LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК – 518.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Л. А. ПЕТРОСЯН

Мы будем рассматривать антагонистические дифференциальные игры с ограниченной продолжительностью, в которых каждый из игроков полностью управляет изменением своей позиционной переменной. Выигрыш терминальный.

Дадим формальное определение игры.

1. Игра антагонистическая.

2. Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{x}_i = f_i(x, \varphi), \ \varphi \in \Phi, \ i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

$$\dot{y}_i = g_i(y, \psi), \ \psi \in \Psi, \ i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ – управляющие переменные игроков I и II, Φ и Ψ – множества значений управляющих переменных, $x \in R^n$ – местоположение игрока I, $y \in R^n$ – местоположение игрока II, $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $g = (g_1, \dots, g_n)$ некоторые заданные вектор-функции.

3. В процессе игры игрок I и игрок II не могут покидать некоторого выпуклого, замкнутого множества $S \subset R^n$.

4. Продолжительность игры равна T.

5. На декартовом произведении множества S на себя задана некоторая вещественная функция $H(x, y)$. Целью игрока I является минимизация величины $H\big(x(T), y(T)\big)$, где $x(T), y(T)$ местоположения игроков в момент окончания игры. Игрок II преследует противоположную цель.

Рассматриваемая игра зависит от следующих параметров: начального местоположения игрока I, начального местоположения игрока II и продолжительности игры T, поэтому мы будем обозначать ее через $\Gamma(x, y, T)$.

Определение 1. Множество точек $C_P^T(x)$, в которые может попасть игрок I в момент времени T, используя всевозможные стратегии, из начального местоположения $x \in S$, называется множеством действия игрока I (множество действия представляет собой множество „достижимости", см. [1], при условии, что игрок I должен в процессе игры оставаться в множестве S). Аналогичным образом определяется множество действия игрока II, $C_E^T(y)$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что классы стратегий игроков таковы, что множества действия являются замкнутыми множествами.

Определение 2. Для любой пары точек $x, y \in S$ определим функцию $\hat{H}_T(x, y)$ следующим образом:

$$\hat{H}_T(x, y) = \max_{\eta \in C_E^T(y)} \min_{\xi \in C_P^T(x)} H(\xi, \eta).$$

Определение 3. Пусть

$$\hat{H}_T(x,\ y)=H(\xi,\ M).$$

Любая траектория $x^*(t)$, соединяющая точки x и ξ, будет называться условно оптимальной траекторией игрока I ($x^*(0)=x$, $x^*(T)=\xi$). Любая траектория $y^*(t)$, соединяющая точки y и M, будет называться условно оптимальной траекторией игрока II ($y^*(0)=y$, $y^*(T)=M$).

Определение 4. Множество точек $\{x, y\}$; $x,\ y\in S$ мы будем называть сингулярной поверхностью в игре $\Gamma(x,\ y,\ T)$, если существуют две различные точки η_1, η_2, такие что

$$\hat{H}_T(x,\ y)=H(\xi_1,\ \eta_1)=H(\xi_2,\ \eta_2).$$

Сингулярная поверхность называется дисперсионной поверхностью, если для любой пары условно оптимальных траекторий выполнено следующее: из того, что в какой-то момент времени $0\leqslant t\leqslant T$, $x^*(t)$, $y^*(t)\in \mathrm{DS}$ (дисперсионная поверхность) следует, что $t=0$. (То есть в ситуации равновесия оптимальные траектории не пересекают дисперсионной поверхности.)

Определение 5. Точка M называется центром игры $\Gamma(x,\ y,\ T)$, если

$$\hat{H}_T(x,\ y)=H(\xi,\ M).$$

Центр игры называется единственным и инвариантным, если он единственен и один и тот же во всех играх $\Gamma(x^*(t), y^*(t),\ T-t)$, где $x^*(t)$, $y^*(t)$ — условно оптимальные траектории.

В игре $\Gamma(x, y, T)$ в каждый момент времени игроки имеют полную информацию о состоянии системы в этот момент времени. Это означает, что им известны величины x, y, T. Поэтому стратегии φ, ψ будут являться некоторыми вектор-функциями от x, y, T со значениями в множествах Φ, Ψ.

Определим теперь верхнюю и нижнюю игру для игры $\Gamma(x, y, T)$.

Верхняя игра $\bar{\Gamma}(x, y, T)$ отличается от игры $\Gamma(x, y, T)$ состоянием информации игрока II. В этой игре игрок II, кроме информации о x, y, T, имеет в каждый момент времени полную информацию о выборе управления φ игроком I в этот момент времени. Это означает, что в игре $\bar{\Gamma}(x,\ y,\ T)$ стратегия игрока II представляет собой вектор-функцию от x, y, T, φ.

Нижняя игра $\Gamma(x, y, T)$ отличается от игры $\Gamma(x, y, T)$ состоянием информации игрока I. В ней игрок I кроме информации о x, y, T имеет в каждый момент времени полную информацию о выборе игроком II управления ψ в этот момент времени. Это означает, что в игре $\Gamma(x,\ y,\ T)$ стратегия игрока I представляет собой вектор-функцию от x, y, T, ψ.

Если существуют значения игр $\bar{\Gamma}(x,\ y,\ T)$, $\Gamma(x,\ y,\ T)$, $\Gamma(x,\ y,\ T)$ в чистых стратегиях, то мы будем их обозначать (значения игр) следующим образом

$$V(x,\ y,\ T)=\mathrm{Val}\,\Gamma(x,\ y,\ T),$$

$$\bar{V}(x,\ y,\ T)=\mathrm{Val}\,\bar{\Gamma}(x,\ y,\ T),$$

$$\underline{V}(x,\ y,\ T)=\mathrm{Val}\,\Gamma(x,\ y,\ T).$$

Теорема 1. *Если существует значение игры $\Gamma(x, y, T)$ в чистых стратегиях $V(x, y, T)$, то существуют значения игр $\bar{\Gamma}(x, y, T)$ и $\underline{\Gamma}(x, y, T)$ в чистых стратегиях и имеет место равенство*

$$\underline{V}(x, y, T)=V(x, y, T)=\bar{V}(x, y, T). \tag{4}$$

Доказательство. Докажем равенство

$$\underline{V}(x, y, T)=V(x, y, T), \tag{5}$$

доказательство равенства

$$\bar{V}(x, y, T)=V(x, y, T) \tag{6}$$

вполне аналогично. Пусть (φ^*, ψ^*) ситуация равновесия в игре $\Gamma(x, y, T)$. Из определения ситуации равновесия имеем

$$K(x, y; \varphi, \psi^*)\geqslant K(x, y; \varphi^*, \psi^*)\geqslant K(x, y; \varphi^*, \psi)^{*)} \tag{7}$$

для всех стратегий φ, ψ из игры $\Gamma(x, y, T)$. Отсюда немедленно следует, что стратегия φ^* является байесовской относительно ψ^* (то есть является наилучшим ответом на стратегию ψ^*). Пусть теперь стратегия φ из игры $\underline{\Gamma}(x, y, T)$ (использующая информацию об управлении ψ^*) является байесовской относительно ψ^* в игре $\Gamma(x, y, T)$. Это означает, что

$$K(x, y; \varphi, \psi^*)\geqslant K(x, y; \bar{\varphi}, \psi^*) \tag{8}$$

для всех стратегий φ из игры $\Gamma(x, y, T)$. Если

$$K(x, y; \varphi, \psi^*)=K(x, y; \boldsymbol{\varphi}, \psi^*),$$

то равенство (5) очевидно. Поскольку стратегия φ^* принадлежит множеству стратегий игрока I в игре $\underline{\Gamma}(x, y, T)$, то всегда имеет место

$$K(x, y; \varphi^*, \psi^*)\geqslant K(x, y; \bar{\varphi}, \psi^*). \tag{9}$$

Предположим, что в (9) в действительности имеет место строгое неравенство, то есть

$$K(x, y; \varphi^*, \psi^*)>K(x, y; \bar{\varphi}, \psi^*). \tag{10}$$

Определим стратегию $\boldsymbol{\varphi}$ по правилу

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y, T)=\bar{\varphi}\Big(x, y, T, \psi^*(x, y, T)\Big);$$

очевидно, стратегия φ является функцией только от x, y, T (использует информацию только о x, y, T) и, следовательно, принадлежит множеству стратегий игрока I в игре $\Gamma(x, y, T)$. То есть, из (8) имеем

$$K(x, y; \tilde{\varphi}, \psi^*)\geqslant K(x, y; \varphi^*, \psi^*),$$

с другой стороны, по определению

$$K(x, y; \tilde{\varphi}, \varphi^*)=K(x, y; \bar{\varphi}, \psi^*),$$

что вместе с (8) дает

$$K(x, y; \varphi^*, \psi^*)\leqslant K(x, y; \tilde{\bar{\varphi}}, \psi^*).$$

---

*) $K(x, y; \varphi, \psi)=H\Big(x(T), y(T)\Big)$ — выигрыш игрока I в ситуации (φ, ψ).

Однако это противоречит (10). Это означает, что в (9) всегда имеет место равенство

$$K(x,\ y;\ \varphi^*,\ \psi^*)=K(x,\ y;\ \bar{\varphi},\ \psi^*)$$

или $\underline{V}(x,\ y,\ T)=V(x,\ y,\ T)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в игре $\Gamma(x,\ y,\ T)$ существует единственный, инвариантный центр игры. Тогда существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, условно оптимальные траектории являются оптимальными, оптимальные стратегии игроков* I *и* II *заключаются в каждый момент в выборе направления условно оптимальной траектории и значение игры равно $\hat{H}_T(x,\ y)$.*

Доказательство. Пусть φ^*, ψ^* — стратегии игроков I и II, выбирающие в каждый момент времени направления условно оптимальных траекторий. В ситуации $(\varphi^*,\ \psi^*)$ функция выигрыша в точности равна $\hat{H}_T\ (x,\ y)$, так что для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство

$$K(x,\ y;\ \varphi,\ \psi^*)\geqslant \hat{H}_T(x,\ y)\geqslant K(x,\ y;\ \varphi^*,\ \psi) \tag{11}$$

для всех стратегий φ, ψ.

Докажем сперва левую сторону неравенства (11). Пусть φ — некоторая стратегия игрока I и пусть $x\ (T)$ — точка, в которую попадает игрок I в момент окончания игры в ситуации $(\varphi,\ \psi^*)$. Поскольку

$$\hat{H}_T(x,\ y)=\max\nolimits_{\eta\in C_E^T(y)}\min\nolimits_{\xi\in C_P^T(x)}H(\xi,\ \eta), \tag{12}$$

то для любой точки $\xi\in C_P^T(x)$ выполняется неравенство $\hat{H}_T(x,\ y)\leqslant H\ (\xi,\ M)$. В частности $\hat{H}_T(x,\ y)\leqslant H\Big(x(T),\ M\Big)$, что и доказывает левую сторону неравенства (11).

Докажем теперь правую сторону неравенства (11). Для доказательства рассмотрим вспомогательную игру $\Gamma_\Delta\ (x,\ y,\ T)$, в которой игрок I в каждый момент времени имеет полную информацию об отрезке траектории игрока II на время Δt вперед. Это означает, в частности, что в каждый момент времени t ему известна точка $y\ (t+\Delta\ t)$, в которую попадает игрок II через время $\Delta\ t$. Пусть теперь игрок II отклоняется от своей условно оптимальной траектории и в течение некоторого времени $\delta>\Delta\ t$ выбирает управление ψ, отличное от ψ^*. Так как центр игры единственен, то нацеливаясь из точки x на точку M', для которой

$$H(\xi',\ M')=\max\nolimits_{\eta\in C_E^{T-\Delta t}(y(\Delta t))}\min\nolimits_{\xi\in C_P^T(x)}H(\xi,\ \eta),$$

игрок I может всегда гарантировать, что он потеряет не более чем $\hat{H}_{T-\Delta t}\Big(x(\Delta\ t),\ y\ (\Delta\ t)\Big)$ (такое нацеливание действительно выполнимо из-за полной информации об отрезке траектории игрока II на время $\Delta\ t$ вперед). Однако

$$\hat{H}_{T-\Delta t}\Big(x\ (\Delta t),\ y\ (\Delta t)\Big)<\hat{H}_T(x,\ y), \tag{13}$$

поскольку из определения центра игры следует, что

$$H(\xi',\ M')<\min\nolimits_{\xi\in C_P^T(x)}H(\xi,\ M),$$

где M' – центр игры $\Gamma(x(\Delta t), y(\Delta t), T-\Delta t)$. Неравенство (13) выполнено при всех $\Delta t>0$. Устремим $\Delta t\to 0$. В предельной игре игрок I имеет информацию в выборе игрока II в каждый момент времени, и рассуждения подобные приведенным показывают, что неравенство (13) остается в силе, если выбор игрока в начальный момент времени не совпадает с направлением условно оптимальной траектории. Таким образом мы можем написать

$$\hat{H}_{T-0}\Big(x(+0),\ y(+0)\Big)<\hat{H}_T(x,\ y) \tag{14}$$

$\Big($игра $\Gamma\Big(x(+0), y(+0), T-0\Big)$ представляет собой игру, в которой зафиксированы выборы φ^*, ψ в начальный момент времени$\Big)$. Из (14) получаем

$$\hat{H}_{T-\delta}\Big(x(\delta),\ y(\delta)\Big)<\hat{H}_T(x,\ y) \tag{15}$$

для игры, в которой игрок I имеет информацию о выборе управления ψ в каждый момент времени. Для игры $\Gamma(x, y, T)$ отсюда сразу же следует правая сторона неравенства (11), поскольку игрок I всегда может себе гарантировать проигрыш не более чем $\hat{H}_{T-\delta}\Big(\ (x(\delta),\ y(\delta)\Big)$, если выбор II не совпадает с ψ^* на отрезке времени $[0,\ \delta]$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в игре $\Gamma(x,\ y,\ T)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, то утверждение теоремы 2 сохраняет свою силу и для игры* $\Gamma(x,\ y,\ T)$.

Доказательство немедленно следует из существования ситуации равновесия в игре $\Gamma(x,\ y,\ T)$ и теоремы 1.

Теоремы 2 и 3 показывают простой способ решения дифференциальных игр с терминальным выигрышем при наличии единственного, инвариантного центра игры. Можно показать, что во многих из игр преследования, которые рассмотрены в книге Р. Айзекса (см. [2]), центр игры действительно существует и является инвариантным. Ниже мы приведем несколько примеров дифференциальных игр и проиллюстрируем на них предыдущие определения и рассуждения.

Пример 1. Пусть множества действия игроков I и II таковы, что

$$\max_{\eta\in C_E^T(y)}\min_{\xi\in C_P^T(x)}H(\xi,\ \eta)=$$
$$=\min_{\xi\in C_P^T(x)}\max_{\eta\in C_E^T(y)}H(\xi,\ \eta) \tag{16}$$

и точка ξ^1, M, на которой достигается минимакс, единственна. Тогда точка M является инвариантным центром игры. Это следует из того, что точка ξ^1 принадлежит множеству $C_P^{T-t}\Big(x^*(t)\Big)$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$ и точка M принадлежит множеству $C_E^{T-t}\Big(y^*(t)\Big)$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$.

При выполнении равенства (16) игра $\Gamma(x,\ y,\ T)$ из дифференциальной, многошаговой, игры превращается в одновременную, одношаговую игру на множестве чистых стратегий $C_P^T(x)$, $C_E^T(y)$. Из (16) следует, что такая игра имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях. При этом оптимальная стратегия игрока I заключается в выборе точки ξ^1, а оптимальная стратегия игрока II заключается в выборе точки M. Отсюда мы получаем, что в соответствующей дифференциальной игре (при выполнении условия (16)) оптимальные стратегии игроков используют только информацию о местоположении игроков в начальный момент игры и продолжительности игры T. Непрерывное „слежение“ за противником является излишним.

Пример 2. Простое преследование.

Преследование происходит во всем евклидовом пространстве. Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{x}_i = U\varphi_i, \quad i=1,\dots,n, \quad \sum_1^n \varphi_i^2 = 1,$$

$$\dot{y}_i = V\psi_i \quad i=1,\dots,n, \quad \sum_1^n \psi_i^2 = 1,$$

где $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $u > v$.

Множество $C_P^T(x)$ представляет собой шар с центром в точке x и радиусом uT. Множество $C_E^T(y)$ представляет собой шар с центром в точке y и радиусом vT. Функция выигрыша определяется следующим образом

$$H\Big(x(T),\ y(T)\Big) = \rho\Big(x(T),\ y(T)\Big) = \sqrt{\sum_1^n \Big(x_i(T) - y_i(T)\Big)^2}\,.$$

Инвариантность центра игры и его единственность очевидна с геометрической точки зрения, и мы находимся в условиях применимости теоремы 2. При этом

$$\hat{\rho}_T(x,\ y) = \rho(x,\ y) - (u-v)T,$$

следовательно

$$V(x,\ y,\ T) = \rho(x,\ y) - (u-v)T.$$

Оптимальная стратегия игрока I заключается в преследовании по погонной линии центра игры (вектор скорости игрока I все время направлен на центр игры). В ситуации равновесия оба игрока перемещаются по прямой, проходящей через точки x, y.

В случае, когда множества действия игроков I и II не пересекаются, $C_P^T(x) \cap C_E^T(y) = \Lambda$,

$$\max_{\eta \in C_E^T(y)} \min_{\xi \in C_P^T(x)} \rho(x,\ y) = \min_{\xi \in C_P^T(x)} \max_{\eta \in C_E^T(y)} \rho(x,\ y),$$

и мы находимся в условиях примера 1.

Пример 3. Простое преследование в полуплоскости.

Преследование происходит в полуплоскости S. Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{x}_i = u\varphi_i, \quad i=1,\dots,\ n, \quad \sum_1^n \varphi_i^2 = 1,$$

$$\dot{y} = v\,\psi_i, \quad i=1,\dots,\ n, \quad \sum_1^n \psi_i^2 = 1,$$

где $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ $u > v$.

Множество $C_P^T(x)$ представляет собой пересечение круга с центром в точке x и радиусом uT с полуплоскостью S. Множество $C_E^T(y)$ представляет собой пересечение круга с центром в точке y и радиусом vT с полуплоскостью S. Игра отличается от игры „простое преследование" только из тех начальных позиций, из которых центр игры принадлежит границе множества S. Функция выигрыша та же, что и в примере 2. В этом случае также существует инвариантный и единственный центр игры из всех начальных позиций, не находящихся на одном перпендикуляре к границе множества S. Выберем систему координат таким образом, чтобы граница полуплоскости S соответствовала многообразиям $x_2=0$, $y_2=0$. Тогда, используя теорему 2, получаем, что функция значения игры равна

$$V_1(x,\ y,\ T)=\sqrt{[x_1-y_1+\sqrt{(vT)^2-y_2^2}]^2+x_2^2}-uT$$

в области

$$x_1-y_1>0$$

и

$$V_2(x,\ y,\ T)=\sqrt{[x_1-y_1-\sqrt{(vT)^2-y_2^2}]^2+x_2^2}-uT$$

в области

$$x_1-y_1<0.$$

Множество точек $x_1=y_1$ образует дисперсионную поверхность (два центра преследования). Более подробно об этой игре см. [3].

Пример 4. Динамическая игра преследования при наличии сил трения.

Преследование происходит во всей плоскости. Кинематические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{q}_i=p_i, && \varphi_1^2+\varphi_2^2=1,\\ &\dot{r}_i=s_i, && \psi_1^2+\varphi_2^2=1,\\ &\dot{p}_i=\alpha\varphi_i-k_Pp_i, && i=1,\ 2.\\ &\dot{s}_i=\beta\psi_i-k_Es_i, && \end{aligned}$$

Здесь q — местоположение игрока I, r — местоположение игрока II, p — импульс игрока I, s — импульс игрока II. Функция выигрыша определяется следующим образом:

$$H\Big(q(T),\ r(T)\Big)=\rho\Big(q(T),\ r(T)\Big)=\sqrt{\sum_1^2\Big(q_i(T)-r_i(T)\Big)^2}.$$

Множество $C_P^T(q)$ представляет собой круг с радиусом

$$R_P=\alpha\,\frac{e^{-k_PT}+k_PT-1}{k_P^2},$$

с центром в точке

$$\bar{q}=q+p\,\frac{1-e^{-k_PT}}{k_P},$$

где q, p — начальные местоположения игроков I и множество $C_E^T(r)$ представляет собой круг радиуса

$$R_E=\beta\,\frac{e^{-k_ET}+k_ET-1}{k_E^2},$$

с центром в точке

$$\bar{r} = r + s\frac{1-e^{-k_E T}}{k_E},$$

где r, s — начальное местоположение игрока II. Сделаем следующее предположение:

$$\alpha > \beta,$$

$$\frac{\alpha}{k_P} > \frac{\beta}{k_E} \tag{17}$$

(см. [4]). Единственная сингулярная поверхность имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2} \left[q_i - r_i + p_i\frac{1-e^{-k_P T}}{k_P} - s_i\,\frac{1-e^{-k_E T}}{k_E}\right]^2 = 0. \tag{18}$$

(Условие (18) означает совпадение центров кругов действия.) Во всех остальных случаях существует единственный, инвариантный центр преследования, и мы находимся в условиях применимости теоремы 2. Нетрудно показать, что

$$V(q,\ p,\ r,\ s,\ T) = \sqrt{\sum_{1}^{2}\left(q_i - r_i + p_i\frac{1-e^{-k_P T}}{k_P} - s_i\,\frac{1-e^{-k_E T}}{k_E}\right)^2} -$$

$$-\left(\alpha\,\frac{e^{-k_P T} + k_P T - 1}{k_P^2} - \beta\,\frac{e^{-k_E T} + k_E T - 1}{k_E^2}\right).$$

Тот же самый результат может быть получен интегрированием уравнения Айзекса (более подробно об этом см. [5]).

В случае, когда коэффициенты трения $k_P = 0$, $k_E = 0$, из тех же соображений удается найти функцию значения игры в явном виде для преследования в евклидовом пространстве R_n. Она имеет вид

$$V(q,\ p,\ r,\ s,\ T) = \left\{\sum_{n=1}^{n}\left[q_i - r_i + (pi - s_i)T\right]\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{(\alpha-\beta)T^2}{2}.$$

Этот результат впервые получен в [6].

Помимо примеров 1—4 можно привести и более сложные примеры, например, „игра двух автомобилей“ (в областях, ограниченных эквивокальной поверхностью (см. [2], [7])), „сумасшедший шофер“ и др., в которых существует инвариантный, единственный центр игры.

Существование инвариантного, единственного центра игры определяется чисто геометрическими свойствами множества действия игрока I и игрока II. В некоторых случаях эти множества имеют простой геометрический вид. Примером могут служить области действия в играх во всем пространстве, кинематические уравнения в которых являются линейными, а на управляющие переменные наложено ограничение вида $|\varphi| \leqslant 1$, $|\psi| \leqslant 1$. Несмотря на сложную кинематику, они во многих случаях оказываются просто кругами (см. [8]) или эллипсоидами (см. [9]). Простая геометрическая природа множеств действия позволяет легко проверить условия теоремы 2.

В задачах преследования ($H(x, y)=\rho(x, y)$), если множества действия игроков являются n-мерными шарами, легко показать, что если

$C_P^T(x) \cap C_E^T(y)=\Lambda$, то

$$\max_{\eta \in C_E^T(y)} \min_{\xi \in C_P^T(x)} \rho(x, y)=\min_{\xi \in C_P^T(x)} \max_{\eta \in C_E^T(y)} \rho(x, y).$$

Кроме того центр преследования в этом случае оказывается единственным и совпадает с точкой пересечения линии центров шаров $C_P^T(x)$ и $C_E^T(y)$ со сферой шара $C_E^T(y)$, наиболее удаленной от точки x. По теореме 1 существует единственный, инвариантный центр преследования (центр игры в задачах преследования естественно называть центром преследования). Если же шары $C_P^T(x)$ и $C_E^T(y)$ пересекаются, то следующее условие является достаточным для существования единственного, инвариантного центра преследования (оно, конечно, далеко не необходимо). Пусть $R_P^T(x)$ — радиус шара $C_P^T(x)$ и $R_E^T(y)$ — радиус шара $C_E^T(y)$. Тогда для того, чтобы существовал единственный инвариантный центр преследования, достаточно, чтобы

$$R_P^T\left(x^*(t)\right) > R_E^T\left(y^*(t)\right), \tag{19}$$

где $x^*(t)$, $y^*(t)$ — произвольная пара условно оптимальных траекторий.

В примере 2 условие (19) превращается просто в $u>v$. Скорость преследователя по модулю больше скорости преследуемого.

В динамической игре преследования (пример 4) при отсутствии трения, $k_P=k_E=0$ условие (19) превращается просто в $\alpha>\beta$. Величина силы преследователя больше силы преследуемого.

Пример невыполнения условия (19). Игра „изотропная ракета", рассмотренная Р. Айзексом в [2]. Кинематические уравнения преследователя имеют вид

$$\dot{q}_i=p_i, \qquad \varphi_1^2+\varphi_2^2=1,$$
$$\dot{p}_i=\alpha\varphi_i, \qquad i=1, 2,$$

а для преследуемого

$$\dot{r}_1=v\varphi_i, \qquad i=1, 2, \qquad \varphi_1^2+\varphi_2^2=1.$$

Множество действия $C_P^T(q)$ представляет собой круг с центром в точке

$$\bar{q}_i=q_i+p_iT, \qquad i=1, 2,$$

и с радиусом

$$R_P^T(q)=\alpha\,\frac{T^2}{2}.$$

Множество действия преследуемого $C_E^T(r)$ представляет собой круг с центром в точке r и с радиусом vT. Очевидно, что при любой заданной продолжительности игры T существует такое $0<T'<T^2$, что

$$\alpha\frac{(T')^2}{2}<vT',$$

то есть нельзя гарантировать выполнение неравенства (19). Не смотря на это, можно показать, что в игре „изотропная ракета" (конечно при $\hat{\rho}_T(q, r)>0$) при некоторых α, v, T, существует единственный, инвариантный центр преследования и значение игры равно

$$V(q, p, r, T)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(q_i+p_iT-r_i)^2}+vT-\alpha\frac{T^2}{2}.$$

Ленинград

Поступило в редакцию
8.VII.1967

Литература

1. Н. Н. Красовский, Об одной задаче преследования, ПММ, 27, в. 2, 1963.
2. Р. Айзекс, Дифференциальные игры, Москва, 1967.
3. Л. А. Петросян, Дисперсионные поверхности в играх преследования, ДАН Арм ССР, **XLIII**, вып. 4, 1966.
4. Л. С. Понтрягин, К теории дифференциальных игр, УМН, 21, в. 4(130), 1966
5. Л. А. Петросян, Динамическая игра преследования при наличии сил трения ДАН Арм ССР, **XLIV**, в. 1, 1967.
6. Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов, Одна динамическая игра преследования, ДАН СССР, 172, № 6, 1967.
7. Э. Н. Симакова, Об одной дифференциальной игре преследования, Автоматика и телемеханика, № 2, 1967.
8. Н. В. Мурзов, О некоторых дифференциальных играх, Канд. дисс., ЛГУ, 1967.
9. Н. Н. Красовский, В. Е. Третьяков, К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил, Дифференциальные уравнения, 2, № 5, 1966.

PERSEKIOJIMO LOŠIMAI SU NEPRIKLAUSOMAIS JUDESIAIS

L. PETROSIANAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjami aprėžtos trukmės diferencialiniai lošimai su nepriklausomais judesiais. Pateikiamas geometrinis sprendimo metodas (lokalinis), pagrįstas kai kuriais lošimo invariantais. Metodas iliustruojamas pavyzdžiais.

DIFFERENTIAL GAMES WITH INDEPENDENT MOTIONS

L. A. PETROSJAN

(*Summary*)

We investigate differential games with prescribed duration and independent motions, and give a "geometric" method of finding the solution in "small" which is based on some invariants of the game. Further we show a number of examples wich could be solved using this method.