LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК – 517.535.6

О РОСТЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРОСТЫМИ ПОЛЮСАМИ

В. ТЕВЯЛИС

Пусть $\{\lambda_n\}$ сходящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел и $\{R(z, \lambda_n)\}$ последовательность рациональных функций

$$R(z, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{t_k} \frac{A_{nk}}{(z-\lambda_n)^k}.$$

Э. Борелем [2] рассматривался следующий вопрос: из множества мероморфных функций $f(z)$ с главными частями $R(z, \lambda_n)$ требуется выделить функции, имеющие наименьший порядок роста, и определить этот минимальный порядок.

Этот вопрос в общем виде решен Дж. Уиттекером [4].

Для случая функций мероморфных в единичном круге вопрос решался А. Нафталевичем.

В настоящей работе рассматривается тот же вопрос для случая периодических мероморфных функций с периодом 2π, имеющих лишь простые полюсы, когда главные части являются периодическими.

1. Вспомогательные предложения

Приведем несколько используемых в работе обозначений.

А. *Порядок возрастающей функции.* Положительная, возрастающая функция $S(r)$, $0<r<\infty$ является функцией конечного порядка, если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln S(r)}{\ln r} = \tau < \infty. \tag{1.1}$$

Число τ называется порядком функции $S(r)$. Если (1.1) имеет место, то интеграл

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-k-1} S(r)\, dr$$

сходится для $k>\tau$ и расходится для $k<\tau$.

Б. *Показатель сходимости, функции* $n(v, \lambda)$, $n(-v, \lambda)$, $N(v, \lambda)$ *и* $N(-v, \lambda)$ (по поводу этих и дальнейших обозначений см. [3]).

Последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ имеет конечный показатель сходимости, если существует такое положительное число L, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-k} \tag{1.2}$$

сходится для $k>L$. Показатель сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$ равен $\varkappa$, если ряд (1.2) сходится для $k>\varkappa$ и расходится для $k<\varkappa$.

В дальнейшем будем считать последовательность $\{\lambda_n\}$ такой, что $-\pi\leqslant \operatorname{Re}\lambda_n<\pi$, $0<\operatorname{Im}\lambda_1\leqslant\operatorname{Im}\lambda_2\leqslant\ldots$ Тогда в определении показателя сходимости ряд (1.2) можно заменить рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Im}\lambda_n)^{-k}, \tag{1.3}$$

так как оба ряда (1.2) и (1.3) одновременно сходятся или расходятся. Если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет конечный показатель сходимости $\varkappa$, то показатель сходимости последовательности $\{\lambda_n+2l\pi\}$, $l=0,\pm1,\ \pm2,\ldots$ равен $\varkappa+1$.

Пусть $n(v,\ \lambda)$ — число точек λ_n в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$, $0<\operatorname{Im}z\leqslant v$ и

$$N(v,\ \lambda)=\sum_{0<\operatorname{Im}\lambda_n\leqslant v}\ \sum_{l=-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4v}\,(x-\bar{\lambda}_n-2l\pi-2iv)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4v}\,(x-\lambda_n-2l\pi)}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^v n(s,\ \lambda)\,ds+r_\lambda,$$

$$|r_\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^v\frac{n(s,\ \lambda)}{s}\,ds.$$

Тогда, для $0<k<\infty$ ряд (1.3) и интегралы

$$\int^{\infty}s^{-k-1}\,n(s,\ \lambda)\,ds,$$

$$\int^{\infty}s^{-k-2}\,N(s,\ \lambda)\,ds$$

сходятся или расходятся одновременно.

Отсюда следует, что:

а) если показатель сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$ равен $\varkappa$, то порядок функции $n(v,\ \lambda)$ также равен $\varkappa$;

б) функции $v\,n(v,\ \lambda)$ и $N(v,\ \lambda)$ одного и того же порядка.

Для последовательности $\{\lambda_{-n}\}$ с $-\pi\leqslant\operatorname{Re}\lambda_{-n}<\pi$, $0>\operatorname{Im}\lambda_{-1}\geqslant\operatorname{Im}\lambda_{-2}\geqslant\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_{-n}=-\infty$ совершенно аналогично определяются функции $n(-v,\ \lambda)$ и $N(-v,\ \lambda)$.

Через $n(0,\lambda)$ будем обозначать число точек λ на отрезке $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$, $\operatorname{Im}z=0$.

В. *Функция $T(v,f)$ означает характеристику* (в смысле Мюгеля) *периодической мероморфной функции $f(z)$ с периодом* 2π.

$$T(v,\ f)=T^*(v,\ f)+T^*(-v,\ f)+N_0(v,\ f).$$

$T^*(v,f)$ и $T^*(-v,f)$ соответственно характеристики в верхней и нижней полуплоскостях

$$T^*(\pm v,\ f)=m(\pm v,\ f)+N(\pm v,\ f).$$

Здесь

$$m(\pm v, f)=\left(\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{v}\right)\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(u\pm iv)|\,du,$$

$n(\pm v, f)$, $n(0, f)$ — число полюсов функции $f(z)$ в областях определенных в Б и .

$$N(\pm v, f)=\frac{1}{2}\int_0^v n(\pm s, f)\,ds+r,$$

$$|r|\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^v\frac{n(\pm s, f)}{s}\,ds;\qquad N_0(v, f)=O(v).$$

Порядок функции $f(z)$ такой же, по определению, как у функции $T(v, f)$.

Следует заметить, что приведенные в Б и В определения функций T, m, n и N отличаются от неванлиновских, которые характеризуют рост на окружностях $|z|=r$, $r\to\infty$. В случае периодических функций удобнее исследовать рост на прямых $\operatorname{Im} z=\pm v$, $v\to\infty$.

Порядок мероморфной периодической функции определенный по характеристике Мюгеля совпадает с порядком определенным по характеристике Неванлины. Если $f(z)$ целая, периодическая с периодом 2π, функция, то порядок функции $\ln M(v)$ равен порядку функции $T(v, f)$. Здесь $M(v)=\max|f(z)|$.

Г. *Некоторые свойства функций* $T(v, f)$ и $m(\pm v, f)$. Так как

$$\ln^+|f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n|\leqslant\ln^+|f_1|+\ln^+|f_2|+\ldots+\ln^+|f_n|,$$

$$\ln^+|f_1+f_2+\ldots+f_n|\leqslant\ln n+\ln^+|f_1|+\ln^+|f_2|+\ldots+\ln^+|f_n|,$$

то

$$m(\pm v, f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)\leqslant m(\pm v, f_1)+m(\pm v, f_2)+\ldots+m(\pm v, f_n), \quad (1.4)$$

$$m(\pm v, f_1+f_2+\ldots+f_n)\leqslant\frac{1}{2}\ln n+m(\pm v, f_1)+\ldots+m(\pm v, f_n). \quad (1.5)$$

Функции $N(\pm v, f)$ удовлетворяют неравенствам

$$N(\pm v, f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)\leqslant N(\pm v, f_1)+N(\pm v, f_2)+\ldots+N(\pm v, f_n),$$

$$N(\pm v, f_1+f_2+\ldots+f_n)\leqslant N(\pm v, f_1)+N(\pm v, f_2)+\ldots+N(\pm v, f_n),$$

поэтому

$$T(v, f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)\leqslant T(v, f_1)+T(v, f_2)+\ldots+T(v, f_n), \quad (1.6$$

$$T(v, f_1+f_2+\ldots+f_n)\leqslant\ln n+T(v, f_1)+\ldots+T(v, f_n). \quad (1.7)$$

2. Аналог теоремы Бореля

Пусть имеем последовательность различных комплексных чисел, упорядоченную по возрастающим мнимым частям $\{\lambda_n\}$, с $-\pi\leqslant\alpha_n=\operatorname{Re}\lambda_n<\pi$, $\beta_n=\operatorname{Im}\lambda_n>0$, имеющую показатель сходимости $\varkappa$ $(\varkappa<\infty)$, и последовательность функций

$$R(z, \lambda_n)=\frac{A_n}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}}.$$

Если $\operatorname{Im}\lambda_n\to\infty$, то имеется такая последовательность тригонометрических полиномов $P_n(z)$, что ряд

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}}-P_n(z)\right] \quad (2.1)$$

сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости. При этом сумма ряда $\Phi(z)$ является мероморфной периодической функцией с периодом 2π.

В качестве $P_n(z)$ выберем сумму первых k_n членов разложения функции $R(z, \lambda_n)$ в тригонометрический ряд (по степеням e^{-iz}).

Теорема 1. *Если*

$$\frac{2\ln^+|A_n|}{\beta_n} \leqslant k_n \leqslant \frac{2\ln^+|A_n|}{\beta_n} + 1, \tag{2.2}$$

то для суммы ряда (2.1) $\Phi(z)$ *имеем*

$$m(v, \Phi) = O(v^{\mu+\varepsilon}),$$

где $\mu = \max(\tau, 1)$, *а*

$$\tau = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|A_n|}{\ln\beta_n}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} z = v > v_0$, v_0 — достаточно большое число, и

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z),$$

где

$$\Phi_1(z) = \sum_{\beta_n \leqslant v_0} \left[\frac{A_n}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}} - P_n(z)\right],$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{v_0 < \beta_n \leqslant 2v} \left[\frac{A_n}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}} - P_n(z)\right],$$

$$\Phi_3(z) = \sum_{\beta_n > 2v} \left[\frac{A_n}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}} - P_n(z)\right].$$

Слагаемое суммы $\Phi_3(z)$ можно представить в виде

$$\frac{A_n}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}} - P_n(z) = \frac{A_n e^{-ik_n(z-\lambda_n)}}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}}.$$

Оценим его сверху, опираясь на (2.2). Так как $v < \frac{\beta_n}{2}$, то

$$\left|A_n e^{-ik_n(z-\lambda_n)}\right| = |A_n|\, e^{k_n(v-\beta_n)} < |A_n|\, e^{-\frac{k_n\beta_n}{2}} \leqslant e^{\ln^+|A_n| - \frac{k_n\beta_n}{2}} \leqslant 1.$$

Знаменатель

$$\left|e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}\right| \geqslant e^{\beta_n} - e^{v} > e^{\beta_n} - e^{\frac{\beta_n}{2}} = e^{\frac{\beta_n}{2}}\left(e^{\frac{\beta_n}{2}} - 1\right) > e^{\frac{\beta_n}{2}}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{A_n}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}} - P_n(z)\right| < e^{-\frac{\beta_n}{2}}.$$

Пусть $p(t)$ — число точек λ_n, содержащихся в прямоугольнике $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \pi$; $t \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant t+1$ и

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln p(t)}{\ln t} = \nu.$$

Так как показатель сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$, по предположению, конечный ($\varkappa < \infty$), то и $\nu < \infty$.

Таким образом, при $\delta>0$ и $t>v_0$

$$p(t)<t^{\nu+\delta}$$

и

$$\sum_{2v\leqslant t\leqslant\beta_n\leqslant t+1}\left|\frac{A_n}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}}-P_n(z)\right|<p(t)e^{-\frac{t}{2}}<t^{\nu+\delta}e^{-\frac{t}{2}}.$$

Отсюда

$$|\Phi_3(z)|\leqslant\sum_{2v<\beta_n\leqslant 2v+1}\left|\frac{A_n}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}}-P_n(z)\right|+$$

$$+\sum_{2v+1<\beta_n\leqslant 2v+2}\left|\frac{A_n}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}}-P_n(z)\right|+\cdots=\varepsilon(v),$$

где $\varepsilon(v)\to 0$ при $v\to\infty$.

Это доказывает абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.1) внутри комплексной плоскости. Кроме того,

$$\ln^+|\Phi_3(u+iv)=O(1),$$

$$m(v,\ \Phi_3)=O(1). \qquad (2.4)$$

Рассмотрим рост функции $m(v,\ \Phi_2)$.

При $\operatorname{Im} z=v>v_0$ и $\beta_n>v_0$

$$|P_n(z)|=\left|-\frac{A_n}{e^{-i\lambda_n}}\sum_{l=0}^{k_n-1}e^{-il(z-\lambda_n)}\right|\leqslant|A_n|\sum_{l=0}^{k_n-1}e^{lv}\leqslant|A_n|\,e^{k_nv}.$$

Обозначим

$$\Theta(z)=\sum_{v_0<\beta_n\leqslant 2v}\frac{1}{\left|e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}\right|}.$$

Число точек λ_n, лежащих в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$, $v_0<\operatorname{Im} z\leqslant 2v$, не превышает $n(2v)$ — числа точек λ_n, лежащих в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$, $0<\operatorname{Im} z\leqslant 2v$. Поэтому

$$|\Phi_2(z)|\leqslant n(2v)\max|P_n(z)|+\Theta(z)\max|A_n|\leqslant$$

$$\leqslant n(2v)\max|A_n|\,e^{v\max k_n}+\Theta(z)\max|A_n|. \qquad (2.5)$$

Здесь максимумы берутся по всем n, для которых $v_0<\beta_n\leqslant 2v$.

Принимая во внимание (2.2) и (2.3), имеем

$$k_n\leqslant\frac{2\ln^+|A_n|}{\beta_n}+1\leqslant\frac{2\beta_n^{\tau+\varepsilon}}{\beta_n}+1=2\beta_n^{\tau-1+\varepsilon}+1.$$

Отсюда, если $\tau\geqslant 1$, то

$$\max k_n<v^{\tau-1+\varepsilon_1},\quad(\varepsilon_1>\varepsilon)$$

и, если $\tau<1$, то

$$\max k_n<v^{\varepsilon}$$

(ε — произвольно малое число, поэтому его всегда можно выбрать так, что $\tau+\varepsilon<1$).

Таким образом,

$$\max k_n<v^{\mu-1+\varepsilon}, \qquad (2.6)$$

где

$$\mu=\max(\tau,\ 1).$$

Воспользовавшись неравенствами (1.4), (1.5) и тем, что число слагаемых в сумме $\Theta(z)$ не превосходит $n(2v)$, получаем

$$m(v,\ \Theta) \leqslant \frac{1}{2} \ln n(2v) + \sum_{v_0 < \beta_n \leqslant 2v} m\left(v,\ \frac{1}{e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}}\right).$$

Пусть

$$\operatorname{Im} z = v$$

и

$$\varphi = \arg \frac{e^{-iz}}{e^{-i\lambda}} = \alpha - u,$$

$$\alpha = \operatorname{Re} \lambda,\quad u = \operatorname{Re} z.$$

Тогда

$$|e^{-iz} - e^{-i\lambda}| > e^{v} \sin|\varphi| \geqslant \frac{2}{\pi} e^{v} |\varphi|,$$

$$|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^{+} \frac{1}{|e^{-iu+v} - e^{-i\lambda}|}\, du \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \ln^{+} \frac{\pi}{2e^{v}|\varphi|}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2e^{v}} \int_{0}^{1} \ln \frac{1}{\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2e^{v}},$$

$$m\left(v,\ \frac{1}{e^{-iz} - e^{-i\lambda}}\right) = \left(\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{v}\right)\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^{+} \frac{1}{|e^{-iu+v} - e^{i\lambda}|}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4e^{v}} + o\left(\frac{1}{ve^{v}}\right),$$

следовательно,

$$m(v,\ \Theta) \leqslant \ln n(2v) + n(2v)\left(\frac{1}{4e^{v}} + o\left(\frac{1}{ve^{v}}\right)\right),$$

$$m(v,\ \Theta) = O(\ln v).$$

В соединении с (2.5) это дает

$$m(v,\ \Phi_2) = O(v^{\mu+\varepsilon}). \tag{2.7}$$

Функция $\Phi_1(z)$ – рациональная относительно e^{-iz}, поэтому

$$m(v,\ \Phi_1) \leqslant T(v,\ \Phi_1) = O(v),$$

$$m(v,\ \Phi_1) = O(v). \tag{2.8}$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из (2.4), (2.7) и (2.8)

Следствие 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z = -v < -v_0 < 0$, *тогда*

$$m(-v,\ \Phi) = O(1).$$

Действительно, сумма ряда $\Phi(z)$ не превосходит по модулю суммы сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|\, e^{-k_n(v_0+\beta_n)}}{e^{\beta_n} - e^{-v_0}}.$$

Отсюда

$$|\Phi(z)| = O(1) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z = -v, \quad \text{и} \quad m(-v,\ \Phi) = O(1).$$

Следствие 2. *Порядок функции $\Phi(z)$ не превосходит $\sigma=\max(\tau, \varkappa+1)$, где $\varkappa$ — показатель сходимости точек λ_n.*

Порядки $vn(v)$ и $N(v, \Phi)$ равные, отсюда

$$N(v, \Phi)=O(v^{\varkappa+1+\varepsilon}).$$

Точки λ_n лежат в верхней полуплоскости, поэтому

$$N(-v, \Phi)\equiv 0, \quad N_0(v, \Phi)\equiv 0.$$

Окончательно имеем

$$T(v, \Phi)=m(v, \Phi)+m(-v, \Phi)+N(v, \Phi)+N(-v, \Phi)+N_0(v, \Phi)=$$
$$=O(v^{\mu+\varepsilon})+O(v^{\varkappa+1+\varepsilon})+O(1)=O(v^{\sigma+\varepsilon}). \tag{2.9}$$

Подчиним полюсы функции $\Phi(z)$, определенной рядом (2.1), добавочному условию. Будем считать их достаточно удаленными друг от друга, если вокруг каждой точки $\lambda_n+2l\pi$, $n=1, 2, 3, \ldots, l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ можно построить окружность радиуса $|\lambda_n|^{-h}$, $h>0$ так, чтобы эти окружности не пересекались. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если порядок функции $\Phi(z)$ равен $\rho\,(1\leqslant\rho<\infty)$, то*

$$\tau=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln^+\ln^+|A_n|}{\ln\beta_n}\leqslant\rho. \tag{2.10}$$

Доказательство. В [4] доказано, что, если полюсы любой мероморфной в комплексной плоскости функции порядка $\rho<\infty$ удовлетворяют приведенному выше условию и вычет относительно полюса λ_n равен B_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, то

$$|B_n|<e^{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}}, \quad n>N.$$

В нашем случае

$$B_n=\operatorname*{Res}_{z=\lambda_n}\Phi(z)=\lim_{z\to\lambda_n}\Phi(z)(z-\lambda_n)=\lim_{z\to\lambda_n}\frac{A_n(z-\lambda_n)}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}}=iA_n\,e^{i\lambda_n}.$$

Отсюда

$$|A_n|\,e^{-\beta_n}<e^{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}},$$

$$|A_n|<e^{\beta_n+|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}}, \quad n>N.$$

Так как

$$|\lambda_n|=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\leqslant\sqrt{2}\,\beta_n,$$

если N столь большое, что $|\alpha_n|\leqslant\beta_n$ (это всегда возможно, в силу $-\pi\leqslant\alpha_n<\pi$), то

$$|A_n|<e^{\beta_n+(\sqrt{2}\,\beta_n)^{\rho+\varepsilon}}, \quad n>N.$$

Учитывая, что $\rho\geqslant 1$, окончательно получаем с $\varepsilon_1>\varepsilon$

$$|A_n|<e^{\beta_n^{\rho+\varepsilon_1}},$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln^+\ln^+|A_n|}{\ln\beta_n}\leqslant\rho,$$

$$\tau\leqslant\rho.$$

Теорема 2. *Порядок* ρ *функции* $\Phi(z)$ *равен* $\max(\tau, \varkappa+1)$.

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\rho \leqslant \max(\tau, \varkappa+1).$$

С другой стороны, по лемме

$$\tau \leqslant \rho.$$

Очевидно, что порядок функции $N(v, \Phi)$ не превосходит порядка $\Phi(z)$, поэтому

$$\varkappa+1 \leqslant \rho.$$

Комбинируя неравенства, получаем

$$\rho = \max(\tau, \varkappa+1).$$

Пусть имеем последовательность комплексных чисел $\{\lambda_{-n}\}$ с $-\pi \leqslant \leqslant \alpha_{-n} = \mathrm{Re}\,\lambda_{-n} < \pi$, $0 > \beta_{-1} = \mathrm{Im}\,\lambda_{-1} \geqslant \beta_{-2} = \mathrm{Im}\,\lambda_{-2} \geqslant \ldots$ и последовательность функции

$$R(z, \lambda_{-n}) = \frac{A_{-n}}{e^{iz} - e^{i\lambda_{n}}}.$$

Совершенно аналогично доказывается, что при надлежащем выборе тригонометрических полиномов $P_{-n}(z)$ ряд

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_{-n}}{e^{iz} - e^{i\lambda_{-n}}} - P_{-n}(z) \right] \tag{2.11}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости, сумма ряда $\Psi(z)$ является периодической с периодом 2π мероморфной функцией порядка

$$\rho_1 = \max(\tau_1, \varkappa_1+1),$$

где

$$\tau_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |A_{-n}|}{\ln(-\beta_n)},$$

$$\varkappa_1 = \overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\ln n(-v)}{\ln v}, \quad v > 0.$$

Пусть $f(z)$ мероморфная функция порядка ρ $(1 \leqslant \rho < \infty)$, периодическая с периодом 2π, все полюсы которой являются простыми и достаточно удаленными друг от друга.

Обозначим полюсы, лежащие в основной полосе периода

$$-\pi \leqslant \mathrm{Re}\, z < \pi$$

через $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Будем считать, что множество полюсов упорядочено по возрастающим мнимым частям, т. е.

$$\cdots \leqslant \beta_{-2} \leqslant \beta_{-1} < 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots$$

Полюсы, лежащие на отрезке $-\pi \leqslant \mathrm{Re}\, z < \pi$ действительной оси, причисляем к верхней полуплоскости — это никакого влияния на окончательный результат не оказывает, так как их лишь конечное число. Тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = G(z) + \Phi(z) + \Psi(z),$$

где $\Phi(z)$ – функция вида (2.1), $\Psi(z)$ – (2.11) и $G(z)$ – целая периодическая функция. Порядок функции $G(z)$ обозначим через σ. Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ не имеют общих полюсов, поэтому из доказанного непосредственно следует, что

$$\varphi = \max(\sigma, \tau, \tau_1, \varkappa+1, \varkappa_1+1).$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.IX.1967

Литература

1. А. Г. Нафталевич, Уч. Записки Вильнюсского ун-та, 25, матем.-физ., 8(1958) 31–47.
2. E. Borel, Leçons sur les fonctions méromorphes, Paris, 1903.
3. K. W. Mügel, Math. Nachr., 13, 3–4 (1955), 187–230.
4. J. M. Whittaker, Proc. London Math. Soc., 40, 255–272 (1936).

APIE PERIODINIŲ MEROMORFINIŲ FUNKCIJŲ SU PAPRASTAIS POLIAIS AUGIMĄ

V. TĖVELIS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama periodinių (periodas 2π) meromorfinių funkcijų, turinčių tik paprastus polius, eilės priklausomybė nuo polių ir juos atitinkančių periodinių pagrindinių dalių.

ON THE GROWTH OF A PERIODIC MEROMORPHIC FUNCTION WITH SIMPLE POLES

V. TĖVELIS

(*Summary*)

In this paper we consider the growth of a periodic meromorphic function $f(z)$ when its poles are only simple and the distance among them is not too little. This question for nonperiodic functions was considered by E. Borel.