LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК-518-9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ТИПА ДУЭЛИ

И. П. ЯЧЯУСКАС

Дуэлянты-игроки P и E, обладая постоянными скоростями v и u $(v>u)$, перемещаются на плоскости, имея при этом возможность в каждый момент времени менять направление своего движения („простое“ движение). Каждый дуэлянт знает расположения в каждый момент времени и узнает о действии своего противника, т.е. о выстреле, как только оно совершено („шумная“ дуэль). Предположим, что если дуэлянт стреляет и не попадает в мишень, то другой дуэлянт может добиться уверенного попадания, дойдя вплотную до мишени. Мишень игрока P – игрок E, а игрока E – ось абсцисс, т. е. игрок P погибает при поражении оси абсцисс. Вероятность попадания возрастает по мере сближения дуэлянта с мишенью и, когда дуэлянт доходит вплотную до мишени, становится равной единице.

Стратегия игрока P (E) указывает направление вектора скорости в каждый момент времени и момент выстрела.

Пусть платеж равен $+1$ уцелевшему дуэлянту и 0 – каждому дуэлянту, если оба они уцелели или погибли. Игра антагонистическая.

Пусть вероятности попадания для P и E равны соответственно $p(\rho(t_1))$ и $q(\eta(t_2))$, где $\rho(t_1)$ – расстояние между игроками в момент выстрела игрока P, а $\eta(t_2)$ – ордината точки расположения игрока E в момент его выстрела. Полагаем, что в начальный момент времени игрок E расположен в верхней полуплоскости. Тогда платеж M игроку P есть математическое ожидание его выживания для трех возможных интервалов времени выстрела: выстрел до, после или одновременно с выстрелом игрока E.

В зависимости от свойств функции p и q возможны дуэли следующих типов:

1. Игры, когда

$$p(\rho(t_1))=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad \rho(t_1)>0; \\ 1, & \text{если} \quad \rho(t_1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

и

$$q(\eta(t_2))=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad \eta(t_2)>0; \\ 1, & \text{если} \quad \eta(t_2)=0, \end{cases} \tag{2}$$

будем называть играми первого типа. Эти игры совпадают с играми преследования на полуплоскости. Игры такого рода рассматривались в работах [1], [2], [3].

2. Если $q(\eta(t_2))$ выражается формулой (2), а $p(\rho)$ – непрерывная монотонно убывающая функция, то игру будем называть игрой второго типа.

Если игрок P в начале игры находится в выигрывающем множеств определенном в статье [2], то игра совпадает с игрой преследован ия. П этому будем полагать, что игрок P не может поймать игрока E в полуплоскости $y \geqslant 0$. При этом предположении справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в момент времени t игроки P и E находятся соответственно в точках $P(x, y)$ и $E(\xi, \eta)$. Тогда оптимальная стратегия игрока E описывается следующим образом: вектор скорости в каждый момент времени направлен по нормали от верхней ветви гиперболы*

$$\frac{d^2 Y^2}{y^2} - \frac{d^2 (X-x)^2}{(d^2-1) y^2} = 1, \tag{3}$$

где $d = \frac{v}{u}$, а момент выстрела t_2 совпадает с моментом пересечения оси абсцисс. Игрок P не имеет достижимой оптимальной стратегии; ε-оптимальная стратегия для игрока P: вектор его скорости в каждый момент времени направлен по нормали к эллипсу

$$\frac{(X-\xi)^2}{(d^2-1)\eta^2} + \frac{Y^2}{d^2 \eta^2} = 1, \tag{4}$$

а момент выстрела опережает момент времени t_2 на достаточно малое время τ.

Доказательство. Пусть моменты выстрела игроков P и E соответственно t_1 и t_2. Тогда функция выигрыша

$$M = \begin{cases} 2p\left(\rho(t_1)\right) - 1, & \text{если} \quad t_1 < t_2; \\ p\left(\rho(t_2)\right) - q\left(\eta(t_2)\right), & \text{если} \quad t_1 = t_2; \\ 1 - 2q\left(\eta(t_2)\right), & \text{если} \quad t_1 > t_2. \end{cases} \tag{5}$$

Так как $q=0$ при $\eta(t_2) > 0$, то игроку E нет смысла стрелять, не дойдя до оси абсцисс. Поэтому момент времени t_2 означает, что $\eta(t_2) = 0$ или $q(\eta(t_2)) = 1$. Тогда

$$M = \begin{cases} 2p\left(\rho(t_1)\right) - 1, & \text{если} \quad t_1 < t_2; \\ p\left(\rho(t_1)\right) - 1, & \text{если} \quad t_1 = t_2; \\ -1, & \text{если} \quad t_1 > t_2. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) следует, что у игрока P есть только ε-оптимальная стратегия: он должен стрелять, пока игрок E еще не достиг оси абсцисс, но по возможности задержать свой выстрел, так как точность выстрела с течением времени увеличивается.

Так как

$$\sup_{t_1} M = 2p\left(\rho(t_2)\right) - 1,$$

то игрок E стремится максимизировать, а игрок P минимизировать расстояние $\rho(t_2)$.

Пусть игрок E за время δ достигает ось абсцисс в точке $A(\xi_1, 0)$. Тогда

$$\delta \geqslant \frac{\sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + \eta^2}}{u}. \tag{7}$$

За это время игрок P может дойти до точки $B(x_1, y_1)$, причем

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \leqslant v^2 \delta^2. \tag{8}$$

Игроку E следует так выбрать точку A, чтобы максимизировать расстояние между A и множеством точек B, удовлетворяющих неравенству (8), т. е

$$\max_{\xi_1} \min_{(x_1, y_1)} \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+y_1^2} = \max_{\xi_1} [\sqrt{(x-\xi_1)^2+y^2} - \delta v] =$$

$$= \max_{\xi_1} [\sqrt{(x-\xi_1)^2+y^2} - d\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+\eta^2}].$$

Пусть

$$\sqrt{(x-\xi_1)^2+y^2} - d\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+\eta^2} = f(\xi_1).$$

Приравнивая нулю производную функции $f(\xi_1)$, получаем, что точка максимума должна удовлетворять уравнению

$$(x-\xi_1)^2(\xi-\xi_1)^2(d^2-1)+d^2y^2(\xi-\xi_1)^2-\eta^2(x-\xi_1)^2=0. \tag{9}$$

Из определения функции $f(\xi_1)$ следует, что точка максимума $\bar{\xi}_1$ всегда существует, единственна и

$$\bar{\xi}_1 \begin{cases} >\xi, & \text{если} \quad x<\xi; \\ =\xi, & \text{если} \quad x=\xi; \\ <\xi, & \text{если} \quad x>\xi. \end{cases} \tag{10}$$

При условии (10) получаем, что уравнение (9) определяет $\bar{\xi}_1$ как однозначную функцию от x, y, ξ и η, т. е. $\bar{\xi}_1 = F(x, y, \xi, \eta)$.

Таким образом, если в момент времени t игроки находятся в точках $P(x(t), y(t))$ и $E(\xi(t), \eta(t))$, то игроку E следует направить свой вектор скорости в точку $\bar{A}(\bar{\xi}_1(t), 0)$, где $\bar{\xi}_1(t) = F(x(t), y(t), \xi(t), \eta(t))$. Так как игрок P стремится уменьшить расстояние между игроками в момент пересечения игроком E оси абсцисс, то ему тоже следует направить свой вектор скорости в точку $\bar{A}$. Таким образом, в оптимальных стратегиях векторы скорости направлены в точку $\bar{A}$.

Пусть нормаль к гиперболе (3), проходящая через точку гиперболы $D(a, b)$ и точку $E(\xi, \eta)$, пересекает ось абсцисс в точке $A_2(\xi_2, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{(\xi-a)(d^2-1)}{-(a-x)} = \frac{\eta-b}{b}; \\ &\frac{(\xi_2-a)(d^2-1)}{a-x} = 1; \\ &\frac{d^2b^2}{y^2} - \frac{d^2(a-x)^2}{(d^2-1)y^2} = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Из системы (11) получаем, что ξ_2 удовлетворяет уравнению

$$(x-\xi_2)^2(\xi-\xi_2)^2(d^2-1)+d^2y^2(\xi-\xi_2)^2-\eta^2(x-\xi_2)^2=0.$$

Так как берется верхняя ветвь гиперболы и $\bar{\xi}_1$ удовлетворяет (10), то ξ_2 совпадает с $\bar{\xi}_1$.

Таким образом, в оптимальной стратегии вектор скорости в каждый момент времени направлен по нормали от верхней ветви гиперболы (3).

Аналогично доказывается утверждение о направлении вектора скорости в ε-оптимальной стратегии игрока P.

3. Если $p\big(\rho(t_1)\big)$ выражается формулой (1), а $q(\eta)$ — непрерывная монотонно убывающая функция, то полученную игру будем называть игрой третьего типа.

Если игрок P не может поймать игрока E в полуплоскости $y \geqslant 0$, то игра совпадает с игрой преследования. Поэтому будем полагать, что игрок P находится внутри барьера.

Теорема 2. *Пусть в момент времени t игроки P и E находятся в точках $P\big(x(t), y(t)\big)$ и $E\big(\xi(t), \eta(t)\big)$, а расстояние между ними равно $\rho(t)$. Тогда оптимальная стратегия игрока P: в каждый момент времени t вектор скорости направлен в точку $A\big(\xi_1(t), \eta_1(t)\big)$ с координатами*

$$\xi_1(t) = \frac{d^2\xi(t) - x(t)}{d^2 - 1};$$

$$\eta_1(t) = \frac{d^2\eta(t) - y(t) - d\rho(t)}{d^2 - 1}, \tag{12}$$

а момент выстрела совпадает с моментом поимки игрока E. У игрока E имеется только ε-оптимальная стратегия, в которой вектор его скорости в каждый момент времени t направлен в точку $A\big(\xi_1(t), \eta_1(t)\big)$, а выстрел опережает поимку на достаточно малое время τ.

Доказательство. Так как $p=0$ при $\rho(t_1)>0$, то игроку P нет смысла стрелять, не поймав игрока E. Поэтому момент выстрела t_1 означает, что $\rho(t_1)=0$ или $p\big(\rho(t_1)\big)=1$. Тогда

$$M = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t_1 < t_2; \\ 1 - q\big(\eta(t_2)\big), & \text{если} \quad t_1 = t_2; \\ 1 - 2q\big(\eta(t_2)\big), & \text{если} \quad t_1 > t_2. \end{cases} \tag{13}$$

Из (13) следует, что у игрока E есть только ε-оптимальная стратегия.

Так как

$$\inf_{t_2} M = 1 - 2q\big(\eta(t_1)\big),$$

то игрок E стремится минимизировать, а игрок P — максимизировать $\eta(t_1)$.

Пусть поимка происходит за время δ. Тогда игроку E выгодно, чтобы точка поимки $\beta(\xi_2, \eta_2)$ удовлетворяла равенству

$$\sqrt{[\xi(t) - \xi_2]^2 + [\eta(t) - \eta_2]^2} = u\delta,$$

игроку P выгодно, чтобы было

$$\sqrt{[x(t) - \xi_2]^2 + [y(t) - \eta_2]^2} = v\delta.$$

Поэтому точка $B(\xi_2, \eta_2)$ принадлежит окружности с радиусом

$$R = \frac{d\rho(t)}{d^2 - 1}$$

и центром в точке

$$\left(\frac{d^2\xi(t) - x(t)}{d^2 - 1}, \quad \frac{d^2\eta(t) - y(t)}{d^2 - 1}\right).$$

Игрок E минимизирует свой проигрыш, если вектор его скорости направлен в точку окружности с наименьшей ординатой, т. е. в точку A. Так как поимка происходит на окружности, то обоим игрокам оптимально направлять свои вектора скорости в точку A. Теорема доказана.

4. Рассмотрим игру с непрерывными монотонно убывающими функциями меткости $p(\rho)$ и $q(\eta)$.

Пусть моменты выстрелов игроков P и E соответственно t_1 и t_2, тогда функция выигрыша определяется формулой (5). Так как $v>u$, то каждый дуэлянт может так действовать, чтобы увеличивалась вероятность попадания каждого игрока независимо от действий противника.

Пусть дуэлянты движутся так, чтобы увеличивались $p(\rho(t))$ и $q(\eta(t))$. Фиксируем эти траектории. Тогда получим простую игру с выбором момента времени. Для такой игры имеют место следующие результаты (см., например, [4], стр. 181). Если в начальный момент времени $p(\rho(t_0))+q(\eta(t_0))<1$, то оптимальные стратегии для дуэлянтов состоят в том, чтобы стрелять одновременно в момент времени t^*, удовлетворяющему уравнению

$$p(\rho(t^*))+q(\eta(t^*))=1$$

и значение игры равно $p(\rho(t^*))-q(\eta(t^*))$. Если в начальный момент времени $p(\rho(t_0))+q(\eta(t_0))\geqslant 1$, то игроки должны стрелять в начале игры.

Рассматривая все траектории, для которых увеличиваются $p(\rho(t))$ и $q(\eta(t))$, получаем дифференциальную игру с терминальной поверхностью $p(\rho(t))+q(\eta(t))=1$ и выигрышем $p(\rho(t))-q(\eta(t))$ на этой поверхности. Полученная дифференциальная игра эквивалентна первоначальной игре, и эту игру можно решать методом характеристик (методом Р. Айзекса). Увы, при помощи этого метода не удалось решить даже простейшего примера такой игры.

Для решения вышеуказанных игр можно использовать следующий итеративный метод.

Пусть в начальный момент игроки находятся в точках $P_0(x_0, y_0)$, $E_0(\xi_0, \eta_0)$ и $p(\rho_0)+q(\eta_0)<1$. Пусть игрок E из точки E_0 по прямой переходит в точку $E_1'(\xi_0, \eta_1)$, где $\eta_1<\eta_0$, игрок P за это время из точки P_0 по прямой P_0E_1' переходит в точку $P_1'(x_1', y_1')$, и ордината точки E_1' удовлетворяет уравнению $p(\rho_1')+q(\eta_1)=1$. Ввиду непрерывности и монотонности функций $p(\rho)$ и $q(\eta)$, это уравнение имеет единственное решение. Строим игру второго типа Γ_1, где мишень игрока E прямая $y=\eta_1$, и игроки находятся в точках P_0, E_0. Из определения постоянной η_1 следует, что игрок P не может поймать игрока E в полуплоскости $y\geqslant\eta_1$. Поэтому можем применять теорему 1 и найти оптимальные траектории игроков в игре Γ_1. Пусть игрок E из точки E_0 по оптимальной траектории для игры Γ_1 переходит в точку $E_1(\xi_1, \eta_1)$, а игрок P за это время по оптимальной траектории переходит в точку $P_1(x_1, y_1)$. Ясно, что $p(\rho_1)+q(\eta_1)<1$.

Если построена игра Γ_n, то игру Γ_{n+1} строим следующим образом. Пусть игрок E из точки E_0 по оптимальной траектории для игры Γ_n переходит в точку $E_n(\xi_n, \eta_n)$, а игрок P за это время из точки P_0 по оптимальной траектории переходит в точку $P_n(x_n, y_n)$ и $p(\rho_n)+q(\eta_n)<1$. Тогда можем найти такую точку $E_{n+1}'(\xi_n, \eta_{n+1})$, $\eta_{n+1}<\eta_n$, чтобы игрок E из точки E_0 по ломаной $E_0E_nE_{n+1}'$ достиг точку E_{n+1}', а игрок P за это время по прямой P_0E_{n+1}' достиг точку $P'_{n+1}(x'_{n+1}, y'_{n+1})$ и было удовлетворено уравнение $p(\rho'_{n+1})+q(\eta_{n+1})=1$. Строим игру второго типа Γ_{n+1}, где мишень игрока E прямая $y=\eta_{n+1}$, и игроки находятся в первоначальных точках P_0, E_0. Так как $p(\rho'_{n+1})+q(\eta_{n+1})=1$, то игрок P не может поймать игрока E в полуплоскости $y \geqslant \eta_{n+1}$. Поэтому можем применять теорему 1 и найти оптимальные траектории игроков в игре Γ_{n+1}. В игре Γ_{n+1} оптимальные траектории обоих игроков – прямые линии, поэтому траектория $E_0E_nE'_{n+1}$ не является оптимальной для игрока E. Если игрок E движется по траектории $E_0E'_nE'_{n+1}$, то оптимальная траектория для игрока P является $P_0P'_{n+1}$. Таким образом, игрок может уменьшить свой проигрыш, т. е. если игроки в игре Γ_{n+1} по оптимальным траекториям переходят в точки E_{n+1} (ξ_{n+1}, η_{n+1}) и $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$, то $p(\rho_{n+1})+$ $+q(\eta_{n+1})<1$.

Так как последовательность $\{\eta_i\}$ ограничена снизу числом 0 и $\eta_i<$ $<\eta_{i-1}$, то эта последовательность сходится к пределу η^*. Обозначим игру второго типа, где цель игрока E – прямая $y=\eta^*$ и игроки производят выстрелы в момент времени, когда игрок E пересекает прямую $y=\eta^*$, через Γ^*.

Теорема 3. *Если в начальный момент времени $p(\rho)+q(\eta)<1$, то первоначальная игра Γ эквивалентна игре Γ^*.*

Доказательство. Γ эквивалентна дифференциальной игре с терминальной поверхностью $p(\rho(t))+q(\eta(t))=1$ и выигрышем $p(\rho(t))-q(\eta(t))$ на этой поверхности. В момент выстрела в игре Γ^* игроки находятся в точках $E(\xi^*, \eta^*)$, $P(x^*, y^*)$, для которых $p(\rho^*)+q(\eta^*)=1$. Значение игры Γ^* равно

$$p(\rho^*)-q(\eta^*)=1-2q(\eta^*)=2p(\rho^*)-1. \tag{14}$$

Таким образом, если игрок E в игре Γ применяет стратегию, совпадающую с оптимальной стратегией для игры Γ^*, то он проигрывает не больше чем $1-2q(\eta^*)$. Пусть игрок E применяет стратегию, при которой ему следует стрелять в момент времени t_2, для которого $q(\eta^*)>q((\eta(t_2))$. Тогда игрок P может добиться уверенного попадания, дойдя вплотную до мишени. В этом случае игрок E проигрывает $1-2q(\eta(t_2))>1-2q(\eta^*)$. Если игрок E применяет стратегию, предписывающую стрелять в момент времени t_2 и $q(\eta^*)<q(\eta(t_2))$, то игрок P имеет траекторию, для которой уравнение $p(\rho(t))+q(\eta(t))=1$ имеет решение $t_1<t_2$. Таким образом, если игрок P стреляет в момент времени t_1, то игрок E проигрывает $2p(\rho(t_1))-1=1-$ $-2q(\eta(t_1))$. Ввиду того, что $\eta(t_1)\geqslant\eta^*$, игрок E проигрывает не меньше чем $p(\rho^*)-q(\eta^*)$. Игрок P может не выстрелить в момент времени t_1, но после этого момента может двигаться по кривой погони. Кривая погони – это такая траектория движения игрока P, когда его вектор скорости направлен на точку, где находится в данный момент игрок E. Если игрок P, двигаясь по кривой погони, выстрелит в момент времени t', где $t_1<t'<t^2$, то $\rho(t')<\rho(t_1)$ и игрок E проигрывает

$$2p(\rho(t'))-1>2p(\rho(t_1))-1\geqslant p(\rho^*)-q(\eta^*).$$

Таким образом, стратегия игрока E, оптимальная в игре Γ^*, является оптимальной и в игре Γ.

Доказанное утверждение справедливо и для стратегии игрока P. В самом деле, пусть игрок E выбрал оптимальную стратегию в игре Γ, тогда игрок P, применяя оптимальную стратегию для игры Γ^*, выигрывает $p(\rho^*)-q(\eta^*)$. Если игрок P применяет стратегию, при которой ему следует стрелять раньше или после выстрела игрока E, то из (14) следует, что он может выиграть только меньше. Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
18.IX.1967

Литература

1. Л. А. Петросян, Одна игра преследования на полуплоскости, ДАН Арм. ССР, **40**, 4 (1965).
2. Л. А. Петросян, Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R_n, ДАН СССР, **161**, 1(1965).
3. И. П. Ячяускас, Одна игра преследования на полуплоскости, Лит. мат. сб., **VII**, 1 (1967).
4. М. Дрешер, Стратегические игры, изд-во „Советское радио", 1964.
5. R. Isaacs, Differential games, Wiley, New York, 1965.

DVIKOVOS TIPO DIFERENCIALINIAI LOŠIMAI

I. JAČIAUSKAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjami dvikovos tipo diferencialiniai lošimai plokštumoje, kai lošėjo E taikinys yra x-ašis, o lošėjo P — lošėjas E. Priklausomai nuo tikslumo funkcijų savybių, dvikovos su triukšmu yra suskirstytos į įvairius tipus. Surastos optimalios strategijos kai kuriems dvikovų tipams.

THE DIFFERENTIAL DUELS

I. JAČIAUSKAS

(*Summary*)

The games when each player has one bullet (noisy duel) and travels with simple motion are investigated. The target of player P is player E, and the target of E is x-axis. The solutions for some classes of these games are obtained.

К СВЕДЕНИЮ ПОДПИСЧИКОВ

Подписка на периодическое издание «Литовский математический сборник» принимается всеми отделениями Союзпечати, конторами, отделами и агентствами связи по Союзному тематическому каталогу газет и журналов и прейскуранту (индекс сборника — 76716). Цена подписки на год — 6 рублей.

CONTENTS