LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. ПИПИРАС, В. СТАТУЛЯВИЧУС

§ 1. Обозначения

Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

с $\qquad \mathbf{M}\xi_k=0$ и $\mathbf{D}\xi_k=\sigma_k^2>0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Введем обозначения

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad Z_n=\frac{S_n}{B_n},\quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad \mathbf{M}|\xi_k|^{\nu}=\beta_{\nu k},$$

$$B_{\nu n}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{\nu k},\quad L_{\nu n}=\frac{B_{\nu n}}{B_n^{\nu}},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Функцию распределения некоторой случайной величины ξ обозначим через F_ξ, плотность $-p_\xi$, характеристическую функцию $-f_\xi$. Нам еще понадобится симметризованная случайная величина $\tilde{\xi}$ с функцией распределения

$$\tilde{F}_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_\xi(x+y)\,dF_\xi(y),$$

плотностью $\tilde{p}_\xi$ и характеристической функцией

$$\tilde{f}_\xi(t)=|f_\xi(t)|^2.$$

Пусть Φ и φ обозначают (0,1) – нормальную функцию распределения и плотность, соответственно,

$$\Phi_{s-1,n}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-3}Q_{\nu n}(x)L_{\nu+2,n},$$

где

$$Q_{\nu n}(x)=\sum_{m=1}^{3\nu}a_{m\nu n}x^{m-1}\ \text{(см. [2])},$$

$$\varphi_{s-1,n}(x)=\frac{d}{dx}\,\Phi_{s-1,n}(x),$$

$$h_{s-1,n}(t)=\int e^{itx}\varphi_{s-1,n}(x)\,dx=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_{\nu n}(it)L_{\nu+2,n}\right),$$

где

$$P_{\nu n}(it)=\sum_{m=1}^{\nu}c_{m\nu n}(it)^{\nu+2m}.$$

Коэффициенты $a_{m\nu n}$ и $c_{m\nu n}$ равномерно ограничены относительно n (см. [2]). Там же даны выражения этих коэффициентов.

Через $\Theta_{l,\ldots}$ обозначим величины, зависящие только от индексов.

В случае, когда существуют плотности случайных величин последовательности (1), нам понадобятся функции $\alpha(\mathfrak{M}_k, N)$ и $l_n(N)$, введенные в работе [2]. Набор непересекающихся интервалов Δ_{ki} длины $|\Delta_{ki}|$ и положительных констант $C_{ki}\leqslant\infty$ обозначим $\mathfrak{M}_k=\{\Delta_{ki}, C_{ki}, i=1, 2, \ldots\}$.

Тогда

$$\alpha(\mathfrak{M}_k, N)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{ki}}{(|\Delta_{ki}|+2N)^2C_{ki}^2}, \tag{2}$$

где $N>0$ и

$$Q_{ki}=\int\limits_{\Delta_{ki}}\min\{C_{ki}, \tilde{p}_{\xi_k}(x)\}\,dx.$$

Функция $l_n(N)$ определяется равенством

$$l_n(N)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\leqslant N}x^2d\tilde{F}_{\xi_k}(x),\quad N>0. \tag{3}$$

Свойства этих функций для некоторых отдельных случаев рассмотрены в работе [2].

В случае, когда величины (1) последовательности решетчатые и принимающие только целочисленные значения, следуя статье [3], обозначим

$$p_{klm}=\mathbf{P}\{\xi_k=m\},\quad \tilde{p}_{klm}=\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_k=m\},$$

$$l_n(N)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|m|\leqslant N}m^2\tilde{p}_{klm},\quad N>0, \tag{4}$$

$$\alpha_k(a, q, N)=\frac{1}{q^2}\sum_r{}^{*}r^2\mathbf{P}\{a\tilde{\xi}_k\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q),\ |\tilde{\xi}_k|\leqslant N\}, \tag{5}$$

где $\sum\limits_r{}^{*}$ означает суммирование по всем абсолютно наименьшим вычетам по модулю q, т. е. по $-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}$.

§ 2. Асимптотические разложения для плотностей

Теорема 1. *Если* $\mathbf{M}|\xi_k|^s<\infty$ *(для целых* $s\geqslant 3$*), существуют плотности* $p_{\xi_k}(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$, *и* $p_{\xi_i}(x)\leqslant C_i<\infty$, $i=1, 2, \ldots, n_0$, *то*

а) *при* $n_0=l+4$ *имеем*

$$|x|^l|p_{Z_n}(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|\leqslant\Theta_{l,s}L_{sn}+\bar{\Theta}_{l,s}l_n(N_n)^{-\frac{3s+l-5}{2}}(L_{sn}+L_{sn}^2)+$$
$$+\Theta_l\,l_n^{-\frac{1}{2}}(N_n)\,N_n(1+L_{ln}^l+L_{sn})\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\alpha(\mathfrak{M}_k, N_n)\right\}\times$$
$$\times\max_{1\leqslant r_i\leqslant l+4}\left[\prod_{i=1}^{4}C_{r_i}^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{\frac{1}{4}}\right],\quad l=0, 1, \ldots, s, \tag{6}$$

б) *при* $n_0=r+2$ *имеем*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |p_{Z_n}(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|^2 |x|^{2r}dx \leqslant \Theta'_{r,s} L^2_{sn} + \Theta'_{r,s} l_n^{-\frac{6s+2r-11}{2}}(N_n)(L^2_{sn}+$$

$$+L^4_{sn})+\Theta'_r(1+L^{2r}_{1n}+L^2_{sn}) l_n^{-\frac{1}{2}}(N_n) N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha(\mathfrak{M}_k,\ N_n)\right\}\times$$

$$\times \max_{1\leqslant r_i\leqslant r+2}\left[\prod_{i=1}^{2} C_{r_i}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right],\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ s, \qquad (7)$$

для любых $N_n>0$, *для которых* $l_n(N_n)>0$, *и для любых наборов* $\mathfrak{M}_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Замечание. Если $N_n=4B_nL_{3n}$, то $l_n(N_n)\geqslant 1$. Кроме того, всегда $L_{1n}\leqslant\sqrt{n}$.

Следствие. *Если* $n_0=6$, *то*

$$\sup_B \left|\mathbf{P}\{Z_n\in B\}-\int\limits_B \varphi_{s-1,n}(x)\,dx\right| \leqslant \Theta''_s L_{sn}+\bar{\Theta}''_s l_n^{-\frac{3(s-1)}{2}}(N_n) L_{sn}+$$

$$+\Theta'' l_n^{-\frac{1}{2}}(N_n) N_n(1+L^2_{1n})\cdot\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\alpha(\mathfrak{M}_k,\ N_n)\right\}\max_{1\leqslant r_i\leqslant 6}\left[\prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{\frac{1}{4}}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{\frac{1}{4}}\right],$$

где sup *берется по всем борелевским множествам прямой.*

Справедливость последнего утверждения следует из равенства

$$\sup_B \left|\mathbf{P}\{Z_n\in B\}-\int\limits_B \varphi_{s-1,n}(x)\,dx\right| = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|p_{Z_n}(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|\,dx$$

и из неравенства (6) при $l=2$.

Для сравнения выводов теоремы 1 с результатами ([6], [7], [8]) В. В. Петрова отметим, что последнее слагаемое в выражении (6) при $l=0$ можно заменить интегралом

$$B_n \int\limits_{|t|>\pi N_n^{-1}} \prod_{k=1}^{n} |f_{\xi_k}(t)|\,dt,$$

а последнее слагаемое в выражении (7) при $r=0$ можно заменить интегралом

$$B_n \int\limits_{|t|>\pi N_n^{-1}} \prod_{k=1}^{n} |f_{\xi_k}(t)|^2\,dt.$$

Нижеследующие соображения показывают, что теоремой 1 улучшаются результаты [5] П. Сурвилы.

Обозначим

$$\sigma^2_{k_1}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma^2_k,\quad \sigma^2_{k_i}=\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq k_1,\ldots,k_{i-1}}}\sigma^2_k,\quad i=2,\ \ldots,\ n_0.$$

Если, следуя работе [5], потребуем выполнения условий

$$p_{\xi_k}(x)\leqslant C_k,\quad C_k^2\sigma_k^2\leqslant M<\infty,\quad k=1,\ 2,\ \dots,\ n,\quad \text{то}$$

$$\int\limits_{|x|\leqslant 2\sigma_k} x^2 d\bar F_{\xi_k}(x)\geqslant \frac{\sigma_k^2}{2^8 M},\quad k=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Поэтому можем положить $N_n=2\sigma_{k_{n_0}}$.

Тогда

$$l_n(N_n)\geqslant \frac{1}{2^8 M}+\varepsilon_n,\quad \text{где } \varepsilon_n\to 0\,(n\to\infty),$$

сли $L_{sn}\to 0\,(n\to\infty)$.

Так как в исследуемом случае $C_k<\infty$, $k=1,\ \dots,\ n$, то вместо

$$N_n\cdot \max_{1\leqslant r_i\leqslant n_0}\left[\prod_{i=1}^{i_0} C_{r_i}^{\frac{1}{i_0}}\left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{\frac{1}{i_0}}\right],\quad i_0=2,\ 4,$$

можем взять

$$2\sigma_{k_{n_0}}\max_{r_i\in(k_1,\dots,k_{n_0})}\left[\prod_{i=1}^{i_0}\left(\frac{\sqrt{M}}{\sigma_{r_i}}+\frac{\pi\sqrt{M}}{4\sqrt{2}\,\sigma_{k_{n_0}}}\right)^{\frac{1}{i_0}}\right]\leqslant\left(2+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{M}.$$

Далее, если $\mathfrak{M}_k=\{\Delta_{k1},\ C_{k_1}\}$, $\Delta_{k_1}=(-2\sigma_k,\ 2\sigma_k)$, $C_{k_1}=C_k$, то

$$\alpha(\mathfrak{M}_k,\ N_n)=\frac{Q_{ki}^3}{(4\sigma_k+2N_n)^2C_k^2}\geqslant\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{(\sigma_k^2+N_n^2)\,C_k^2}$$

и

$$\exp\left\{-a\sum_{k=1}^{n}\alpha(\mathfrak{M}_k,\ N_n)\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{a}{2^8}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sigma_k^2+4\sigma_{k_{n_0}}^2)C_k^2}\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{aB_n^2}{5\cdot 2^8 M\sigma_{k_1}^2}\right\},$$

где $a>0$ — любое число.

Еще заметим, что $\frac{B_n}{\sigma_{k_1}}\geqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$ и что в работе П. Сурвилы имеется условие $L_{1n}\leqslant B_n^{R-1}$, где R конечное положительное число.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем неравенство (6).

Известно, что

$$2\pi|x|^l|p_{Z_n}(x)-\varphi_{s-1,n}(x)|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_{Z_n}^{(l)}(t)-h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{8}$$

где

$$I_1=\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}}|f_{Z_n}^{(l)}(t)-h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)|\,dt,$$

$$I_2=\int\limits_{|t|>L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}}|h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)|\,dt,$$

$$I_3=\int\limits_{L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}<|t|\leqslant\frac{\pi B_n}{N_n}}|f_{Z_n}^{(l)}(t)|\,dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{|t| > \frac{\pi B_n}{N_n}} |f_{Z_n}^{(l)}(t)|\, dt, \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Для оценки I_1 применяется

Лемма 1. *Если* $L_{sn} \to 0\,(n \to \infty)$, *то при* $|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$ *имеют место соотношения*

$$|f_{Z_n}^{(l)}(t) - h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)| \leqslant \Theta_{l,\,s}\, e^{-\frac{t^2}{3}} L_{sn} \{ |t|^{s-l} + |t|^{3(s-2)+l} \},$$

$$l=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Лемма доказана в работе [4]. Следуя тому же способу доказательства, видим, что лемма справедлива и при условии $L_{sn} < 1$. Тогда в случае $L_{sn} < 1$ имеем

$$I_1 \leqslant \Theta_{l,\,s} L_{sn} \int\limits_{|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}} e^{-\frac{t^2}{3}} \{ |t|^{s-l} + |t|^{3(s-2)+l} \}\, dt = \Theta_{l,\,s} L_{sn}.$$

Если $L_{sn} \geqslant 1$, то $L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}} < 1$ и поэтому при $|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$ имеем $|h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)| \leqslant \Theta_{l,\,s} L_{sn}$, а также согласно (14) справедливо неравенство

$$|f_{Z_n}^{(l)}(t)| \leqslant \Theta_l L_{sn}.$$

Тогда при $L_{sn} \geqslant 1$ имеем

$$I_1 \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \left(|f_{Z_n}^{(l)}(t)| + |h_{s-1,\,n}^{(l)}(t)| \right) dt \leqslant \Theta_{l,\,s} L_{sn}.$$

Окончательно,

$$I_1 \leqslant \Theta_{l,\,s} L_{sn}, \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$I_2 \leqslant \Theta_{l,\,s} L_{sn}, \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ s. \tag{10}$$

Оценка I_3. Для оценки I_3 нам понадобится оценить $f_{Z_n}^{(l)}(t)$. Имеем

$$f_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right).$$

Обозначим

$$f_{Z_n,\,k_1}(t) = \prod_{\substack{k=1\\ k \neq k_1}}^{n} f_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right),\ \ldots,\ f_{Z_n,\,k_1,\ldots,k}(t) = \prod_{\substack{k=1\\ k \neq k_1 \neq \ldots \neq k_l}}^{n} f_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right),$$

$$l=1,\ \ldots,\ s.$$

Методом индукции (см. [5], стр. 183) получаем формулу

$$f_{Z_n}^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m_{1j}+\cdots+m_{jj}=l\\ m_{\nu j}>0,\ \nu=1,\ldots,j}} A_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(l) \sum_{k_1=1}^{n} f_{\xi_{k_1}}^{(m_{1j})}\left(\frac{t}{B_n}\right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{k_2=1\\k_2\neq k_1}}^{n} f_{\xi_{k_2}}^{(m_{2j})}\left(\frac{t}{B_n}\right)\cdots \sum_{\substack{k_j=1\\k_j\neq k_1\neq\cdots\neq k_{j-1}}}^{n} f_{\xi_{k_j}}^{(m_{jj})}\left(\frac{t}{B_n}\right) f_{Z_n,k_1,\ldots,k_j}(t),$$

$$l=1,\ 2,\ \ldots,\ s, \tag{11}$$

где $A_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(l)$ зависят только от l.

Так как $\mathbf{M}\xi_k=0$ и

$$f_{\xi_k}^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ix}{B_n}e^{\frac{itx}{B_n}}dF_{\xi_k}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ix}{B_n}dF_{\xi_k}(x)+$$

$$+\frac{i^2t}{B_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{\frac{i\Theta_k tx}{B_n}}dF_{\xi_k}(x),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_{\xi_k}^{(1)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant|t|. \tag{12}$$

Также

$$\left|f_{\xi_k}^{(\nu)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\beta_{\nu k}}{B_n^{\nu}},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_{\xi_k}^{(\nu)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant L_{\nu n},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{13}$$

Из (11), согласно (12) и (13), получаем

$$|f_{Z_n}^{(l)}(t)|\leqslant\Theta_l\{1+\min(|t|^l,\ L_{1n}^l)+L_{sn}\}\times$$

$$\times\max_{1\leqslant k_1\neq k_2\neq\cdots\neq k_l\leqslant n}|f_{Z_n,k_1,\ldots,k_l}(t)|,\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{14}$$

Обозначим

$$I_k(t)=\frac{1}{2}\left(1-|f_{\xi_k}(2\pi t)|^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\pi tx\cdot p_{\tilde\xi_k}(x)\,dx,\quad k=1,\ \ldots,\ n \tag{15}$$

и

$$\bar I_n(t)=\sum_{k=1}^{n}I_k(t). \tag{16}$$

Тогда

$$|f_{\xi_k}(2\pi t)|\leqslant\exp\{-I_k(t)\},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$|f_{S_n}(2\pi t)|\leqslant\exp\{-\bar I_n(t)\}, \tag{17}$$

$$\max_{1\leqslant k_1\neq\cdots\neq k_l\leqslant n}|f_{Z_n,k_1,\ldots,k_l}(2\pi B_n t)|\leqslant\exp\left\{-\min_{1\leqslant k_1\neq\cdots\neq k_l\leqslant n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_1\neq\cdots\neq k_l}}^{n}I_k(t)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\bar I_n(t)+\max_{1\leqslant k_1\neq\cdots\neq k_l\leqslant n}\left(I_{k_1}(t)+\cdots+I_{k_l}(t)\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{l}{2}}\exp\{-\bar I_n(t)\},\quad l=1,\ \ldots,\ s. \tag{18}$$

Так как $|\sin\pi\alpha|\geqslant2(\alpha)$, где (α) означает расстояние α до ближайшего целого числа, то

$$\bar{I}_n(t) \geqslant \sum_{k=1}^{n} 4 \int_{-\infty}^{\infty} (tx)^2 \tilde{p}_{\xi_k}(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} 4 \int_{|x|<\frac{1}{2|t|}} (tx)^2 \tilde{p}_{\xi_k}(x)\,dx =$$

$$= 4t^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\frac{1}{2|t|}} x^2 \tilde{p}_{\xi_k}(x)\,dx = 4t^2 B_n^2 l_n\left(\frac{1}{2|t|}\right) \tag{19}$$

и

$$\max_{1\leqslant k_1\neq\cdots\neq k_l\leqslant n} |f_{Z_n, k_1, \ldots, k_l}(t)| \leqslant e^{\frac{l}{2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{\pi^2}\, l_n\left(\frac{\pi B_n}{|t|}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{l}{2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{\pi^2}\, l_n(N_n)\right\}, \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s, \tag{20}$$

если $|t| \leqslant \frac{\pi B_n}{N_n}$.

Согласно (14) и (20), имеем

$$I_3 \leqslant \Theta_l \int_{L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi B_n}{N_n}} \{1 + L_{sn} + |t|^l\} \exp\left\{-\frac{t^2}{\pi^2}\, l_n(N_n)\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_l \int_{|t|\geqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}} \{1 + L_{sn} + |t|^l\} \exp\left\{-\frac{t^2}{\pi^2}\, l_n(N_n)\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_{l,s}\, l_n^{-\frac{3s+l-5}{2}}(N_n)(L_{sn} + L_{sn}^2), \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{21}$$

При $l=0$ в правой части неравенства (21) слагаемое L^2_{sn} можем пропустить, так как при этом случае на месте $f_{Z_n, k_1, \ldots, k_l}(t)$ имеем $f_{Z_n}(t)$.

При оценке I_3 использованы неравенства

$$\int_a^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqslant e^{-\frac{a^2}{2}}[a^{k-1} + a^{-1}], \quad k = 0,\ 1,\ \ldots, \quad \text{где} \quad a > 0,$$

и

$$e^{-x} < e^{-m} m^m x^{-m}, \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Оценка I_4. Согласно (11) и (13), имеем

$$I_4 \leqslant \int_{|t|>\frac{\pi B_n}{N_n}} \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m_{1j}+\cdots+m_{jj}=l \\ m_{\nu j}>0,\ \nu=1,\ldots,j}} A_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(l) \sum_{k_1=1}^{n} \left| f_{\xi_{k_1}}^{(m_{1j})}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \times$$

$$\times \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2\neq k_1}}^{n} \left| f_{\xi_{k_2}}^{(m_{2j})}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \cdots \sum_{\substack{k_j=1 \\ k_j\neq k_1\neq\cdots\neq k_{j-1}}}^{n} \left| f_{k_j}^{(m_{jj})}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^{1} f_{Z_n, k_1, \ldots, k_j}(t)\,|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m_{1j}+\cdots+m_{jj}=l \\ m_{\nu j}>0,\ \nu=1,\ldots,j}} A_{m_{1j},\ \ldots,\ m_{jj}}(l) \sum_{k_1=1}^{n} \frac{\beta_{m_{1j},k_1}}{B_n^{m_{1j}}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2\neq k_1}}^{n} \frac{\beta_{m_{2j},k_2}}{B_n^{m_{2j}}} \cdots$$

$$\sum_{\substack{k_j=1 \\ k_j\neq k_1\neq\cdots\neq k_{j-1}}}^{n} \frac{\beta_{m_{jj},k_j}}{B_n^{m_{jj}}} \int_{|t|>\frac{\pi B_n}{N_n}} |f_{Z_n, k_1, \ldots, k_j}(t)|\,dt. \tag{22}$$

Далее

$$\bar{I}_4=\int\limits_{|t|>\frac{\pi B_n}{N_n}}|f_{Z_n,k_1,\dots,k_j}(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n\int\limits_{|t|>\frac{1}{2N_n}}\prod_{i=1}^{n-j-4}{}'|f_{\xi_{l_i}}(2\pi t)|\prod_{r=1}{}''|f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n\int\limits_{|t|>\frac{1}{2N_n}}\exp\Big\{-\Big[\bar{I}_n(t)-$$

$$-\Big(I_{k_1}(t)+\cdots+I_{k_j}(t)+I_{r_1}(t)+\cdots+I_{r_4}(t)\Big)\Big]\Big\}\cdot\prod_{i=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n e^{\frac{j+4}{2}}\int\limits_{|t|>\frac{1}{2N_n}}\exp\{-\bar{I}_n(t)\}\prod_{i=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|\,dt, \tag{23}$$

$j\leqslant l$, $l=1,\ 2,\ \dots,\ s$, где Π'' означает произведение по индексам r_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, неравным $k_1,\ \dots,\ k_j$ и не превосходящим $j+4$, а Π' означает произведение по индексам l_i, неравным $k_1,\ \dots,\ k_j,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$.

Лемма 2. *Пусть*

$$J_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(xt)^2\tilde{p}_{\xi_k}(x)\,dx.$$

Тогда для любых $n\geqslant 1$ и $N_n>0$ существует такое разбиение

$$\cdots t_{-1}^{(n)}<t_0^{(n)}=0<t_1^{(n)}<t_2^{(n)}<\cdots$$

интервала $(-\infty,\ \infty)$ с условием

$$\frac{1}{6N_n}\leqslant t_{k+1}^{(n)}-t_{k0}^{(n)}\leqslant\frac{1}{4N_n},$$

что

$$J_n(t)\geqslant\frac{1}{2}\,l_n(N_n)(t-t_{k0}^{(n)})^2B_n^2,$$

сли $t\in[t_k^{(n)},\ t_{k+1}^{(n)}]$, причем $t_{k0}^{(n)}$ при данном n в зависимости от k равно или е$t_k^{(n)}$, или $t_{k+1}^{(n)}$.

Лемма 2 доказана в работе [2].

Пусть $t_k^{(n)}$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$ — разбиение из леммы 2. Тогда согласно этой лемме и тому, что $\bar{I}_n(t)\geqslant 4J_n(t)$ (см. (19)), имеем

$$\bar{I}_n(t)\geqslant 2l_n(N_n)(t-t_{k0}^{(n)})^2B_n^2, \tag{24}$$

при $t\in[t_k^{(n)},\ t_{k+1}^{(n)}$.

Лемма 3. *Для любого набора $\mathfrak{M}_k=\{\Delta_{ki},\ C_{ki},\ i=1,\ 2,\ \dots\}$ при любом $-\infty<t<\infty$ имеет место оценка*

$$I_k(t)\geqslant\frac{t^2}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{ki}^3}{(|\Delta_{ki}|\,|t|+1)^2C_{ki}^2}.$$

Лемма доказана в работе [2] на странице 651. Здесь использованы обозначения (2) и (15).

Вспомнив (2) и (16) и опираясь на лемму 3, кроме оценки (24), получаем еще оценку

$$\bar{I}_n(t) \geqslant \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \alpha\left(\mathfrak{M}_k, \frac{1}{2|t|}\right) \tag{25}$$

при любом $-\infty < t < \infty$.

Наименьшее значение правой стороны неравенства (25) при $|t| \geqslant \frac{1}{2N_n}$ равно

$$M_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \alpha(\mathfrak{M}_k, N_n).$$

Оценив в равенстве $\bar{I}_n(t) = \frac{3}{4} \bar{I}_n(t) + \frac{1}{4} \bar{I}_n(t)$ первый и второй члены, соответственно согласно (25) и (24), получаем

$$\bar{I}_4 \leqslant 2\pi B_n e^{\frac{j+4}{2}} e^{-\frac{3}{4} M_n} \sum_k \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} l_n(N_n)(t - t_{k0}^{(n)})^2 B_n^2 \times\right.$$

$$\times \prod_{i=1}^{4}{}'' |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)| dt \leqslant e^{\frac{j+4}{2}} \pi \sqrt{\frac{2\pi}{l_n(N_n)}} e^{-\frac{3M_n}{4}} U_n,$$

$j \leqslant l$, где

$$U_n = \sum_k \sup_{t_k^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{k+1}^{(n)}} \prod_{i=1}^{4}{}'' |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{4}{}'' \Big(\sum_k \sup_{t_k^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|^4\Big)^{\frac{1}{4}},$$

согласно неравенству Коши.

Лемма 4. *Пусть неотрицательная функция $g(t)$, определенная на интервале $[a, \infty)$, удовлетворяет на этом интервале условию Липшица*

$$|g(t+s) - g(t)| \leqslant K|s|.$$

Пусть, кроме того, $V = \int_a^\infty g(t)\,dt < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого разбиения

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

интервала $[a, \infty)$ с $\max\limits_{0 \leqslant k < \infty} (t_{k+1} - t_k) \leqslant \varepsilon$ интегральная сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\max_{t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}} g^2(t)\Big) \Delta t_k \leqslant V\Big(2K\varepsilon + 4 \sup_{a \leqslant t < \infty} g(t)\Big),$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Лемма взята из работы [2].

Так как $r_i \leqslant l+4$, то функции $g_{r_i}(t) = |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|^2$ в интервале $(-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям леммы 4 с

$$K_{r_i} \leqslant 2\sqrt{2}\,\pi\sigma_{r_i}, \quad V_{r_i} = \bar{p}_{\xi_{r_i}}(0) \leqslant C_{r_i} < \infty.$$

Поэтому согласно лемме 4, и имея в виду, что

$$\frac{1}{6N_n} \leqslant t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \leqslant \frac{1}{4N_n},$$

получаем

$$U_n \leqslant 6N_n \prod_{i=1}^{4}{}'' C_{r_i}^{\frac{1}{4}} \left(4 + \frac{\sqrt{2}\,\pi\tau_{r_i}}{N_n}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда

$$\bar{I}_4 \leqslant 24 e^{\frac{j+4}{2}} \pi \sqrt{\frac{2\pi}{l_n(N_n)}}\, N_n e^{-\frac{3M_n}{4}} \prod_{i=1}^{4}{}'' C_{r_i}^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}\,N_n}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$1 \leqslant j \leqslant l, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Согласно (22) и (26) имеем

$$I_4 \leqslant \Theta_l l_n^{-\frac{1}{2}}(N_n)\, N_n (1 + L_{1n}^l + L_{sn})\, e^{-\frac{3}{4}M_n} \times$$

$$\times \max_{1 \leqslant r_i \leqslant l+4} \left[\prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}\,N_n}\right)\right]^{\frac{1}{4}}, \quad l = 1,\ \ldots,\ s. \tag{26'}$$

Когда $l=0$, в равенстве (26′) не будет множителя $(1 + L_{1n}^l + L_{sn})$.

Из (9), (10), (21) и (26′) получаем неравенство (6), которое и хотели доказать.

Доказательство неравенства (7).

Согласно равенству Парсеваля имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_{Z_n}(x) - \varphi_{s-1,n}(x)|^2 |x|^{2r} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{Z_n}^{(r)}(t) -$$

$$- h_{s-1,n}^{(r)}(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \quad (h_1 + h_2 + h_3 + h_4),$$

$r = 0,\ 1,\ \ldots,\ s$, где

$$h_1 = \int\limits_{|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}} |f_{Z_n}^{(r)}(t) - h_{s-1,n}^{(r)}(t)|^2 dt,$$

$$h_2 = 2 \int\limits_{|t| > L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}} |h_{s-1,n}^{(r)}(t)|^2 dt,$$

$$h_3 = 2 \int\limits_{L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}} < |t| \leqslant \frac{\pi B_n}{N_n}} |f_{Z_n}^{(r)}(t)|^2 dt,$$

$$h_4 = 2 \int\limits_{|t| > \frac{\pi B_n}{N_n}} |f_{Z_n}^{(r)}(t)|^2 dt.$$

Оценки h_i мало чем отличаются от оценок I_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Легко получаем, что

$$h_1 \leqslant \Theta_{r,s} L_{sn}^2, \quad h_2 \leqslant \Theta_{r,s} L_{sn}^2, \quad r = 0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Согласно (14) и (20) имеем

$$|f_{Z_n}^{(r)}(t)|^2 \leqslant \Theta_r\{1+|t|^{2r}+L_{sn}^2\}\exp\left\{-\frac{2t^2}{\pi^2}\,l_n(N_n)\right\}.$$

Тогда

$$h_3 \leqslant \Theta_{r,s}\, l_n^{-\frac{6s+2r-11}{2}}(N_n)(L_{sn}^2+L_{sn}^4), \quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Если $r=0$, то L_{sn}^4 можно пропустить.

Оценка h_4 сводится к оценке интеграла

$$\bar{h}_4 = \int\limits_{|t|>\frac{\pi B_n}{N_n}} |f_{Z_n, k_1,\ldots,k_j}(t)||f_{Z_n, \nu_1,\ldots,\nu_\mu}(t)|\,dt,$$

$$1 \leqslant j \leqslant r, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant r, \quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

После замены переменных получаем

$$\bar{h}_4 = 2\pi B_n \int\limits_{|t|>\frac{1}{2N_n}} \prod_{i=1}^{n-j-j_0}{}' |f_{\xi_{l_i}}(2\pi t)| \prod_{i=1}^{n-\mu-\mu_0}{}'' |f_{\xi_{m_i}}(2\pi t)| \prod_{i=1}^{4}{}''' |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|\,dt.$$

Здесь Π''' означает произведение по индексам r_i, неравным совпадающим k_i и ν_m ($i=1,\ldots,j$; $m=1,\ \ldots,\ \mu$) и непревосходящим $\max(j,\mu)+2$. Кроме того, между числами r_i может быть не больше чем по два числа, равных между собой. Числа j_0 и μ_0 удовлетворяют равенству $j_0+\mu_0=4$. В произведении Π' нет множителей с индексами $k_1,\ \ldots,\ k_j$ и тех j_0 множителей, которые входят в Π'''. Аналогичный смысл Π''.

Тогда

$$\bar{h}_4 \leqslant 2\pi B_n \int\limits_{|t|>\frac{1}{2N_n}} \exp\{-[2\bar{I}_n(t)-(I_{k_1}+\cdots+I_{k_j}+I_{\nu_1}+\cdots+I_{\nu_\mu}+$$

$$+I_{r_1}+\cdots+I_{r_4})]\}\cdot\prod_{i=1}^{4}{}'''|f_{r_i}(2\pi t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n e^{\frac{j+\mu+4}{2}} \int\limits_{|t|>\frac{1}{2N_n}} e^{-2\bar{I}_n(t)} \prod_{i=1}^{4}{}''' |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)|\,dt.$$

Далее, если разложим $\bar{I}_n(t)$ на две равные слагаемые и оценим $\bar{h}_4$ как $\bar{I}_4$, то получим

$$\bar{h}_4 \leqslant 24 e^{\frac{j+\mu+4}{2}} \pi \sqrt{\frac{\pi}{l_n(N_n)}}\, N_n e^{-\frac{3}{2}M_n} \prod_{i=1}^{4}{}''' C_{r_i}^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}\,N_n}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant 24 e^{\frac{2r+4}{2}}\cdot\pi\sqrt{\frac{\pi}{l_n(N_n)}}\, N_n e^{-\frac{3}{2}M_n} \max_{1\leqslant r_i\leqslant r+2} \prod_{i=1}^{2} C_{r_i}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}\,N_n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

так как

$$\max_{1\leqslant r_1\neq r_2\neq r_3\neq r_4\leqslant r+2} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4} \leqslant \max_{1\leqslant r_1\neq r_2\neq r_3\leqslant r+2} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}^2 \leqslant \max_{1\leqslant r_1\neq r_2\leqslant r+2} a_{r_1}^2 a_{r_2}^2,$$

если $a_{r_i}>0$.

Следовательно,

$$h_4 \leqslant \Theta_r \, (1+L_{1n}^{2r}+L_{sn}^2)\, l_n^{-\frac{1}{2}}(N_n)\, N_n e^{-\frac{3}{2}M_n} \times$$

$$\times \max_{1\leqslant r_i \leqslant r+2} \prod_{i=1}^{2} C_{r_i}^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}}{2\sqrt{2}\,N_n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство (7) доказано.

Еще отметим, что неравенства (6) и (7) дают возможность оценить выражения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_{Z_n}(x)-\varphi_{s-1,\,n}(x)|^p \, |x|^q \, dx$$

для p и q из некоторых интервалов и, в частности, дать оценку для

$$\sup_B \left| \mathbf{P}\{Z_n \in B\} - \int_B \varphi_{s-1,\,n}(x)\,dx \right|$$

только при трех ограниченных плотностях величин (1) последовательности, т. е. при $n_0=3$.

§ 3. Теорема для решетчатых случайных величин

Теорема 2. *Если случайные величины последовательности* (1) *решетчатые, принимающие только целочисленные значения,* $\mathbf{M}|\xi_k|^s<\infty$ *(для целых* $s\geqslant 3$), $k=1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\left|\frac{m}{B_n}\right|^l \left| B_n \mathbf{P}\{S_n=m\}-\varphi_{s-1,\,n}\left(\frac{m}{B_n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_{l,s}^{m} L_{sn}+\bar{\Theta}_{l,s}^{m} l_n^{-\frac{3s+l-5}{2}}(N_n)(L_{sn}+L_{sn}^2)+$$

$$+\Theta_l^{m} l_n^{-\frac{1}{2}}(N_n)\, N_n (1+L_{1n}^l+L_{sn}) \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\,q,\,N_n)\right\},$$

$$l=0,\ 1,\ \ldots,\ s,$$

для таких $N_n>0$, *для которых* $l_n(N_n)>0$. *Здесь минимум берется по всем таким* a *и* q, *что* $a\leqslant\frac{1}{2}q$, $1<q\leqslant 2N_n$, $(a,\,q)=1$.

Эта теорема является продолжением работы [3].

Доказательство. Так как

$$f_{Z_n}^{(l)}(t)=\sum_k\left(\frac{ik}{B_n}\right)^l e^{i\frac{t}{B_n}k}\,\mathbf{P}\{S_n=k\},$$

$$\int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} f_{Z_n}^{(l)}(t)\, e^{-it\frac{m}{B_n}}\,dt=\sum_k \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n}\left(\frac{ik}{B_n}\right)^l e^{\frac{it}{B_n}(k-m)}\,\mathbf{P}\{S_n=k\}\,dt=$$

$$=2\pi B_n\left(\frac{im}{B_n}\right)^l \mathbf{P}\{S_n=m\},$$

$$(ix)^l \varphi_{s-1,n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} h_{s-1,n}^{(l)}(t)\,dt,$$

$$\left(\frac{im}{B_n}\right)^l \varphi_{s-1,n}\left(\frac{m}{B_n}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\frac{m}{B_n}} h_{s-1,n}^{(l)}(t)\,dt,$$

то

$$2\pi \left|\frac{m}{B_n}\right|^l \left| B_n \mathbf{P}\{S_n = m\} - \varphi_{s-1,n}\left(\frac{m}{B_n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-it\frac{m}{B_n}} f_{Z_n}^{(l)}(t)\,dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\frac{m}{B_n}} h_{s-1,n}^{(l)}(t)\,dt \right| \leqslant H_1 + H_2 + H_3 - H_4, \text{ где}$$

$$H_4 = \int\limits_{\frac{\pi B_n}{N_n} < |t| \leqslant \pi B_n} |f_{Z_n}^{(l)}(t)|\,dt, \text{ а интегралы}$$

H_1, H_2 и H_3 по форме записи и по способу оценки ничем не отличаются от интегралов I_1, I_2 и I_3. Только в этом случае

$$I_k(t) = \sum_m \sin^2 \pi m t \cdot \tilde{p}_{k\backslash m}$$

и $I_n\,(N_n)$ определяется равенством (4).

При оценке H_4 здесь вместо $\bar{I}_4$ появляется

$$\bar{H}_4 = \int\limits_{\frac{\pi B_n}{N_n} < |t| \leqslant \pi B_n} |f_{Z_n, k_1, \ldots, k_j}(t)|\,dt, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \quad l = 1, \ \ldots, \ s.$$

Далее

$$\bar{H}_4 = 4\pi B_n \int\limits_{\frac{1}{2N_n} < |t| \leqslant \frac{1}{2}} \prod_{\substack{i=1 \\ 1 \leqslant l_i \neq k_1 \neq \cdots \neq k_j \leqslant n}}^{n-j} |f_{\xi_{l_i}}(2\pi t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi B_n \int\limits_{\frac{1}{2N_n} < t \leqslant \frac{1}{2}} \exp\left\{-\left[\bar{I}_n(t) - \left(I_{k_1}(t) + \cdots + I_{k_j}(t)\right)\right]\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi B_n e^{\frac{j}{2}} \int\limits_{\frac{1}{2N_n} < t \leqslant \frac{1}{2}} e^{-\bar{I}_n(t)}\,dt.$$

Так как $\bar{I}_n\,(t) \geqslant 4\,J_n\,(t)$, где в этом случае

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_m (mt)^2 \tilde{p}_{k\backslash m},$$

то в неравенстве $\bar{I}_n\,(t) \geqslant 2J_n\,(t) + 2J_n\,(t)$ одно слагаемое, оценив согласно лемме 1 работы [3], а другое – согласно лемме 2 той же работы, взяв $\tau = 2N$, получаем

$$\overline{H}_4 \leqslant 4\pi B_n e^{\frac{j}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\} \int\limits_{\frac{1}{2N_n}<t\leqslant\frac{1}{2}} e^{-2J_n(t)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi B_n e^{\frac{j}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}\times$$

$$\times\sum_{k}\int\limits_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(t-t_{i0}^{(n)})^2 l_n(N_n)\,B_n^2\right\}dt.$$

Так как для всех интервалов $[t_i^{(n)},\ t_{i+1}^{(n)}]$ интеграл

$$\int\limits_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(t-t_{i0}^{(n)})^2\,B_n^2 l_n(N_n)\right\}dt \leqslant \frac{3\sqrt{2\pi}}{B_n\sqrt{l_n(N_n)}}$$

и число таких интервалов не превосходит 5 N_n, то

$$\overline{H}_4 \leqslant \frac{60\pi\sqrt{2\pi}}{\sqrt{l_n(N_n)}}\, e^{\frac{j}{2}}\, N_n \exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ N_n)\right\}.$$

Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
16.X.1967

Литература

1. В. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции, Лит. мат. сб., **II**, 2 (1962), 227–232.

2. В. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., **X**, 4 (1965), 643–659.

3. А. Миталаускас, В. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит. мат. сб., **VI**, 4 (1966), 569–583.

4. П. Сурвила, Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Лит. мат. сб., **II**, 2 (1962), 233–251.

5. П. Сурвила, Асимптотические разложения для плотностей, Лит. мат. сб., **III**, 2 (1963), 177–191.

6. В. В. Петров, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., **IV**, 2 (1959), 220–224.

7. В. В. Петров, Об одном классе предельных теорем для независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., **IV**, 2 (1959), 224–228.

8. В. В. Петров, Асимптотический анализ некоторых предельных теорем теории вероятностей, Вестник ЛГУ, № 7 (1961), 51–61.

NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

V. PIPIRAS, V. STATULEVIČIUS

(*Reziumė*)

Straipsnyje gaunamas nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotos sumos pasiskirstymo tankio $p_{Z_n}(x)$ asimptotinis išdėstymas Liapunovo trupmenomis, įvertinant liekamąjį narį x atžvilgiu. Taip pat išnagrinėtas analogiškas uždavinys rėtiniams atsitiktiniams dydžiams.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR THE SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

V. PIPIRAS, V. STATULEVIČIUS

(*Summary*)

The asymptotic expansions for the density $p_{Z_n}(x)$ of the normed sum of independent random variables in Liapounoff's fractions with estimation of the remainder term in respect of x is obtained. The analogous problem for lattice random variables is treated as well.