительным ортантом. Для того, чтобы пара векторов $(\bar{x}, \bar{u})$ для непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(\bar{x}; x, u)$ удовлетворяла неравенству (4), необходимо выполнение условий

$$\varphi^j_{x^j}(\bar{x}; \bar{x}^j, \bar{u}^j) = \left[\frac{\partial \varphi^j(\bar{x}; x^j, u^j)}{\partial x^j_l}\right]_{(\bar{x}^j, \bar{u}^j)} \geqslant 0, \quad \left(\varphi^j_{x^j}(\bar{x}; \bar{x}^j, \bar{u}^j), \bar{x}^j\right) = 0 \tag{6}$$

и

$$\varphi^j_{u^j}(\bar{x}; \bar{x}^j, \bar{u}^j) = \left[\frac{\partial \varphi^j(\bar{x}; x^j, u^j)}{\partial u^j_k}\right]_{(\bar{x}^j, \bar{u}^j)} \leqslant 0, \quad \left(\varphi^j_{u^j}(\bar{x}; \bar{x}^j, \bar{u}^j), \bar{u}^j\right) = 0.$$

Если функция $\varphi(\bar{x}; x, u)$ выпукла по x и вогнута по u, то условия (6) являются достаточными.

Доказательство основано на аналогичной теореме С. Карлина (см. [2], стр. 239).

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующий частный результат, вытекающий из теоремы и следствия 1.

Следствие 2. Пусть в сложной задаче (1) $m_1 = \ldots = m_j = \ldots = m_n = 1$ и пусть $F^j(x)$ и $f^j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – выпуклые по x^j для всех $x(j)$ функций имеющие непрерывные первые частные производные (по x^j_l).

Для того, чтобы $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^j, \ldots, \bar{x}^n)$ было равновесным решением, необходимо и достаточно существование таких $\lambda_1 \leqslant 0, \ldots, \lambda_j \leqslant 0, \ldots, \lambda_n \leqslant 0$, что

$$F^j_{x^j}(\bar{x}) = \lambda_j f^j_{x^j}(\bar{x}), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

причем $\lambda_j < 0$ тогда и только тогда, когда

$$F^j_{x^j}(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{и} \quad f^j(\bar{x}) \neq 0.$$

Доказательство с небольшим изменением проводится аналогично доказательству одной теоремы Зойтендейка (см. [3], стр. 38).

2. Теперь перейдем к отысканию всех равновесных решений одного класса сложных задач математического программирования. Рассматривается следующая задача:

$$\min_{(x, x) \leqslant 1} x' A y \quad \text{и} \quad \min_{(y, y) \leqslant 1} x' B y, \tag{7}$$

где A и B – матрицы размеров $(m \times n)$, а x и y – m- и n-мерные векторы – столбцы.

Сложная задача математического программирования (7) удовлетворяет всем условиям следствия 2. Поэтому равновесными решениями будут пары векторов (x, y) (и только они), которые удовлетворяют одному из следующих систем неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} \lambda x = A y, \\ \mu y = B^T x, \\ (x, x) = 1, \\ (y, y) = 1, \\ \lambda < 0, \mu < 0, \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} A y = 0, \\ \mu y = B^T x, \\ (x, x) \leqslant 1, \\ (y, y) = 1, \\ \mu < 0, \end{cases} \tag{8}$$

в) $\begin{cases} \lambda x = Ay, \\ B^T x = 0, \\ (x,\ x = 1), \\ (y,\ y) \leqslant 1, \\ \lambda < 0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} Ay = 0, \\ B^T x = 0, \\ (x,\ x) \leqslant 1, \\ (y,\ y) \leqslant 1. \end{cases}$

В дальнейшем будем рассматривать только нетривиальные решения систем (8), т.е. мы исключаем из рассмотрения тривиальное равновесное решение $\bar{x}=0$ и $\bar{y}=0$.

Введем пару обозначений

$$C_1 = AB^T \text{ — } m\text{-мерная матрица},$$
$$C_2 = B^T A \text{ — } n\text{-мерная матрица}. \tag{9}$$

Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать $m \geqslant n$.

Замечание 1. Матрицы C_1 и C_2 имеют те же самые ненулевые собственные значения и в той же самой кратности; кратность нулевых собственных значений у матрицы C_1 на $m-n$ больше, чем у C_2.

Для полноты изложения кратко докажем это.

Пусть $m > n$. Матрицы A и B^T дополним до квадратных, введя нулевые строки и столбцы соответственно, т.е.

$$\bar{A} = AO \quad \text{и} \quad \bar{B}^T = \begin{pmatrix} B^T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\bar{A}\bar{B}^T$ и $\bar{B}^T\bar{A}$ имеют одинаковые характеристические полиномы, т.е.

$$|kE_m - \bar{A}\bar{B}^T| = |kE_m - \bar{B}^T\bar{A}| \tag{10}$$

(см. [4], стр. 95).

Так как

$$\bar{A}\bar{B}^T = AB^T \quad \text{и} \quad \bar{B}^T\bar{A} = \begin{pmatrix} B^T A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

из (10) следует

$$|kE_m - AB^T| = k^{m-n} |kE_n - B^T A|.$$

Доказано.

Нетрудно обобщить этот результат для системы матриц

$$A_1,\quad A_2, \ldots, A_k, \quad k \geqslant 2,$$

показав, что матрицы

$$C_i = A_i A_{i+1} \cdots A_k A_1 \cdots A_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

имеют одинаковые ненулевые собственные значения, а нулевые — соответствующей кратности.

Решения, полученные из системы а), будем называть равновесными решениями I-го типа, а остальные — II-го типа.

Докажем несколько теорем, которые связывают решения систем (8) с нахождением собственных значений и собственных векторов матриц C_1 и C_2.

Теорема 2. *Равновесными решениями I-го типа сложной задачи* (8) *являются те и только те* $(\bar{x}, \bar{y})$, *для которых существует такое* $k > 0$, *что*

$$k\bar{x} = C_1 \bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{B^T \bar{x}}{\bar{\mu}} \quad \text{и} \quad \bar{\mu} = -\sqrt{(B^T \bar{x},\ B^T \bar{x})}$$

или, что то же самое,

$$k\bar{y}=C_2\bar{y}, \quad \bar{x}=\frac{A\bar{y}}{\bar{\lambda}} \quad \textit{и} \quad \bar{\lambda}=-\sqrt{(A\bar{y},\ A\bar{y})}.$$

Доказательство. Пусть $(\bar{x},\ \bar{y})$, $\bar{\lambda}<0$ и $\mu<0$ решение системы *а*) и, значит, равновесное решение задачи (8). Путем простых преобразований получаем следующие соотношения:

$$\bar{\lambda}\bar{\mu}\,\bar{x}=AB^T\bar{x}=C_1\bar{x} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}\bar{\mu}\,\bar{y}=B^TA\bar{y}=C_2\bar{y}. \tag{11}$$

Равенства (11) означают, что $\bar{k}=\bar{\lambda}\bar{\mu}>0$ является собственным значением матриц C_1 и C_2, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – собственными векторами, соответственно.

Достаточность. Пусть $\bar{k}>0$ – собственное значение матриц C_1 и C_2, а x и y – соответствующие собственные векторы, т.е.

$$\bar{k}\,\bar{x}=C_1\bar{x} \quad \text{и} \quad \bar{k}\,\bar{y}=C_2\bar{y}. \tag{12}$$

Имея в виду (10) и (12), определим $\bar{\bar{y}}$и $\bar{\bar{\mu}}$:

$$\bar{\bar{\mu}}=-\sqrt{(B^T\bar{x},\ B^T\bar{x})}\neq 0, \quad \bar{\bar{y}}=\frac{B^T\bar{x}}{\bar{\bar{\mu}}}. \tag{13}$$

Отсюда $(\bar{y},\ \bar{\bar{y}})=1$. Из (12) и (13) следует

$$\frac{\bar{k}}{\bar{\bar{\mu}}}\ \bar{x}=A\bar{y}.$$

Далее, обозначая $\bar{\bar{\lambda}}=\frac{\bar{k}}{\bar{\bar{\mu}}}$, получаем

$$\bar{\bar{\lambda}}\bar{x}=A\bar{y}, \quad (\bar{x},\ \bar{x})=1, \quad \bar{\bar{\lambda}}<0,$$
$$\bar{\bar{\mu}}\bar{y}=B^T\bar{x}, \quad (\bar{y},\ \bar{y})=1, \quad \bar{\bar{\mu}}<0, \tag{14}$$

т.е. $(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяет системе а) и является равновесным решением сложной задачи (7). Из последних выражений следует, что $\bar{y}$ является собственным вектором матрицы C_2, соответствующим собственному значению $\bar{k}>0$.

Следствие 1. Если равновесным решением задачи (7) является система $(\bar{x},\ \bar{y})$, соответствующая собственному значению $\bar{k}=\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}>0$, то равновесным решением будет и система $(-\bar{x},\ -\bar{y})$, соответствующая тому же собственному значению $\bar{k}=\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}$.

Доказывается простой проверкой.

Следствие 2. Если $\bar{k}>0$ является s-кратным собственным значением матриц C_1 и C_2, а $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$ – независимые ортонормированные собственные векторы, то все равновесные решения I-го типа, соответствующие $k>0$, суть

$$(\bar{x}_\alpha,\ \bar{y}_\alpha) \quad \bar{\lambda}_\alpha<0, \quad \bar{\mu}_\alpha<0, \tag{15}$$

где

$$\bar{x}_\alpha=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\bar{x}_i, \quad \bar{y}_\alpha=\frac{B^T\bar{x}_\alpha}{\bar{\mu}_\alpha}, \quad \bar{\mu}_\alpha=-\sqrt{(B^T\bar{x}_\alpha,\ B^T\bar{x}_\alpha)}, \quad \bar{\lambda}_\alpha=\frac{\bar{k}}{\bar{\mu}_\alpha},$$

а $(\alpha,\ \alpha)=1$, где $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_3)$.

Из теоремы 1 следует, что система векторов (14) является равновесным решением задачи (7). Наоборот, если $(x^0,\ y^0)$, $\lambda_0<0$ и $\mu^0<0$ является равновесным решением и, следовательно, удовлетворяет системе а, то x^0 является собственным вектором матрицы C_1 для собственного значения $\bar{k}=\lambda_0\cdot\mu_0>0$. Но тогда должно существовать такое α_0, что $x^0=\bar{x}_{\alpha_0}$ и $y^0=\bar{y}_{\alpha_0}=\frac{B^T x_{\alpha_0}}{\mu_{\alpha_0}}$. Таким образом формулами (14) определяются все равновесные решения, соответствующие s-кратному собственному значению $\bar{k}>0$.

Следствие 3. Если $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\lambda}<0$, $\bar{\mu}<0$ равновесное решение I-го типа, то значения целевых функций равны $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, а их произведение $-\bar{k}$, т.е.

$$\bar{\lambda}=\bar{x}'A\bar{y}, \quad \bar{\mu}=\bar{x}'B\bar{y} \quad \text{и} \quad \bar{k}=\bar{x}'B\bar{y}\cdot\bar{x}'A\bar{y}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы сложная задача* (7) *имела равновесное решение* II-*го типа, необходимо и достаточно, чтобы матрицы C_1 и C_2 имели собственное значение $k=0$.*

Доказательство. Пусть матрицы C_1 и C_2 имеют собственное значение равное нулю, т.е. $\bar{k}=0$; $\bar{x}$ и $\bar{y}$, соответствующие $\bar{k}=0$ собственные векторы (ортонормированные):

$$C_1\bar{x}=0 \quad \text{или} \quad AB^T\bar{x}=0$$

и (16)

$$C_2\bar{y}=0 \quad \text{или} \quad B^TA\bar{y}=0.$$

Возможны случаи:

1) $B^T\bar{x}=0$ и $A\bar{y}=0$. Тогда видно, что $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\lambda}=0$, $\bar{\mu}=0$ удовлетворяет системе г) и является равновесным решением;

2) $B^T\bar{x}\neq 0$. Тогда, имея в виду (16), из обозначения

$$\bar{y}=\frac{B^T\bar{x}}{\bar{\mu}}, \quad \bar{\mu}=-\sqrt{(B^T\bar{x}, B^T\bar{x})}$$

получаем, что $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\mu}<0$ и $\bar{\lambda}=0$ удовлетворяет системе б) и является равновесным решением;

3) $A\bar{y}\neq 0$. Случай аналогичен 2).

Для доказательства необходимости предположим, что (x^0, y^0) равновесное решение II-го типа. Тогда система векторов (x^0, y^0), $\lambda_0\leqslant 0$ и $\mu_0\leqslant 0$ является решением одной из систем б), в), г). Пусть она является решением системы б):

$$Ay^0=0, \quad \mu^0 y^0=B^Tx^0, \quad \mu_0<0, \quad (y^0, y^0)=1 \quad \text{и} \quad (x^0, x^0)\leqslant 1.$$

Тогда

$$AB^Tx^0=0 \quad \text{и} \quad B^TAy^0=0,$$

т.е. $C_1=AB^T$ и $C_2=B^TA$ оба имеют собственное значение $k_0=0$; x^0 и y^0 – соответствующие собственные векторы.

Аналогично рассматриваются случаи в) и г).

Итак, если $k=0$ является собственным значением матрицы C_1 (C_2), но матрица C_2 (C_1) не имеет нулевых собственных значений, то сложная задача (7) не имеет равновесных решений II-го типа.

Следствие 1. Если для собственного значения $\bar{k}=0$ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{m'}$ – независимая ортонормированная система собственных векторов матрицы C_1, а $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n'}$ $(n'=m'-(m-n))$ соответствующая система собственных векторов матрицы C_2, тогда собственному значению $\bar{k}=0$ соответствуют равновесные решения II-го типа, которые определяются следующим образом:

1) $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\beta)$, $\bar{\lambda}=0$ и $\bar{\mu}=0$, $\alpha \in \bar{P}_{m'}$ и $\beta \in \bar{R}_{n'}$, где

$$\bar{x}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m'} \alpha_i \bar{x}_i, \quad \alpha \in \bar{P}_{m'} = \left\{ \alpha \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m'} \alpha_i B^T \bar{x}_i = 0, \quad (\alpha, \alpha) \leqslant 1 \right\}$$

и (17)

$$\bar{y}_\beta = \sum_{j=1}^{n'} \beta_j \bar{y}_j, \quad \beta \in \bar{R}_{n'} = \left\{ \beta \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n'} \beta_j A \bar{y}_j = 0, \quad (\beta, \beta) \leqslant 1 \right\};$$

2) $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_x)$, $\bar{\lambda}_\alpha=0$ и $\bar{\mu}_x<0$, $\alpha \in P_{m'}$, где

$$\bar{x}_\alpha = \sum_{i=1}^{m'} \alpha_i \bar{x}_i, \quad \alpha \in P_{m'} = \left\{ \alpha \,\middle|\, B^T \bar{x}_\alpha \neq 0, \quad (\alpha, \alpha) \leqslant 1 \right\},$$

$$\bar{y}_x = \frac{B^T \bar{x}_x}{\bar{\mu}_x}, \quad \bar{\mu}_x = -\sqrt{(B^T \bar{x}_\alpha, B^T \bar{x}_\alpha)}; \tag{18}$$

3) $(\bar{x}_y, \bar{y}_\beta)$, $\bar{\lambda}_y<0$ и $\bar{\mu}_\beta=0$, $\beta \in R_{n'}$, где

$$\bar{y}_\beta = \sum_{j=1}^{n'} \beta_j \bar{y}_j, \quad \beta \in R_{n'} = \left\{ \beta | A \bar{y}_\beta \neq 0, \quad (\beta, \beta) \leqslant 1 \right\},$$

$$\bar{x}_y = \frac{A \bar{y}_\beta}{\bar{\lambda}_y}, \quad \bar{\lambda}_y = -\sqrt{(A \bar{y}_\beta, A \bar{y}_\beta)}. \tag{19}$$

Нетрудно доказать, что этими системами исчерпываются все равновесные решения II-го типа.

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие обозначения:

$A(i)$, $B(i)$ $(i=1,2, \ldots, m)$ — i-я строка матриц A и B соответственно,

$A(j)$, $B(j)$ $(j=1,2, \ldots, n)$ — j-й столбец матриц A и B.

Следствие 1. Если строки матриц A и B удовлетворяют соотношению

$$A(i) \cdot B(i') = 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad i'=1, 2, \ldots, m, \tag{20}$$

т.е. все строки матрицы A ортогональны всем строкам матрицы B, то все равновесные решения сложной задачи (7) будут II-го типа.

Заметим, что то же самое будет, если все столбцы матрицы A ортогональны всем столбцам матрицы B, т.е.

$$A(j) \cdot B(j') = 0, \quad j=1, 2, \ldots, n; \quad j'=1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

Доказательство. Из (20) следует, что все элементы матрицы равны нулю. Поэтому и все собственные значения равны нулю. Так как матрицы C_1 и C_2 имеют общие неравные нулю собственные значения, то и все собственные значения матрицы C_2 равны нулю. По теореме 1 следует, что задача (7) имеет только равновесные решения II-го типа. Согласно следствию 1 теоремы 3 они определяются формулами (17), (18) и (19).

Аналогичные рассуждения применимы и в случае (21).

Таким образом, анализ равновесных решений сложной задачи (7) для всех случаев полностью осуществлен. Для нахождения всех равновесных решений задачи (7) можно предложить следующий алгоритм, обоснование которого следует из теорем 2 и 3 и их следствий.

1. Найти все неотрицательные собственные значения матриц C_1 и C_2 и соответствующие им собственные (ортонормированные) векторы.

2. Для положительных собственных значений определить равновесные решения по формулам (13) (для некратных) и по (15) (для кратных).

3. Для собственных значений равных нулю равновесные решения определить по формулам (17), (18) и (19).

Теперь займемся некоторыми обобщениями сложной задачи (7), для решения которых можно применить предложенный алгоритм.

Рассмотрим следующие сложные задачи математического программирования

$$\min x'Ay \text{ при условиях } (x,\ x)\leqslant\gamma_A^2 \text{ и } \min x'By \text{ при условиях } (y,\ y)\leqslant\delta_B^2 \tag{22}$$

и

$$\min x'A^1y \text{ при условиях } \sum_{i=1}^{m}\gamma_i^2x_i^2\leqslant\gamma_{A_1}^2 \text{ и } \min x'B^1y \text{ при условиях } \sum_{j=1}^{n}\delta_j^2y_j^2\leqslant\delta_{B_1}^2. \tag{23}$$

Теорема 4. *Если элементы матриц A^1 и B^1 связаны с элементами матриц A и B следующим образом:*

$$a_{ij}^1=\gamma_i a_{ij}\delta_j,\quad b_{ij}^1=\gamma_i b_{ij}\delta_j,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то для каждого равновесного решения одной из сложных задач (7), (22) *и* (23) *соответствуют равновесные решения остальных, причем между этими решениями существует следующая связь:*

а) $\bar{x}=\dfrac{\bar{x}'}{\gamma_A}$ *и* $\bar{y}=\dfrac{\bar{y}'}{\delta_B}$,

б) $\bar{x}_i=\dfrac{\gamma_i}{\gamma_{A_1}}\bar{x}_i''$ *и* $\bar{y}_j=\dfrac{\delta_j}{\delta_{B_1}}\bar{y}_j''$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$

в) $\bar{x}_i'=\dfrac{\gamma_A\gamma_i}{\gamma_{A_1}}\bar{x}_i''$ *и* $\bar{y}_j'=\dfrac{\delta_B\delta_j}{\delta_{B_1}}\bar{y}_j''$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$

где $(\bar{x},\bar{y})$, $(\bar{x}',\bar{y}')$ *и* $(\bar{x}'',\bar{y}'')$ *являются равновесными решениями сложных задач* (7), (22) *и* (23), *соответственно.*

Доказательство. Сперва докажем соотношения а). Пусть $(\bar{x},\ \bar{y})$ — любое равновесное решение сложной задачи (7). Покажем, что сложная задача (22) имеет соответствующее равновесное решение $(x',\ y')$, которое определяется так

$$\bar{x}'=\gamma_A\bar{x} \quad \text{и} \quad \bar{y}'=\delta_B\bar{y}. \tag{24}$$

Пусть $(\bar{x}', \bar{y}')$ не является решением. Тогда по определению (3) для $\bar{y}'$ должно существовать $\bar{\bar{x}}'$, что

$$(\bar{\bar{x}}')'A\,\bar{y}' < (\bar{x}')'A\,\bar{y}'$$

или

$$(\bar{\bar{x}}')'A\,(\delta_B\,\bar{y}) < (\gamma_A\,\bar{x})'A\,(\delta_B\,\bar{y}),$$

$$\left(\frac{\bar{\bar{x}}'}{\gamma_A}\right)'A\,\bar{y} < (\bar{x})'A\,\bar{y}. \tag{25}$$

Обозначая

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{\bar{x}}'}{\gamma_A}, \quad \text{где} \quad (\bar{x},\ \bar{\bar{x}}) \leqslant 1,$$

из (25) получаем

$$(\bar{\bar{x}})'A\,\bar{y} < (\bar{x})'A\,\bar{y},$$

т.е. $(\bar{x}, \bar{y})$ не удовлетворяет определению равновесного решения (3). Противоречие. Аналогичное противоречие получилось бы, если бы рассматривали $\bar{x}'$ по отношению к $\bar{y}'$. Поэтому любому решению задачи (7) всегда соответствует равновесное решение задачи (22) и их связь дана в (24).

Для доказательства обратного утверждения поступаем аналогичным образом.

б) Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — равновесное решение задачи (7). Покажем, что пара векторов $(\bar{x}'', \bar{y}'')$, которую определим следующим образом:

$$\bar{x}_i'' = \frac{\gamma_{A_1}}{\gamma_i}\,\bar{x}_i \quad \text{и} \quad \bar{y}_j'' = \frac{\delta_{B_1}}{\delta_j}\,\bar{y}_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{26}$$

является решением задачи (23).

Пусть $(\bar{x}'', \bar{y}'')$ не является решением (23) и пусть для фиксированного $\bar{y}''$ (или для фиксированного $\bar{x}''$) не удовлетворяется соответствующее равенство определения (3), т.е. существует $\bar{\bar{x}}''$, что

$$(\bar{\bar{x}}'')'A^1\,\bar{y}'' < (\bar{x}'')'A^1\,\bar{y}'' \tag{27}$$

Подставляя в (27) выражения (26) получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{\bar{x}}_i''\,a_{ij}^1\,\frac{\delta_{B_1}}{\delta_j}\,\bar{y}_j < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{A_1}}{\gamma_j}\,\bar{x}_i\,a_{ij}^1\,\frac{\delta_{B_1}}{\delta_j}\,\bar{y}_j$$

и, имея в виду определения a_{ij}^1 и b_{ij}^1,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{\bar{x}}_i''\,\frac{\gamma_i}{\gamma_{A_1}}\,a_{ij}\,\bar{y}_j < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i\,a_{ij}\,\bar{y}_j. \tag{28}$$

Вводя следующее обозначение

$$\bar{\bar{x}}_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_{A_1}}\,\bar{\bar{x}}_i'', \quad \text{т. е.} \quad (\bar{x},\ \bar{\bar{x}}) \leqslant 1,$$

из (28) получаем

$$(\bar{\bar{x}})'Ay < (\bar{x})'Ay,$$

что противоречит по определению (3) тому, что $(\bar{x}, \bar{y})$ — равновесное решение задачи (7). Значит, каждому решению задачи (7) соответствует решение задачи (23), а их связь дана формулами (26). Обратное утверждение получается аналогично.

Доказательство связи в) следует из а) и б). Теорема доказана.

Сложную задачу (7) можно несколько обобщить и в другом аспекте. Теперь будем брать не две частичные задачи, а любое конечное их число s, т.е. имеем задачи

$$\min x_i' A_i x_{i+1}; \quad i=1, 2, \ldots, s,$$

при условиях

$$(x_i, x_i) \leqslant 1, \tag{29}$$

где A_i $(i=1,2, \ldots, s)$ — матрицы размеров $(m_i \times m_{i+1})$, а $x_i - m_i$-мерные векторы. Кроме того, всегда будем считать $x_1 = x_{s-1}$.

Введем обозначение

$C_i = A_i A_{i+1} \ldots A_s A_1 \ldots A_{i-1}$ — m_i-мерные квадратные матрицы $(i=1,2, \ldots$ $\ldots, s)$.

Как показано в замечании 1, матрицы C_i $(i=1,2, \ldots, s)$ имеют одинаковые ненулевые собственные значения одинаковой кратности. Кратность нулевых собственных значений в зависимости от m_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ может быть различной.

Как для задачи (7), так и для (29) равновесные решения будем разделять на два типа: I-ый тип, который соответствует положительному собственному значению матриц C_i $(i=1,2, \ldots, s)$ и II-ой тип, который соответствует k, равному нулю.

Для равновесных решений I-го типа верны аналогичные утверждения, которые сформулированы для равновесных решений сложной задачи (7) в теореме 2 и ее следствиях. Так как их легко проверить, то здесь мы их не будем ни формулировать, ни доказывать. Для равновесных решений II-го типа аналог теоремы 3 тоже имеет место. Только для определения всех решений этого типа мы встречаемся с довольно громоздкими выражениями. Поэтому мы только укажем необходимые и достаточные условия существования конкретного вида равновесного решения II-го типа.

Из следствия 2 теоремы 1 следует, что каждое равновесное решение задачи (29) должно удовлетворять системам типа

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 = A_1 x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_i x_i = A_i x_{i+1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_s x_s = A_s x_i, \\ (x_i, x_i) \leqslant 1, \\ \lambda_i \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, s, \end{cases} \tag{30}$$

причем, когда $\lambda_i < 0$, для соответствующего соотношения в системе всегда должно быть строгое равенство $(x_i, x_i) = 1$.

Если выписать все системы типа (30) и их решить, то получим все равновесные решения сложной задачи (29). Ранее мы уже видели, что все решения таких систем довольно легко можно определить, зная собственные векторы матриц C_1. Аналогичное обстоятельство имеет место и здесь.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — неположительная система параметров (30). Разложим ее на прямую сумму следующих подсистем:

$$\Lambda_k = (\lambda_{k-1}, \ \ldots, \ \lambda_{k+1}),$$

$$\lambda_{k-1} = 0, \quad \lambda_k < 0, \ \ldots, \lambda_{k+l} < 0, \quad \lambda_{k+l+1} = 0.$$

Теорема 5. *Для того, чтобы система (30) имела решение для данного λ, необходимо и достаточно, чтобы для каждого Λ_k существовал собственный вектор $\bar{x}_{k+l+1}$ матрицы C_{k+l+1} (для собственного значения $k=0$), который удовлетворяет условиям*

$$A_{k+i-1}\, A_{k+i-2} \,\dots\, A_{k+l}\, x_{k+l+1} = \begin{cases} \neq 0, & i=1,\ 2,\ \dots,\ l, \\ =0, & i=0. \end{cases} \qquad (31)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0=A_{k-1}\bar{x}_k, \\ \lambda_k x_k = A_k \bar{x}_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k+l}\, x_{k+l} = A_{k+l}\, \bar{x}_{k+l+1}, \\ 0 = A_{k+l+1}\, \bar{x}_{k+l+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots \lambda_{k-1}=0,\ \lambda_k<0,\ \dots,\ \lambda_{k+l}<0,\ \lambda_{k+l+1}=0,\ \dots \end{cases}$$

Теперь, вставляя $k+l$ выражение для вектора $\bar{x}_{k+l}$ в соответствующее место $k+l-1$-го соотношения и т.д., получаем, что для $\bar{x}_{k+l+1}$ должно выполняться условие (31). То, что $\bar{x}_{k+l+1}$ является собственным вектором матрицы C_{k+l+1} для нулевого собственного значения проверяется уже тривиально.

Достаточность. Пусть $\bar{x}_{k+l+1}$ (собственный вектор) удовлетворяет (31). Векторы $\bar{\bar{x}}_{k+i}$ и λ_{k+i} ($i=l,\ l-1, \dots, 1,\ 0$) определим рекуррентно

$$\bar{\bar{x}}_{k+i} = \frac{A_{k+i}\, \bar{x}_{k+i+1}}{\bar{\bar{\lambda}}_{k+i}}, \qquad \bar{\bar{\lambda}}_{k+l} = -\sqrt{(A_{k+i}\, x_{k+i+1},\ A_{k+i}\, \bar{\bar{x}}_{k+i+1})},$$

$$i=l,\ l-1,\ \dots,\ 1,\ 0,$$

$$\bar{x}_{k+l+1} = \bar{x}_{k+l+1}.$$

Имеем $\bar{\bar{x}}_{k+i}\neq 0$, $\bar{\bar{\lambda}}_{k+i}<0$, $i=l, \dots, 1, 0$, и $\bar{\bar{\lambda}}_{k-1}=0$. Это следует из условия (31), так как если бы было $\bar{\bar{\lambda}}_{k+}i_0=0$ для какого нибудь $0\leqslant i_0 \leqslant l$, то получилось бы противоречие (31).

Заметим, что если в неположительной системе $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеется ситуация

$$\dots\lambda_{k-3}<0, \quad \lambda_{k-2}=0, \quad \lambda_{k-1}=0, \quad \lambda_k<0,\ \dots,$$

то в решении системы (30) вектор x_{k-1} удовлетворяет условиям

$$C_{k-1}.\bar{x}_{k-1}=0 \quad \text{и} \quad A_{k-2}\,\bar{x}_{k-1}=0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы видно, что зная все собственные векторы матриц C_i ($i=1,2, \dots$ $\dots, s$) для нулевого собственного значения, можно скомпоновать все решения II-го типа. Итак, для сложной задачи (29) можно определить все равновесные решения. Заметим, что частичные задачи (29) могут быть и типа (22), и (23). Это никаких осложнений не внесет, так как их всегда можно свести к типу (29).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.V.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Ю. Ясилионис, О существовании решений сложных задач математического программирования, Лит. мат. сб., VII. № 2 (1967), 00.
2. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Мир, М., 1964.
3. Г. Зойтендейк, Методы возможных направлений, ИЛ, М., 1963.
4. R. Bellman, Introduction to matrix analyzis, New York, McGraw — hill, 1960.

VIENOS SUDĖTINGŲ MATEMATINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIŲ KLASĖS VISŲ PUSIAUSVYROS SPRENDINIŲ SURADIMAS

R. JASILIONIS

(Reziumė)

Pirmoje dalyje įrodomos balno taško teoremos (analogiškos netiesiniam programavimui) sudėtingiems matematinio programavimo uždaviniams (1). Antroje — surandami vienos sudėtingų matematinio programavimo uždavinių klasės (7) visi pusiausvyros sprendiniai.

ALL EQUILIBRIUM SOLUTIONS OF SOME CLASS OF THE COMPLEX MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

R. JASILIONIS

(Summary)

In first part of the article the saddle point theorems (analogous to the nonlinear programming) are proved to complex mathematical programming problems (1). In second — all equilibrium solutions are found to one class of the complex problems (7).