LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–519.21

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

Л. И. САУЛИС

Пусть F_ξ, f_ξ, p_ξ обозначают соответственно функцию распределения, характеристическую функцию и плотность вероятности случайной величины ξ, $\Gamma_k\{\xi\}$ – семиинвариант порядка k случайной величины ξ. Кроме того положим

$$\varphi_\xi(z) = Me^{z\xi}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Всюду далее Θ означает некоторую величину, не превосходящую единицы по модулю.

Пусть случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \qquad n \geqslant 1 \tag{1}$$

независимы,

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\xi_j| \leqslant K_n,$$

имеют плотности

$$p_{\xi_j}(x) \leqslant C_j < \infty \text{ и } \mathbf{M}\xi_j = 0.$$

Положим

$$\sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j, \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j,$$

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \text{ и } Z_n = \frac{S_n}{B_n}.$$

В настоящей заметке рассматриваются большие уклонения для плотностей $p_{Z_n}(x)$. Доказывается следующая

Теорема. *В интервале* $1 \leqslant x \leqslant \bar{\delta}\Delta_n$, $\bar{\delta} < \bar{\delta}_0 = 0{,}046$, $\Delta_n = \frac{B_n}{3K_n}$ *имеет место соотношение*

$$\frac{p_{Z_n}(x)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)} \left(1 + \Theta f(\bar{\delta})\frac{x}{\Delta_n} + \Theta C(\delta, K_n)\right) \times \tag{2}$$
$$\times \prod_{i=1}^{4} C_i^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\alpha(\delta, K_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}\right\}.$$

Здесь

$$0 \leqslant f(\bar{\delta}) \leqslant \frac{9\left\{2 + 3{,}2\left(1 + 2\delta + \frac{2}{9}(1-\bar{\delta})^3\right)^4\right.}{(1-\rho)^2(1-\delta)^4}, \tag{3}$$

$0<\delta<\delta_0=0{,}0851$, *причем* δ *определяется из уравнения*

$$\bar{\delta}=\frac{\delta(1+\delta)}{2}, \qquad \rho=\frac{9\delta}{(1-\delta)^3}, \tag{4}$$

$$C(\delta,\ K_n)\leqslant\frac{108\pi e^4K_ne^{\frac{2\delta}{3}}}{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \alpha(\delta,\ K_n)=\frac{e^{-\frac{2\delta}{3}}}{K_n^2} \tag{5}$$

$\lambda(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_kt^k$ — *степенной ряд Крамера, сходящийся при* $|t|<\bar{\delta}_0$, *причем*

$$|\lambda_k|\leqslant\frac{\delta_0}{(k+3)\bar{\delta}_0^{k+2}}, \qquad k=0,\ 1,\ldots \tag{6}$$

Доказательство. Из того, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j|\leqslant K_n$, легко выводим (см. 3, стр. 135), что $\ln\varphi_{S_n}(z)$ аналитична в круге $|z|\leqslant z_0=\frac{1}{3K_n}$. В этом круге

$$|\ln\varphi_{S_n}(z)|_{|z|\leqslant z_0}\leqslant\frac{3}{2}z_0^2B_n \tag{7}$$

и

$$\frac{1}{2}\leqslant|\varphi_{\xi_j}(z)|\leqslant\frac{3}{2}, \qquad j=1,\ 2,\ldots,n. \tag{8}$$

Имея в виду неравенство (7) и применяя формулу Коши, находим

$$|\Gamma_k\{S_n\}|\leqslant\frac{3}{2}k!\ (3K_n)^{k-2}\cdot B_n^2, \qquad k=3,\ 4,\ldots \tag{9}$$

Докажем, что при $n\geqslant 2$ имеет место формула обращения

$$p_{Z_n}(x)=\frac{B_n}{2\pi i}\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty}e^{-zB_nx}\cdot\varphi_{S_n}(z)\,dz, \qquad z=h+it. \tag{10}$$

Для этого достаточно показать, что существует интеграл

$$\int\limits_{h-i\infty}^{h+i\infty}|\varphi_{\xi_1}(z)\varphi_{\xi_2}(z)|\,dz.$$

Пусть в дальнейшем $0\leqslant h\leqslant\frac{\delta}{3K_n}$, где $0<\delta<\delta_0$, а δ_0 из условия $\frac{9\delta_0}{(1-\delta_0)^3}=1$, т. е. $\delta_0=0{,}0851$. Нетрудно заметить, что

$$\varphi_{\xi_j}(z)=\varphi_{\xi_j}(h)\cdot f_{\xi_j(h)}(t), \tag{11}$$

где случайные величины $\xi_j(h)$, $j=1,2,\ldots,n$, задаются плотностями распределения

$$p_{\xi_j(h)}(x)=\frac{1}{\varphi_{\xi_j}(h)}e^{hx}p_{\xi_j}(x).$$

Согласно неравенству (8), имеем

$$p_{\xi_j(h)}(x)\leqslant 2e^{\frac{\delta}{3}}\cdot C_j, \qquad j=1,\ 2,\ldots,n. \tag{12}$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_{\xi_j(h)}(t)|^2\,dt\leqslant 4\pi e^{\frac{\delta}{3}}\cdot C_j. \tag{13}$$

Согласно неравенству Буняковского и (13) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{\xi_1(h)}(t) f_{\xi_2(h)}(t)|\,dt \leqslant 4\pi e^{\frac{\delta}{3}} (C_1 C_2)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Из неравенств (8), (14) следует, что

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} |\varphi_{\xi_1}(z)\varphi_{\xi_2}(z)|\,dz \leqslant |\varphi_{\xi_1}(h)\cdot\varphi_{\xi_2}(h) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\xi_1(h)}(t) f_{\xi_2(h)}(t)|\,dt \leqslant 9\pi e^{\frac{\delta}{3}} (C_1 C_2)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{15}$$

Формула обращения доказана.

Интеграл (10) разобьем на две:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{B_n}{2\pi} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{-zB_nx}\cdot\varphi_{S_n}(z)\,dz = I_1 + I_2,\\ I_1 &= \frac{B_n}{2\pi i} \int_{h-i\varepsilon}^{h+i\varepsilon} e^{-zB_nx}\cdot\varphi_{S_n}(z)\,dz,\\ I_2 &= \frac{B_n}{2\pi i}\left(\int_{h-i\infty}^{h-i\varepsilon} e^{-zB_nx}\cdot\varphi_{S_n}(z)\,dz + \int_{h+i\varepsilon}^{h+i\infty} e^{-zB_nx}\cdot\varphi_{S_n}(z)dz\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Здесь $\varepsilon>0$ будет подобрано в ходе доказательства, а в качестве h берется решение уравнения

$$\frac{d}{dz}\left\{-zB_nx + \ln\varphi_{S_n}(z)\right\} = 0,$$

т. е. точка перевала.

Разлагая $\ln\varphi_{S_n}(z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки h при

$$\Big|h + |t|\Big| \leqslant \delta_2\frac{1}{3K_n}, \quad \delta < \delta_2 < 1,$$

или при

$$|t| \leqslant (\delta_2 - \delta)\frac{1}{3K_n}$$

находим

$$-zB_nx + \ln\varphi_{S_n}(z) = -hB_nx + \ln\varphi_{S_n}(h) +$$

$$+\left(\frac{d^2}{dz^2}\ln\varphi_{S_n}(z)\right)_{z=h}\cdot\frac{(it)^2}{2} + \Big(\ln\varphi_{S_n}(z)\Big)'''_{z=h+i\Theta t}\cdot\frac{(it)^3}{6}. \tag{18}$$

Выберем $\varepsilon = (\delta_2 - \delta)\frac{1}{3K_n}$ и оценим интеграл I_1

$$I_1 = \frac{B_n}{2\pi} \int\limits_{|t|\leqslant(\delta_2-\delta)\frac{1}{3K_n}} e^{-hB_nx + \ln\varphi_{S_n}(h) + \frac{d^2}{dh^2}\ln\varphi_{S_n}(h)\cdot\frac{(it)^2}{2} + \left(\ln\varphi_{S_n}(z)\right)'''_{z=h+i\Theta t}\cdot\frac{(it)^3}{6}}\,dt. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что

$$B_n^2(h) = \frac{d^2}{dh^2}\ln\varphi_{S_n}(h) \text{ и } B_n^2(h) > 0.$$

После замены переменной $t' = B_n(h)t$ получаем

$$I_1 = \frac{B_n}{2\pi B_n(h)} e^{K_n(h)} \times$$

$$\times \int\limits_{|t| \leqslant (\delta_2 - \delta)\frac{1}{3K_n} B_n(h)} e^{-\frac{t^2}{2} + \left(\ln \varphi_{S_n}(z)\right)'''_{z=h+\frac{i\Theta t}{B_n(h)}} \cdot \frac{(it)^3}{6B_n^3(h)}} dt,$$

где $K_n(h) = -hB_n x + \ln \varphi_{S_n}(h)$. Далее,

$$-\frac{t^2}{2} + \left(\ln \varphi_{S_n}(z)\right)'''_{z=h+\frac{i\Theta t}{B_n(h)}} \frac{(it)^3}{6B_n^3(h)} = -\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2}\Theta \frac{K_n B_n^3 (it)^3}{(1-\delta_2)^4 B_n^3(h)}, \tag{20}$$

в силу того, что

$$\left(\ln \varphi_{S_n}(z)\right)''' = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\Gamma_k\{S_n\} z^{k-3}}{(k-3)!} =$$

$$= \frac{3}{2}\Theta B_n^2 \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)(3K_n)^{k-2} z^{k-3} = \frac{3}{2}\Theta B_n^2 \frac{18K_n}{(1-3K_n|z|)^4}, \tag{21}$$

если $|z| < \frac{1}{3K_n}$.

Подберем значение δ_2 так, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{\delta_2 - \delta}{(1-\delta_2)^4} = \frac{2\varepsilon_0 B_n^2(h)}{3B_n^2}, \tag{22}$$

где $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$.

Положим $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ и

$$T_0 = \frac{2B_n(h)(1-\delta_2)^4}{9K_n B_n^2}, \qquad T = \frac{1}{3}T_0. \tag{23}$$

Тогда, используя неравенство $|e^\alpha - 1| \leqslant |\alpha| e^{|\alpha|}$, получаем

$$|I_1| \leqslant \frac{B_n}{2\pi B_n(h)} e^{K_n(h)} \cdot \int\limits_{|t| \leqslant T} e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{\Theta|t|^3}{T_0}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_n}{2\pi B_n(h)} e^{K_n(h)} \left(\int\limits_{|t| \leqslant T} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int\limits_{|t| \leqslant T} \frac{|t|^3}{T_0} e^{-\frac{t^2}{6}} dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_n}{\sqrt{2\pi} B_n(h)} e^{K_n(h)} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, T} e^{-\frac{T^2}{2}} + \frac{36}{\sqrt{2\pi} T_0} \right). \tag{24}$$

Вычислим $B_n^2(h)$

$$B_n^2(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma_k\{S_n\} h^{k-2}}{(k-2)!} =$$

$$= B_n^2 + \frac{3}{2}\Theta B_n^2 \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(3K_n)^{k-2} \cdot h^{k-2} =$$

$$= B_n^2(1 + \Theta\rho), \text{ где } \rho = \frac{9\delta}{(1-\delta)^3}. \tag{25}$$

Аналогично

$$x=\frac{1}{B_n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma_k\{S_n\}h^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\frac{1}{B_n}\left(B_n^2h+\frac{3}{2}\Theta B_n^2\sum_{k=3}^{\infty}k(3K_n)^{k-2}\cdot h^{k-1}\right)=B_nh\left(1+\frac{\Theta\rho}{2}(1-\delta)\right). \tag{26}$$

Для оценки интеграла I_2 воспользуемся работой В. А. Статулявичуса [4]. Мы также будем пользоваться обозначениями [4], не оговаривая это каждый раз. Симметризованную величину $\xi_j(h)$, $j=1, 2, \ldots, n$ будем обозначать через $\tilde{\xi}_j(h)$. Так как

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j(h)|\leqslant K_n, \qquad \sigma_j^2(h)\leqslant K_n^2,$$

то

$$\tilde{\xi}_j(h)\leqslant 2K_n \text{ и } D\tilde{\xi}_j(h)\leqslant 2K_n^2.$$

В нашем случае функция $l_n(N)$ из [4] имеет вид

$$l_n(2K_n)=\frac{1}{B_n^2(h)}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|\leqslant 2K_n}x^2dF_{\tilde{\xi}_j(h)}(x)=2. \tag{27}$$

Интеграл I_2 разобьем на два интеграла

$$|I_2|=\left|\frac{B_n}{2\pi}\int\limits_{|t|>\frac{\delta_1-\delta}{3K_n}}e^{-(h+it)B_nx}\cdot\prod_{j=1}^{n}\varphi_{\xi_j}(h+it)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{B_n}{2\pi}e^{K_n(h)}\cdot\int\limits_{|t|>\frac{\delta_1-\delta}{3K_n}}\cdot\prod_{j=1}^{n}|f_{\tilde{\xi}_j(h)}(t)|\,dt=\frac{1}{2\pi}e^{K_n(h)}(I_2^{(1)}+I_2^{(2)}),$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_2^{(1)}&=B_n\cdot\int\limits_{\frac{\delta_1-\delta}{3K_n}}^{\frac{\pi}{2K_n}}\prod_{j=1}^{n}|f_{\tilde{\xi}_j(h)}(t)|\,dt,\\ I_2^{(2)}&=B_n\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2K_n}\leqslant|t|<\infty}\prod_{j=1}^{n}|f_{\tilde{\xi}_j(h)}(t)|\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

В работе [4] получена следующая оценка

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{l}{\pi^2}t^2B_n^2\right\} \tag{29}$$

для

$$|t|\leqslant\frac{\pi}{2K_n}, \qquad l=\varliminf l_n(2K_n)>0.$$

Применяя эту оценку для суммы $S_n(h)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j(h)$, имеем

$$|f_{S_n(h)}(t)|\leqslant \exp\left\{-\frac{2}{\pi^2}t^2B_n^2(h)\right\}, \tag{30}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{\pi}{2K_n}.$$

Используя равенство (25) и неравенство (30), оценим интеграл $I_2^{(1)}$

$$I_2^{(1)}\leqslant B_n\int\limits_{\frac{\delta_2-\delta}{3K_n}}^{\frac{\pi}{2K_n}} e^{-\frac{2}{\pi^2}t^2B_n^2(h)}\,dt\leqslant\frac{\pi^2}{4(\delta_2-\delta)(1-\rho)\Delta_n}, \tag{31}$$

где

$$\Delta_n=\frac{B_n}{3K_n}.$$

Перейдем к оценке интеграла $I_2^{(1)}$. В работе [4] доказано, что

$$|f_{S_n}(2\pi t)|\leqslant\exp\{-I_n(t)\},$$

где

$$I_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\pi tx\,dF_{\bar\xi_k}(x)$$

и согласно лемме 1 работы [4]

$$I_n(t)\geqslant\frac{t^2}{3}\sum_{k=1}^{n}\alpha\left(\mathfrak{M}_k,\ \frac{1}{2|t|}\right), \tag{32}$$

причем наименьшее значение правой части (32) в интервале $|t|\geqslant\frac{1}{4K_n}$ равно

$$M_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\alpha(\mathfrak{M}_k,\ K_n),$$

где

$$\alpha(\mathfrak{M}_n,\ 2K_n)\geqslant\frac{1}{256}\ \frac{1}{(\sigma_k^2+4K_n^2)\,C_k^2}. \tag{33}$$

В нашем случае

$$\alpha(\mathfrak{M}_k,\ 2K_n)\geqslant\frac{1}{256}\ \frac{1}{(\sigma_k^2(h)+4K_n^2)\,4e^{\frac{2\delta}{3}}C_j^2}\geqslant\frac{e^{-\frac{2\delta}{3}}}{5120\,K_n^2C_j^2} \tag{34}$$

и

$$M_n=\frac{1}{3}\ \frac{e^{-\frac{2\delta}{3}}}{5120\,K_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j^2}. \tag{35}$$

С другой стороны, используя лемму 2 работы [4], получаем

$$I_n(t)\geqslant 2\cdot 2\,(t-t_{k0}^{(n)})^2\cdot B_n^2(h) \tag{36}$$

для $t\in[t_k^{(n)},\ t_{k+1}^{(n)}]$, где $\frac{1}{12K_n}<t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)}<\frac{1}{8K_n}$.

В равенстве $I_n(t)=\frac{1}{2}I_n(t)+\frac{1}{2}I_n(t)$, оценив первый и второй члены правой части при помощи (32) и (36), имеем

$$I_2^{(2)}=2\pi B_n \int\limits_{\frac{1}{4K_n}<|t|<\infty} |f_{S_n(h)}(2\pi t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n \int\limits_{\frac{1}{4K_n}<|t|<\infty} e^{-(I_n(t)-I_n(t))}\cdot|f_{S_4(h)}(2\pi t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n e^4 e^{-\frac{M_n}{2}}\cdot\sum_k \sup_{t_k^{(n)}\leqslant|t|\leqslant t_{k+1}^{(n)}} f_{S_4(h)}(2\pi t)\cdot\int\limits_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} e^{-2(t-t_{k0}^{(n)})^2B_n^2(h)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \pi\sqrt{2\pi}e^4 e^{-\frac{M_n}{2}}\frac{B_n}{B_n(h)}U_n,$$

где

$$U_n=\sum_k \sup_{t_k^{(n)}\leqslant t\leqslant t_{k+1}^{(n)}} |f_{S_4(h)}(2\pi t)|\leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{4}\Big(\sum_k \sup_{t_k^{(n)}\leqslant|t|\leqslant t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_i(h)}(2\pi t)|^4\Big)^{\frac{1}{4}},$$

согласно неравенству Коши. Функции $g_i(t)=|f_{\xi_i(h)}(2\pi t)|^2$ в интервале $(-\infty,\infty)$ удовлетворяют условиям леммы 3 работы [4], с

$$K_i\leqslant 2\sqrt{2}\pi\sigma_i(h),$$

$$V_i\leqslant 2e^{\frac{\delta}{3}}C_i,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Учитывая (36) и лемму 3 работы [4], находим

$$U_n\leqslant 108K_n e^{\frac{\delta}{3}}\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}. \tag{37}$$

Согласно (37) и (25) имеем

$$I_2^{(2)}\leqslant\frac{\pi\sqrt{2\pi}e^4}{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}108K_n e^{\frac{\delta}{3}}\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\alpha(\delta,\ K_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}\right\}, \tag{38}$$

где

$$\alpha(\delta,\ K_n)=\frac{e^{-\frac{2\delta}{3}}}{6\cdot 5120K_n^2}.$$

Из (31) и (38) получаем, что

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{K_n(h)}\Big(\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}(\delta_2-\delta)(1-\rho)\Delta_n}+$$

$$+C(\delta,\ K_n)\exp\left\{-\alpha(\delta,\ K_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}\right\}, \tag{39}$$

где

$$C(\delta,\ K_n)\leqslant\frac{108\pi e^4 K_n e^{\frac{\delta}{3}}}{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}.$$

Подставляя оценки интегралов I_1 и I_2, (24) и (39) в выражение (16), получаем

$$P_{Z_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{K_n(h)}\left[1+\frac{\Theta\rho}{1-\rho}+\frac{1}{(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+\right.$$

$$+\frac{36}{\sqrt{2\pi}\,(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}T_0}+\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}\,(\delta_2-\delta)(1-\rho)\Delta_n}+$$

$$\left.+C(\delta,\ K_n)\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\alpha(\delta,\ K_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}\right\}\right].\qquad(40)$$

Из равенств (26) и (22) находим

$$\rho=\frac{9\delta}{(1-\delta)^3}=\frac{9}{\left(1-\frac{\rho}{2}(1-\delta)\right)(1-\delta)^3}\cdot\frac{x}{\Delta_n},$$

$$\delta_2-\delta\geqslant\frac{2}{9}(1-\delta_2)^4(1-\rho).\qquad(41)$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{(1-\delta_2)^4}\leqslant\frac{\left(1+2\delta+\frac{2}{9}(1-\delta)^3\right)^4}{(1-\delta)^4}.\qquad(42)$$

Наконец, вспомнив (23) и учитывая (41), (42), получаем

$$P_{Z_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{K_n(h)}\left(1+\Theta f(\bar\delta)\cdot\frac{x}{\Delta_n}+C(\delta,\ K_n)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\alpha(\delta,\ K_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}\right\}\right),\qquad(43)$$

где

$$0\leqslant f(\bar\delta)\leqslant\frac{9\left\{2+3{,}2\left(1+2\delta+\frac{2}{9}(1-\bar\delta)^3\right)^4\right\}}{(1-\rho)^2(1-\delta)^4}.\qquad(44)$$

Было положено $\delta=3K_n h$. Однако соотношения (43), (44) сохраняются, если считать h и δ произвольными, но соблюдать условия $0<h\leqslant\frac{\delta}{3K_n}$, $\delta<\delta_0=0{,}0851$. Из уравнения $x=\frac{1}{B_n}\frac{d}{dh}\ln\varphi_{S_n}(h)$ каждому значению x соответствует одно значение h. Согласно (26) $x=B_n h\left(1+\frac{\Theta\rho}{2}(1-\delta)\right)$, а отсюда следует

$$0<x\leqslant\bar\delta\Delta_n,\qquad\bar\delta<\bar\delta_0=0{,}046$$

где

$$\bar\delta=\frac{\delta}{2}(2-\rho+\rho\delta).$$

Очевидно, что $\bar{\delta} \geqslant \frac{\delta(1+\delta)}{2}$ и только при $\delta=\delta_0$, т. е. при $\rho=1$, достигается равенство

$$\bar{\delta}_0=\frac{\delta_0(1+\delta_0)}{2}.$$

Поэтому в формулировке теоремы мы можем взять $\bar{\delta}=\frac{\delta(1+\delta)}{2}$. Для этого в числителе правой части неравенства (44) следует заменить $(1-\delta)$ на $(1-\bar{\delta})$.

Осталось рассмотреть $K_n(h)=-hB_nx+\ln\varphi_{S_n}(h)$. Из-за того, что

$$x=\frac{1}{B_n}\frac{d}{dh}\ln\varphi_{S_n}(h)=\frac{1}{B_n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma_k\{S_n\}h^{k-1}}{(k-1)!},$$

нетрудно показать, что h можно разложить в ряд по степеням x

$$h=h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k,$$

сходящийся для $|x|<\bar{\delta}_0\Delta_n$.

Поскольку

$$|h(x)|_{|x|=\bar{\delta}_0\frac{B_n}{3K_n}}=\frac{x}{B_n\left(1+\frac{\Theta\rho}{2}(1-\delta)\right)}\leqslant\frac{\delta_0}{3K_n},$$

находим, что

$$|a_k|\leqslant\frac{\delta_0}{\bar{\delta}_0^k\Delta_n^{k-1}\cdot B_n}, \qquad k=1,\ 2,\ldots \tag{46}$$

согласно формуле Коши. Легко проверить, что

$$a_1=\frac{1}{B_n}, \qquad a_2=-\frac{\Gamma_3\{S_n\}}{2\Gamma_2^3\{S_n\}},$$

$$a_3=-\frac{\Gamma_2\{S_n\}\Gamma_4\{S_n\}-\Gamma_3^2\{S_n\}}{6\Gamma_2^{\frac{3}{2}}\{S_n\}},\ \ldots \tag{47}$$

Подставляя в $K_n(h)$ выражение h, получаем

$$K_n(h)=-hB_nx+\ln\varphi_{S_n}(h)=-\frac{x^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}b_kx^k. \tag{48}$$

Нетрудно заметить, что

$$b_k=-\sum_{\nu=2}^{k}\frac{\nu-1}{\nu}\Gamma_\nu\{S_n\}\sum_{k_1+\ldots+k_\nu=k}a_{k1}a_{k2}\ldots a_{k\nu}=$$

$$=-\frac{a_{k-1}}{k}\Gamma_2^{\frac{1}{2}}\{S_n\}. \tag{49}$$

Итак, имеем

$$K_n(h)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda\left(\frac{x}{\Delta_n}\right), \tag{50}$$

где

$$\lambda\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\cdot\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)^k,$$

а

$$\lambda_k=-\frac{a_{k+2}}{k+3}\Gamma_2^{\frac{1}{2}}\{S_n\}\Delta_n^{k+1}. \tag{51}$$

Из (46) находим

$$\lambda_k=\Theta\frac{\delta_0}{(k+3)\,\bar{\delta}_0^{k+2}},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\dots, \tag{52}$$

и ряд $\lambda(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k t^k$ сходится при $|t|<\bar{\delta}_0$. Соотношения (50) и (43) заканчивают доказательство теоремы.

В заключение автор благодарит В. А. Статулявичуса за постановку задачи и ценные указания при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
16.IX.1967

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.

2. В. В. Петров, О больших уклонениях сумм случайных величин, Вестник Ленинград. ун-та, сер. Математ., механ., астр., № 1, вып. 1 (1962), 25—37.

3. В. А. Статулявичюс, On large deviations, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 6 (1966), 133—144.

4. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее применен., X, в. 4 (1965), 645—659.

5. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее применен., II, 2 (1957), 214—229.

6. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947.

7. П. Сурвила, О больших уклонениях для плотностей, Лит. мат. сб., VI, № 4 (1966), 591—600.

APIE DIDELIUS NUKRYPIMUS TANKIAMS

L. SAULIS

(*Reziumė*)

Įrodoma nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, patenkinančių sąlygas:

$$\max_{1\le j\le n}|\xi_j|\le K_n \ \text{ir}\ p_{\xi_j}(x)\le C_j<\infty,$$

normuotos sumos tikimybinio tankio didelių nukrypimų teorema su liekamojo nario įvertinimu.

Čia $p_{\xi_j}(x)$ — atsitiktinio dydžio ξ_j tikimybinis tankis.

ON THE LARGE DEVIATIONS FOR THE DENSITIES

L. SAULIS

(*Summary*)

The theorem of large deviations with exact remainder term for the density of normed sum of independent not-identically distributed random variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$, under conditions that

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\xi_j| \leqslant K_n \text{ and } p_{\xi_j}(x) \leqslant C_j < \infty$$

is proved.

Here $p_{\xi_j}(x)$ denotes the density of the random variable ξ_i.
