LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК 517.948:513.88

СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. И. ЛАПТЕВ

В работе развиваются идеи, изложенные автором в заметке, которая выходит в журнале „Доклады АН СССР".

Для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

$$\frac{d^2 u}{dt^2}=A(t)u-f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

с неограниченным оператором $A(t)$ обобщается классическое понятие сильной эллиптичности. Находится формула общего решения для таких уравнений, и исследуются задачи с линейными граничными условиями (с операторными коэффициентами) вида

$$\alpha_{i1}u(0)+\alpha_{i2}u'(0)+\beta_{i1}u(T)+\beta_{i2}u'(T)=f_i \qquad (i=1,\ 2).$$

Выделяется класс регулярных граничных условий, для которых возможны корректные постановки граничных задач.

1. Постановка задачи. Основные определения

Рассмотрим на отрезке $[0,\ T]$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2}=A(t)u-f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{1.1}$$

Здесь $u(t)$ – искомая функция со значениями в заданном гильбертовом пространстве H; оператор $A(t)$ при каждом фиксированном $t\in[0,\ T]$ замкнут и имеет плотную в H область определения $D[A(t)]$; $f(t)$ – заданная непрерывная функция со значениями в H.

Обозначим $\partial=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}$ и $L(t,\ \partial)=\partial^2+A(t)$. Тогда уравнение (1.1) примет такой вид:

$$L(t,\ \partial)u=f(t). \tag{1.2}$$

Обобщая классическое определение (см., например, [1], гл. III), назовем дифференциальный оператор $L(t,\ \partial)$ *сильно эллиптическим*, если для всякого вещественного $-\infty<\xi<\infty$ линейный оператор $L(t,\ \xi)=\xi^2+A(t)$, действующий в пространстве H, удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\Big(L(t,\ \xi)\ x,\ x\Big)\geqslant c\xi^2(x,\ x) \qquad (c>0,\ x\in D[A(t)]). \tag{1.3}$$

При $\xi=0$ из (1.3) следует, что вещественная часть оператора $A(t)$ неотрицательна: $\operatorname{Re}\Big(A(t)x,\ x\Big)\geqslant 0$. В дальнейшем, однако, на оператор $A(t)$ будет наложено более сильное требование, именно, его вещественная часть должна быть равномерно положительной, то есть, при некотором $\delta>0$, не зависящем от t,

$$\operatorname{Re}\left(A(t)x,\ x\right)\geqslant\delta(x,\ x)\qquad(x\in D[A(t)]).\tag{1.4}$$

При таком предложении вместо условия (1.3) можно написать следующее

$$\operatorname{Re}\left([\xi^2+A(t)]x,\ x\right)\geqslant c(1+\xi^2)(x,\ x)\qquad\left(c>0,\ x\in D[A(t)]\right),\tag{1.5}$$

возможно, с другой постоянной c.

Полагая $\lambda=\xi^2$ и $y=[\lambda+A(t)]\,x$, придадим неравенству (1.5) такой вид

$$\operatorname{Re}\left(y,\ [\lambda+A(t)]^{-1}y\right)\geqslant c\ (1+\lambda)\,\|[\lambda+A(t)]^{-1}y\|^2\qquad(\lambda\geqslant0,\ y\in H),$$

из которого следует, что

$$\|[\lambda+A(t)]^{-1}\|\leqslant\frac{C}{1+\lambda}\qquad(\lambda\geqslant0).\tag{1.6}$$

Положительная постоянная C здесь не зависит от t.

Оценка (1.6) позволяет при каждом $0\leqslant t\leqslant T$ строить дробные степени $A^\alpha(t)$ оператора $A(t)$ для всех действительных α [2, 3]. Если $-\infty<\alpha\leqslant0$, то операторы $A^\alpha(t)$ ограничены и определены на всем пространстве H, если же $0<\alpha<\infty$, то $A^\alpha(t)$ — замкнутые линейные операторы с плотной областью определения. Кроме того, операторы $-A^\alpha(t)$ при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ порождают полугруппу $V_{A^\alpha(t)}(z)=e^{-zA^\alpha(t)}$ линейных ограниченных операторов, аналитическую в некотором секторе, содержащем положительную вещественную ось переменной z [3].

Для уравнения (1.1) будет изучаться *граничная задача*, то есть задача о нахождении решения $u(t)$, удовлетворяющего системе линейных граничных условий вида

$$\begin{aligned}L_1(u)&\equiv\alpha_{11}u_0+\alpha_{12}u_0'+\beta_{11}u_T+\beta_{12}u_T'=f_1;\\ L_2(u)&\equiv\alpha_{21}u_0+\alpha_{22}u_0'+\beta_{21}u_T+\beta_{22}u_T'=f_2,\end{aligned}\tag{1.7}$$

где α_{ij}, $\beta_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$ — линейные операторы в гильбертовом пространстве H, f_1 и f_2 — заданные элементы из H. Здесь и в дальнейшем под u_0, u_0', u_T, u_T' понимаются элементы $u(0)$, $u'(0)$, $u(T)$ и $u'(T)$ соответственно.

Определение. Функция $u(t)$ со значениями в H, определенная на отрезке $[0,\ T]$, называется *решением дифференциального уравнения* (1.1), если

I) она сильно непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ T]$ и дважды сильно непрерывно дифференцируема в интервале $(0,\ T)$;

II) ее значения принадлежат $D[A(t)]$ для $0<t<T$, а функция $A^{\frac{1}{2}}(t)\,u(t)$ непрерывна на всем отрезке $0\leqslant t\leqslant T$;

III) она удовлетворяет уравнению (1.1) в интервале $(0,\ T)$.

Если функция $u(t)$ удовлетворяет также граничным условиям (1.7), то она называется решением граничной задачи (1.1), (1.7).

Задача (1.1), (1.7) будет изучена нами при следующих предположениях о гладкости операторной функции $A(t)$:

α) область определения D оператора $A(t)$ не зависит от t;

β) равномерно ограниченная в силу α) операторная функция $A(t)\ A^{-1}(s)$ при каждом $s \in [0,\ T]$ удовлетворяет по t условию Гельдера с некоторым показателем $\varepsilon > 0$:

$$\|[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(s)\| \leqslant M\,|t-\tau|^{\varepsilon}.$$

2. Формула общего решения дифференциального уравнения

Обозначим через $L_2([0,\ T],\ H)$ гильбертово пространство интегрируемых по Бохнеру ([4], стр. 92) функций со значениями в H, когда скалярное произведение определено формулой

$$(u,\ v)_0 = \int\limits_0^T \Big(u(t),\ v(t)\Big)\,dt.$$

Теорема 2.1. *Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условию* (1.4). *Если функция $u(t)$ такова, что*

$$\operatorname{Re}(u',\ u)\,|_0^T \equiv \operatorname{Re}[(u'_T,\ u_T)-(u'_0,\ u_0)] \leqslant 0, \tag{2.1}$$

и к ней можно применить оператор $L(t,\ \partial)$, то имеет место оценка

$$\operatorname{Re}(Lu,\ u)_0 \geqslant \delta(u,\ u)_0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Достаточно в скалярном произведении $(Lu,\ u)_0$ проинтегрировать один раз по частям, тогда

$$\operatorname{Re}(Lu,\ u)_0 = -\operatorname{Re}(u',\ u)/_0^T + \int\limits_0^T \|u'(t)\|^2\,dt + \int\limits_0^T \operatorname{Re}\Big(A(t)u,\ u\Big)\,dt.$$

Здесь первые два слагаемых неотрицательны, последнее же по условию (1.4) не меньше, чем $\delta(u,\ u)_0$, что и доказывает теорему.

Заметим, что теорема 2.1 обеспечивает единственность решения основных граничных задач (см., например, [5]):

1) $u(0)=f_1,\ u(T)=f_2$ — первая граничная задача;

2) $u'(0)=f_1,\ u'(T)=f_2$ — вторая граничная задача;

3) $\left.\begin{matrix} u'(0)-\sigma u(0)=f_1 \\ u'(T)+\sigma u(T)=f_2 \end{matrix}\right\}$ при $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ — третья граничная задача;

4) $\left.\begin{matrix} u(T)=\rho u(0) \\ u'(T)=\rho u'(0) \end{matrix}\right\}$ при $|\rho|=1$ — обобщенные периодические условия.

Действительно, если решение уравнения $L(t,\partial)\ u=0$ удовлетворяет также одному из приведенных однородных граничных условий, то для него выполняется неравенство (2.1). Тогда из оценки (2.2) следует, что $u(t)\equiv 0$.

Известно, какую роль играет функция Грина в теории краевых задач. В связи с этим введем определение.

Операторная функция $G(t,\ \tau)$ называется *функцией Грина* граничной задачи (1.1), (1.7), если для любой функции $f(t)$ со значениями в пространстве H, удовлетворяющей условию Гельдера, интеграл

$$g(t) = \int\limits_0^T G(t,\ \tau)f(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

дает частное решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет однородным граничным условиям $L_1(g)=L_2(g)=0$.

Теорема 2.2. *Если положительное число k достаточно велико, то при выполнении условий* α) *и* β), *приведенных в конце п.* 1, *существует функция Грина* $G_k(t, \tau)$ *следующей граничной задачи*

$$\frac{d^2 u}{dt^2}=[A(t)+k^2]u-f(t), \quad u'(0)=u'(T)=0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Положим $A_k(t)=A(t)+k^2$ и введем *функцию Леви* $F(t, \tau)$ как решение уравнения с „замороженным" коэффициентом

$$\frac{d^2 F}{dt^2}=A_k(\tau)F(t, \tau) \text{ при } t\neq\tau, \tag{2.5}$$

$$F_t'(0, \tau)=F_t'(T, \tau)=0. \tag{2.6}$$

Из работ [6, 7] следует, что функция $F(t, \tau)$ имеет такой вид

$$F(t, \tau)=\frac{1}{2}A_k^{-\frac{1}{2}}(\tau)\{V(|t-\tau|)+[1-V(2T)]^{-1}[V(t+\tau)+$$
$$+V(2T-t+\tau)+V(2T+t-\tau)+V(2T-t-\tau)]\},$$

где $V(t)=e^{-tA_k^{\frac{1}{2}}(\tau)}$ — полугруппа, порождаемая оператором $A_k^{\frac{1}{2}}(\tau)$ при фиксированном τ. Кроме того $F(t, \tau)$ обладает следующим свойством: если функция $f(t)$ со значениями в H непрерывна и $g(t)=\int_0^T F(t, \tau)f(\tau)d\tau$, то

$$\frac{d^2 g}{dt^2}=A_k(t)g-f(t)+\int_0^T K(t, \tau)f(\tau)d\tau, \tag{2.7}$$

где

$$K(t, \tau)=[A(\tau)-A(t)]F(t, \tau).$$

Следуя известному методу Леви [9], ищем искомую функцию $G_k(t, \tau)$ в виде

$$G_k(t, \tau)=F(t, \tau)+\int_0^T F(t, s)\Phi(s, \tau)ds, \tag{2.8}$$

где $\Phi(s, \tau)$ — неизвестная операторная функция, подлежащая определению. Подстановка этого выражения в уравнение

$$\frac{d^2 G_k}{dt^2}=A_k(t)G_k(t, \tau) \qquad (t\neq\tau) \tag{2.9}$$

с использованием соотношений (2.5) и (2.7) дает интегральное уравнение для $\Phi(t, \tau)$

$$\Phi(t, \tau)=K(t, \tau)+\int_0^T K(t, s)\Phi(s, \tau)\, ds. \tag{2.10}$$

Решать уравнение (2.10) будем методом последовательных приближений, установив предварительно ряд оценок.

1. Как показано в [3] (леммы 6.2 и 6.3), из условия (1.6) следует существование такого острого угла $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, что все комплексные числа λ, расположенные вне сектора Σ: $-\varphi<\arg\lambda<\varphi$, принадлежат резольвентному множеству оператора $A^{\frac{1}{2}}(t)$, причем для таких λ

$$\left\|\lambda R\left(\lambda, A^{\frac{1}{2}}(t)\right)\right\|\leqslant C_0 \qquad (\lambda\bar{\in}\Sigma), \tag{2.11}$$

где

$$R\left(\lambda, A^{\frac{1}{2}}(t)\right)=[\lambda-A^{\frac{1}{2}}(t)]^{-1}.$$

Таким образом, спектры операторов $A^{\frac{1}{2}}(t)$ заключены в секторе Σ, целиком лежащем в правой полуплоскости. Из теории операторного исчисления для таких операторов (сильно позитивные операторы) вытекает представление

$$A^{\frac{1}{2}}(\tau)V(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda e^{-t\sqrt{k^2+\lambda^2}}R\left(\lambda, A^{\frac{1}{2}}(\tau)\right)d\lambda.$$

Здесь Γ — граница сектора Σ, составленная из двух лучей $\arg\lambda=\pm\varphi$. Используя оценку (2.11), получим неравенство

$$\|A^{\frac{1}{2}}(\tau)V(t)\|\leqslant\frac{C_0}{2\pi}\int_{\Gamma}|e^{-t\sqrt{k^2+\lambda^2}}|\,|d\lambda|=\frac{C_0}{2\pi}\int_{\Gamma}e^{-t\operatorname{Re}\sqrt{k^2+\lambda^2}}|d\lambda|. \quad (2.12)$$

Так как $|\arg\sqrt{k^2+\lambda^2}|<|\arg\lambda|=\varphi$, то

$$\operatorname{Re}\sqrt{k^2+\lambda^2}\geqslant|k^2+\lambda^2|^{\frac{1}{2}}\cos\varphi.$$

Используя далее элементарное неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$, находим

$$|k^2+\lambda^2|^2\geqslant\frac{1-|\cos 2\varphi|}{8}(k+|\lambda|)^4.$$

Следовательно, найдется такая постоянная $\gamma>0$, зависящая только от угла φ, что

$$e^{-t\operatorname{Re}\sqrt{k^2+\lambda^2}}\leqslant e^{-\gamma t(k+|\lambda|)}.$$

Произведя в (2.12) замену $\lambda=re^{\pm i\varphi}$, получим окончательно

$$\|A^{\frac{1}{2}}(\tau)V(t)\|\leqslant\frac{C_0}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\gamma t(k+r)}dr=\frac{N_1}{t}e^{-\gamma kt}, \quad (2.13)$$

и постоянная N_1 не зависит от t и τ.

2. Применяя (2.13), а также очевидное неравенство

$$\|A^{\frac{1}{2}}(\tau)A_k^{-\frac{1}{2}}(\tau)\|\leqslant N_2,$$

получаем следующую оценку:

$$\|A(\tau)F(t, \tau)\|\leqslant N_3\frac{e^{-\gamma k|t-\tau|}}{|t-\tau|}+N_4\left[\frac{e^{-\gamma k(t+\tau)}}{t+\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\gamma k(2T-t+\tau)}}{2T-t+\tau}+\frac{e^{-\gamma k(2T+t-\tau)}}{2T+t-\tau}+\frac{e^{-\gamma k(2T-t-\tau)}}{2T-t-\tau}\right].$$

Заметим, что знаменатели всех слагаемых не меньше, чем $|t-\tau|$, поэтому

$$\|A(\tau)F(t, \tau)\|\leqslant\frac{N_5}{|t-\tau|}e^{-\gamma k|t-\tau|}. \quad (2.14)$$

Представим теперь функцию $K(t, \tau)$ в виде произведения

$$K(t, \tau)=\{[A(\tau)-A(t)]A^{-1}(\tau)\}[A(\tau)F(t, \tau)].$$

Согласно условию β) п. 1 первый сомножитель по норме не превосходит $M|t-\tau|^{\varepsilon}$, второй же оценен в (2.14), то есть

$$\|K(t, \tau)\|\leqslant MN_5|t-\tau|^{\varepsilon-1}e^{-\gamma k|t-\tau|}.$$

В то же время

$$\int_0^T |t-\tau|^{\varepsilon-1} e^{-\varkappa|t-\tau|} \leqslant \frac{2\Gamma(\varepsilon)}{\varkappa^\varepsilon},$$

откуда получается такая оценка на ядро $K(t, \tau)$

$$\int_0^T \|K(t, \tau)\| d\tau \leqslant \frac{N}{k^\varepsilon}, \tag{2.15}$$

где постоянная N не зависит от k.

3. Теперь можно приступить к решению интегрального уравнения (2.10). Из его вида ясно, что это резольвентное уравнение для ядра $K(t, \tau)$, и в тех случаях, когда функция $\Phi(t, \tau)$ существует, она является резольвентным ядром для $K(t, \tau)$. Как известно из теории интегральных операторов типа потенциала (см., например, [10], гл. III), резольвентное уравнение разрешимо, если интеграл от модуля ядра по одной из переменных меньше единицы. Нетрудно обобщить этот принцип на операторные уравнения вида (2.10), если выполнено условие

$$\int_0^T \|K(t, s)\| ds = q < 1. \tag{2.16}$$

При этом функция $\Phi(t, \tau)$ дается рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} K^{(n)}(t, \tau),$$

где

$$K^{(0)}(t, \tau) = K(t, \tau), \quad K^{(n+1)}(t, \tau) = \int_0^T K^{(n)}(t, s) K(s, \tau) ds,$$

и ее свойства вполне определяются свойствами порождающего ядра $K(t, \tau)$, в частности

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leqslant N' |t-\tau|^{\varepsilon-1}.$$

В то же время оценка (2.15) показывает, что условие (2.16) будет выполнено, если выбрать число k достаточно большим.

Для доказательства теоремы остается еще убедиться, что формула (2.8) действительно определяет функцию Грина задачи (2.4). Но это непосредственно следует из свойств (2.6) и (2.7) функции $F(t, \tau)$.

Теорема доказана.

Теорема 2.3. *При выполнении условий* α) *и* β) *п.* 1 *существует функция Грина* $G(t, \tau)$ *второй граничной задачи*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A(t) u - f(t), \quad u'(0) = u'(T) = 0.$$

Доказательство. Искомая функция, если она существует, должна удовлетворять резольвентному уравнению

$$G(t, \tau) x = G_k(t, \tau) x + k^2 \int_0^T G_k(t, s) G(s, \tau) x\, ds \qquad (x \in H). \tag{2.17}$$

Так как ядро $G_k(t, s)$ равномерно ограничено по норме, то оно определяет в гильбертовом пространстве $L_2([0, T], H)$ ограниченный интегральный оператор (см. [8])

$$\mathbf{G}_k v = \int_0^T G_k(t, s) v(s) ds.$$

При этом имеет место соотношение

$$(L+k^2)\mathbf{G}_k v = v, \tag{2.18}$$

вытекающее из того, что $G_k(t, s)$ – функция Грина второй краевой задачи для дифференциального оператора $L(t, \partial)+k^2$.

Покажем, что точка k^2 не может принадлежать спектру оператора $\mathbf{G}_k$. Доказательство проведем от противного.

Допустим, что k^2 принадлежит точечному или остаточному спектрам. В обоих случаях область значений оператора $1-k^2\mathbf{G}_k$ не плотна в гильбертовом пространстве $L_2([0, T], H)$. Пусть $v(t)$ – функция, ортогональная области значений указанного оператора, в частности

$$(v-k^2\mathbf{G}_k v, v)_0 = 0. \tag{2.19}$$

Положим $w = \mathbf{G}_k v$, тогда из (2.18) следует, что $v = (L+k^2) w$. Подставляя эти обозначения в (2.19), получим

$$(Lw, Lw)_0 + k^2 \operatorname{Re}(L\dot{w}, w)_0 = 0.$$

Здесь первое слагаемое неотрицательно, а второе по теореме 2.1 не меньше, чем $k^2\delta(w, w)_0$. Значит сумма их может равняться нулю только в том случае, если $w(t) \equiv 0$, то есть $\mathbf{G}_k v = 0$. Так как оператор $\mathbf{G}_k$ имеет обратный (хотя и неограниченный), то $v(t) \equiv 0$, и тем самым точка k^2 не может принадлежать точечному или остаточному спектрам.

Допустим теперь, что k^2 принадлежит непрерывному спектру оператора $\mathbf{G}_k$. Это значит, что на единичной сфере пространства $L_2([0, T], H)$ найдется последовательность функций $v_n(t)$, для которых

$$v_n - k^2\mathbf{G}_k v_n = \varphi_n \text{ и } \|\varphi_n\|_0 \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.20}$$

Обозначим $w_n = \mathbf{G}_k v_n$, то есть $v_n = (L+k^2) w_n$. Подставляя в (2.20), получим

$$Lw_n = \varphi_n, \quad \|\varphi_n\|_0 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что $(Lw_n, w_n)_0 \to 0$, или, применяя теорему 2.1, что $(w_n, w_n)_0 \to 0$. Так как $v_n = \varphi_n + k^2 w_n$, и число k^2 фиксировано, то $\|v_n\|_0 \to 0$, а это противоречит выбору функций $v_n(t)$.

Таким образом, k^2 не может принадлежать и непрерывному спектру, следовательно, это точка резольвентного множества. Уравнение (2.17) таким образом разрешимо и превращается в тождество, опираясь на которое, нетрудно убедиться, что функция $G(t, \tau)$ действительно является искомой функцией Грина. Теорема доказана.

Вполне аналогично можно было бы доказать существование функций Грина всех основных граничных задач. Вторая граничная задача выбрана из следующих соображений.

Функции $F(t, 0)$ и $F(t, T)$ удовлетворяют таким граничным условиям

$$F_t'(0, 0) = -1, \qquad F_t'(0, T) = 0,$$
$$F_t'(T, 0) = 0, \qquad F_t'(T, T) = 1.$$

Тем же граничным условиям будут удовлетворять и функции $G_k(t, 0)$ и $G_k(t, T)$, так как в формуле (2.8) интегральный член пропадает за счет условий (2.6). Аналогично из соотношения (2.17) следует, что тем же граничным условиям удовлетворяют также функции $G(t, 0)$ и $G(t, T)$. В то же время две последние функции являются решениями однородного дифференциального уравнения $L(t, \partial)u = 0$. А тогда любое решение $u(t)$ этого уравнения может быть записано в виде

$$u(t) = -G(t, 0)u'(0) + G(t, T)u'(T).$$

Действительно, согласно вышесказанному сумма, стоящая справа, удовлетворяет уравнению $L(t, \partial)u = 0$, а производная от нее принимает значения $u'(0)$ при $t = 0$ и $u'(T)$ при $t = T$. В силу единственности решения второй граничной задачи эта сумма совпадает с решением.

Обозначим

$$U_1(t) = -G(t, 0); \quad U_2(t) = G(t, T). \tag{2.21}$$

Мы пришли таким образом к формуле общего решения исходного уравнения.

Теорема 2.4. *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. Если $u(t)$ – решение уравнения (1.1), то его можно представить в виде*

$$u(t) = U_1(t)g_1 + U_2(t)g_2 + g(t), \tag{2.22}$$

где g_1, g_2 – некоторые элементы пространства H, $G(t, \tau)$ – функция Грина второй граничной задачи и

$$g(t) = \int_0^T G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{2.23}$$

Обратно, если $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, то для любых элементов g_1, $g_2 \in H$ формулы (2.22), (2.23) дают решение уравнения (1.1).

3. Регулярные граничные условия

При изучении граничной задачи (1.1), (1.7) будем предполагать, что операторы α_{ij}, β_{ij} ограничены. Подстановка общего решения (2.22) в граничные условия (1.7) дает систему уравнений с операторными коэффициентами для элементов g_1 и g_2

$$\begin{aligned} L_1(U_1)g_1 + L_1(U_2)g_2 &= f_1 - L_1(g), \\ L_2(U_1)g_1 + L_2(U_2)g_2 &= f_2 - L_2(g). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Полученную систему удобно рассматривать как одно уравнение в ортогональной сумме $H \oplus H$ с элементами $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1, x_2 \in H$, когда скалярное произведение определено формулой

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2), \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор-матрицу системы (3.1) обозначим через

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} L_1(U_1) & L_1(U_2) \\ L_2(U_1) & L_2(U_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда эта система запишется так

$$\mathbf{D}\tilde{g}=\tilde{h},\ \tilde{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},\ \tilde{h}=\begin{pmatrix} f_1-L_1(g) \\ f_2-L_2(g) \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Если оператор $\mathbf{D}^{-1}$ существует, и его можно применить к элементу $\tilde{h}$, то тем самым система (3.1) однозначно разрешима, и подстановка найденных элементов g_1, g_2 в формулу общего решения даст искомое решение граничной задачи. Таким образом вопрос о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи равносилен вопросу о существовании оператора $\mathbf{D}^{-1}$ и его свойствах.

Здесь отметим такое утверждение.

Теорема 3.1. *Оператор $\mathbf{D}^{-1}$ (возможно, неограниченный) существует тогда и только тогда, когда однородная граничная задача*

$$L(t,\ \partial)u=0,\quad L_1(u)=L_2(u)=0 \qquad (3.3)$$

имеет только нулевое решение.

Доказательство.

Необходимость. Пусть оператор $\mathbf{D}^{-1}$ существует. Это значит, что уравнение $\mathbf{D}\tilde{g}=0$ имеет единственное решение $\tilde{g}=0$. Допустим теперь, что задача (3.3) имеет решение $u(t)\not\equiv 0$. Из представления

$$u(t)=U_1(t)u'(0)+U_2(t)u'(T)$$

вытекает, что по крайней мере один из элементов $u'(0)$, $u'(T)$ отличен от нуля. В то же время уравнение (3.2) принимает вид

$$\mathbf{D}\tilde{g}=0,\quad \tilde{g}=\begin{pmatrix} u'(0) \\ u'(T) \end{pmatrix},$$

то есть оператор $\mathbf{D}$ обращается в нуль на ненулевом элементе, что противоречит исходному положению.

Достаточность. Пусть задача (3.3) имеет только нулевое решение, а оператор $\mathbf{D}$ не имеет обратного, то есть существует элемент $\tilde{g}\neq 0$, для которого $\mathbf{D}\tilde{g}=0$. По элементу $\tilde{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ строим функцию

$$u(t)=U_1(t)g_1+U_2(t)g_2,$$

которая дает ненулевое решение задачи (3.3). Мы вновь пришли к противоречию, которое доказывает теорему.

Определение решения $u(t)$ граничной задачи (1.1), (1.7), приведенное в п. 1, требует от функции $u(t)$ достаточно большой степени гладкости. Так, если пользоваться этим определением, то даже первая граничная задача разрешима не для всяких элементов $f_1, f_2\in H$. Это обстоятельство побуждает ввести понятие обобщенного решения.

Предварительно заметим, что функция Леви $F(t,\ \tau)$ содержит множителем оператор $A_k^{-\frac{1}{2}}(\tau)$, и функция $A_k^{\frac{1}{2}}(\tau)\,F(t,\ \tau)=F(t,\ \tau)\,A_k^{\frac{1}{2}}(\tau)$ равномерно ограничена. Опираясь на это, нетрудно показать, что равномерно ограниченной будет также функция $G(t, \tau)\ A_k^{\frac{1}{2}}(\tau)$, а вместе с нею — функции $U_1(t)\,A_k^{\frac{1}{2}}(0)$ и $U_2(t)\ A_k^{\frac{1}{2}}(T)$.

Определение. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением* граничной задачи (1.1), (1.7), если эта функция представима в виде

$$u(t)=[U_1(t)A_k^{\frac{1}{2}}(0)]\,h_1+[U_2(t)A_k^{\frac{1}{2}}(T)]\,h_2+\int\limits_0^T G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{3.4}$$

где h_1, h_2 — некоторые элементы пространства H, и $f(\tau)$ — непрерывная функция со значениями в H.

Из этого определения следует, что для существования обобщенного решения достаточно, чтобы пространству H принадлежали элементы $A_k^{-\frac{1}{2}}(0)\,g_1$ и $A_k^{-\frac{1}{2}}(T)\,g_2$, тогда как g_1, g_2 пространству H могут не принадлежать.

Напомним, что функции $U_1(t)$ и $U_2(t)$ удовлетворяют следующим граничным условиям

$$U_1'(0)=1, \qquad U_2'(0)=0,$$
$$U_1'(T)=0, \qquad U_2'(T)=1.$$

Учитывая это, запишем подробнее оператор-матрицу

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\,U_1(0)+\alpha_{12}+\beta_{11}\,U_1(T) & \alpha_{11}\,U_2(0)+\beta_{11}\,U_2(T)+\beta_{12}\\ \alpha_{21}\,U_1(0)+\alpha_{22}+\beta_{21}\,U_1(T) & \alpha_{21}\,U_2(0)+\beta_{21}\,U_2(T)+\beta_{22}\end{pmatrix}.$$

Как обычно, будем называть граничную задачу (1.1), (1.7) *корректной*, если ее решение (истинное или обобщенное) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных f_1, f_2 и $f(t)$.

Выделим класс граничных условий, для которых возможны корректные постановки граничных задач. При этом оказывается, что если α_{ij}, β_{ij} — операторы умножения на комплексные числа, то этот класс совпадает с регулярными граничными условиями для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка ([11], стр. 53—54). В связи с этим мы сохраним термин „*регулярные граничные условия*“ для следующих трех типов граничных условий.

1. Матричный оператор

$$\mathbf{d}_1=\begin{pmatrix}\alpha_{12} & \beta_{12}\\ \alpha_{22} & \beta_{22}\end{pmatrix}$$

имеет ограниченный обратный $\mathbf{d}_1^{-1}$, определенный на всем пространстве $H\oplus H$.

Таким образом, предполагается, что оба граничных условия L_1 и L_2 содержат дифференцирование, а коэффициенты при производных составляют обратимую матрицу.

Оператор $\mathbf{D}$ теперь можно записать так:

$$\mathbf{D}=\mathbf{d}_1+\mathbf{R}_1\,A_k^{-\frac{1}{2}}(0),$$

причем $\mathbf{R}_1$ — ограниченная матрица, так как ее элементы состоят из ограниченных операторов.

Если оператор $\mathbf{D}$ можно непрерывно обратить, то будут найдены элементы g_1, g_2, по которым однозначно строится решение. Как следует из построения, найденное решение будет истинным (если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера), а граничная задача – корректной.

2. Частные значения функции Леви $F(t, \tau)$, построенной в п. 2, можно представить следующим образом:

$$F(0,\ 0)=A_k^{-\frac{1}{2}}(0)+B_1 A_k^{-1}(0);\quad F(T,\ 0)=B_2 A_k^{-1}(0);$$

$$F(0,\ T)=B_3 A_k^{-1}(T);\quad F(T,\ T)=A_k^{-\frac{1}{2}}(T)+B_4 A_k^{-1}(T),$$

где $B_i\ (i=1-4)$ – ограниченные операторы. Из формул (2.8) и (2.17) следует аналогичное представление для функций $U_1(t)$, $U_2(t)$, именно

$$U_1(0)=-\left(A_k^{-\frac{1}{2}}(0)+C_1 A_k^{-1}(0)\right),\quad U_1(T)=C_2 A_k^{-1}(0),$$

$$U_2(0)=C_3 A_k^{-1}(T),\quad U_2(T)=A_k^{-\frac{1}{2}}(T)+C_4 A_k^{-1}(T). \tag{3.5}$$

Допустим, что второе (для определенности) граничное условие не содержит дифференцирования.

Если теперь систему (3.1) решать относительно элементов $A_k^{-\frac{1}{2}}(0)g_1$ и $A_k^{-\frac{1}{2}}(T)\,g_2$, то соответствующий оператор $\mathbf{D}$ примет вид

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} A_k^{-\frac{1}{2}}(0)L_1(U_1)A_k^{\frac{1}{2}}(0) & A_k^{-\frac{1}{2}}(0)L_1(U_2)A_k^{\frac{1}{2}}(T) \\ L_2(U_1)A_k^{\frac{1}{2}}(0) & L_2(U_2)A_k^{\frac{1}{2}}(T) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Для регулярности граничных условий должен иметь ограниченный обратный следующий матричный оператор

$$\mathbf{d}_2=\begin{pmatrix} A_k^{-\frac{1}{2}}(0)\,\alpha_{12}A_k^{\frac{1}{2}}(0) & A_k^{-\frac{1}{2}}(0)\,\beta_{12}A_k^{\frac{1}{2}}(T) \\ -\alpha_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix}.$$

Используя соотношения (3.5), оператор $\mathbf{D}$ из (3.6) можно представить в таком виде

$$\mathbf{D}=\mathbf{d}_2+\mathbf{R}_2 A_k^{-\frac{1}{2}}(0).$$

И если оператор $\mathbf{D}$ имеет ограниченный обратный, то задача будет иметь решение, вообще говоря, обобщенное. Чтобы это решение было истинным, нужно наложить дополнительные ограничения: $f_2\in D\,[A_k^{\frac{1}{2}}(0)]$ и $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Если допустить к рассмотрению неограниченные операторы α_{ij}, β_{ij}, то для получения истинного решения можно иногда не предполагать, что $f_2\in D\,[A_k^{\frac{1}{2}}(0)]$. Так будет, например, в случае, когда $\alpha_{21}=\gamma\,A_k^{\frac{1}{2}}(0)$, $\beta_{21}=\delta A_k^{\frac{1}{2}}(T)$, где γ, δ – ограниченные операторы, и при этом матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

имеет ограниченную обратную.

3. Предположим, наконец, что оба граничные условия не содержат дифференцирования. В этом случае потребуем, чтобы был непрерывно обратим в пространстве $H \oplus H$ оператор

$$\mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & \beta_{11} \\ -\alpha_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix}.$$

Систему (3.1) решать нужно теперь относительно элементов $A_k^{-\frac{1}{2}}(0)\, g_1$ и $A_k^{-\frac{1}{2}}(T)\, g_2$. При этом соответствующий оператор $\mathbf{D}$ допускает представление

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}_3 + \mathbf{R}_3 A_k^{-\frac{1}{2}}(0).$$

И если $\mathbf{D}^{-1}$ существует и ограничен, то граничная задача будет иметь в общем случае обобщенное решение.

Итак, в случае регулярных граничных условий оператор $\mathbf{D}$ можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} + \mathbf{R} A_k^{-\frac{1}{2}}(0) = \mathbf{d}\left(1 + \mathbf{d}^{-1} \mathbf{R} A_k^{-\frac{1}{2}}(0)\right), \tag{3.7}$$

где $\mathbf{d}$ и $\mathbf{R}$ — ограниченные операторы в $H \oplus H$, причем $\mathbf{d}$ имеет также ограниченный обратный, определенный на всем пространстве. В общем случае представление (3.7) не позволяет определить, имеет ли оператор $\mathbf{D}$ ограниченный обратный. Есть однако частный, но важный случай, когда такое представление помогает.

Именно, допустим, что оператор $A^{-1}(0)$ вполне непрерывен. Тогда вполне непрерывным будет оператор $A_k^{-\frac{1}{2}}(0)$, а вместе с ним и слагаемое $\mathbf{d}^{-1}\mathbf{R} A_k^{-\frac{1}{2}}(0)$ в (3.7). Так как для вполне непрерывных операторов единица может быть только резольвентной точкой или собственным значением, то соответственно оператор $\mathbf{D}$ либо непрерывно обратим, либо не имеет обратного. В последнем случае по теореме 3.1 однородная граничная задача имеет ненулевое решение.

Мы приходим таким образом к утверждению, в котором проявляется наиболее полная аналогия со скалярным случаем.

Теорема 3.2. *Пусть операторы $A^{-1}(t)$ вполне непрерывны, и граничные условия* (1.7) *регулярны. Для того, чтобы граничная задача* (1.1), (1.7) *была корректна, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная граничная задача имела только нулевое решение.*

Вычислительный центр
ЛГУ им. П. Стучки

Поступило в редакцию
10.VII.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, „Наукова думка", Киев, 1965.

2. М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах, ДАН СССР, 129, № 3 (1959).

3. A. V. Balakrishnan, Frac ional powers of closed operators and semi-groups generated by them, Pac. J. Math., 152, N 6 (1961).

4. Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1963.

5. В. А. Треногин, Краевые задачи для абстрактных эллиптических уравнений, ДАН СССР, 170, № 5 (1966).

6. С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. I, Дифференц. уравнения, **2**, № 3 (1966).

7. С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве. II, Дифференц. уравнения, 2, № 7 (1966).

8. Г. И. Лаптев, Задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом и гильбертовом пространствах, Дифференц. уравнения, 2, № 9 (1966).

9. Е. Е. Леви, О линейных эллиптических уравнениях в частных производных, Успехи матем. наук, в. **VIII** (1941).

10. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

11. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., 1954.

STIPRIAI ELIPSINĖS ANTROS EILĖS LYGTYS HILBERTO ERDVĖJE

G. LAPTEVAS

(*Reziumė*)

Diferencialinei lygčiai Hilberto erdvėje

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A(t)\,u - f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

su neaprėžtu operatorium $A(t)$ apibendrinama klasikinė stipraus eliptiškumo sąvoka. Išvedama tokių lygčių bendro sprendinio formulė, ir nagrinėjami uždaviniai su tiesinėmis kraštinėmis sąlygomis (su operatoriniais koeficientais):

$$\alpha_{i1}\, u(0) + \alpha_{i2}\, u'(0) + \beta_{i1}\, u(T) + \beta_{i2}\, u'(T) = f_i \qquad (i = 1,\ 2).$$

Išskiriama klasė reguliarių kraštinių sąlygų, prie kurių galimas korektiškas kraštinių uždavinių formulavimas.

STRONG ELLIPTIC EQUATIONS OF SECOND ORDER IN HILBERT SPACE

G. LAPTEV

(*Summary*)

The notion of strong ellipticity is generalized for differential equations in Hilbert space

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A(t)\,u - f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

with unboundet operator $A(t)$. Formula of a general solution is found for such equations and problems with linear boundary conditions (where coefficients are operators)

$$\alpha_{i1}\, u(0) + \alpha_{i2}\, u'(0) + \beta_{i1}\, u(T) + \beta_{i2}\, u'(T) = f_i \qquad (i = 1,\ 2)$$

are considered.

Class of regular boundary conditions is found for which correct boundary value problems are possible.