VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1968

УДК–511

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (II)

А. БАКШТИС

1. Введение

Арифметической функцией называется комплекснозначная функция $f(m)$, определенная для всех целых положительных чисел m. Если для всех взаимно простых m, n

$$f(mn)=f(m)f(n),$$

то арифметическая функция $f(m)$ называется мультипликативной. Предметом нашего рассмотрения будут вещественные мультипликативные функции, которые будем обозначать через $g(m)$. Так как мультипликативные функции, тождественно равные нулю, интереса не представляют, то будем считать, что $g(1)=1$.

Через $\nu_n\{\ldots\}$ будем обозначать частоту целых положительных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые каждый раз будут указываться вместо многоточия в скобках. Простое число везде обозначается через p. Для некоторых множеств простых чисел, которыми наиболее часто будем пользоваться, введем следующие обозначения:

$$L_{c,n}=\left\{p:\frac{1}{c}\leqslant|g(p)|\leqslant c,\ p\leqslant n\right\},$$

$$L_c=\left\{p:\frac{1}{c}\leqslant|g(p)|\leqslant c\right\}.$$

Суммы, распространенные по некоторым множествам простых чисел, для удобства будем называть рядами, несмотря на то, что некоторые из них являются конечными или даже суммирование ведется по пустому множеству простых чисел. В последнем случае сумму считаем равной нулю.

Положим еще

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad x\leqslant 0,\\ 1 & \text{для}\quad x>0.\end{cases}$$

В нашей заметке [1] даны необходимые и достаточные условия сходимости при $n\to\infty$ функции распределения $\nu_n\{g(m)<x\}$ к некоторой несимметрической предельной функции распределения. Из них следует, что сходимость рядов

$$\sum_p \frac{(|g(p)|-1)^*}{p}, \tag{1}$$

$$\sum_p \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p}, \tag{2}$$

где

$$x^* = \begin{cases} x & \text{для} \quad |x| \leqslant 1, \\ 1 & \text{для} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

является необходимым условием сходимости функции распределения $\nu_n\{g(m) < x\}$ при $n \to \infty$ к некоторой несимметрической предельной функции распределения.

В настоящей заметке нас будут интересовать такие мультипликативные функции $g(m)$, для которых ряд (1) расходится, в то время как ряд (2) сходится. Поэтому в данном случае мультипликативную функцию $g(m)$ центрируем путем умножения ее на последовательность положительных чисел a_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ Предельный закон распределения центрированной мультипликативной функции $a_n g(m)$ определяем также, как и нецентрированной функции $g(m)$. Именно, пусть функция распределения $\nu_n\{a_n g(m) < x\}$ при $n \to \infty$ сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней. Если в случае $F(x) \neq \varepsilon(x)$ еще

$$\nu_n\{g(m) < 0\} \to F(0),$$

$$\nu_n\{g(m) \leqslant 0\} \to F(+0),$$

то говорим, что функция распределения $\nu_n\{a_n g(m) < x\}$ сходится к предельной функции распределения $F(x)$.

Ясно, что предельный закон распределения зависит от центрирующего множителя a_n. При его выборе будем руководствоваться следующими соображениями. Пусть $g(m)$ любая вещественная мультипликативная функция, не принимающая значения 0. Тогда $\ln|g(m)|$ является аддитивной арифметической функцией и, как доказанно Й. Кубилюсом [2], функция распределения

$$\nu_n\{\ln|g(m)| + \ln a_n < x\}$$

при $n \to \infty$ сходится к некоторой предельной функции распределения только тогда, когда существует такое постоянное $c > 1$, что последовательность

$$\ln a_n + \sum_{p \in L_{c,\,n}} \frac{\ln|g(p)|}{p} = \beta(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

сходится. Таким образом, сходимость последовательности (3) является необходимым условием существования предельного закона распределения положительной мультипликативной функции $g(m)$. Поэтому естественно поставить задачу найти условия существования предельных законов распределения любых вещественных мультипликативных функций с одним и тем же центрирующим множителем. В дальнейшем будем считать, что центрирующий множитель a_n подобран так, что для некоторого $c > 1$ последовательность (3) сходится. В ходе доказательства теоремы 1 дадим его явное выражение через частные суммы ряда (1) в виде формулы (4) при условии, что ряд (2) сходится.

Докажем следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть*

$$a_n = \exp\left\{\rho(n) - \sum_{p \leqslant n} \frac{(|g(p)| - 1)^*}{p}\right\}, \tag{4}$$

где $\rho(n)$ — *любая сходящаяся последовательность вещественных чисел,* и при $x \to \infty$ для любого $\lambda > 0$

$$\sum_{x<p\leqslant x^\lambda} \frac{(|g(p)|-1)^{*)}}{p} \to 0.$$

Функция распределения $\nu_n\{a_n g(m) < x\}$ *при* $n\to\infty$ *сходится к некоторой несимметрической предельной функции распределения тогда и только тогда, когда сходятся ряды* (2) *и*

$$\sum_{g(p)<0} \frac{1}{p}, \tag{5}$$

и хотя бы при одном целом положительном α *имеет место неравенство* $g(2^\alpha) \neq -1$.

Предельный закон распределения является непрерывным тогда и только тогда, когда $g(m)$ *не принимает значения* 0 *и ряд*

$$\sum_{|g(p)|\neq 1} \frac{1}{p} \tag{6}$$

расходится.

*Элементы характеристического преобразования предельного закона распределения определяются по формулам**)

$$w_r(t) = \lim_{n\to\infty} a_n^{it} \prod_{p\leqslant n} \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varphi_r\big(g(p^\alpha), t\big)}{p^\alpha}, \qquad r=0,\ 1.$$

Теорема 2. *Если функция распределения* $\nu_n\{a_n g(m) < x\}$ *при* $n\to\infty$ *сходится к некоторой предельной функции распределения, отличной от* $\varepsilon(x)$, *то она является симметрической тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из следующих условий:*

а) *ряд* (5) *расходится,*

б) $g(2^\alpha) = -1$ *для всех целых* $\alpha \geqslant 1$.

Элементы характеристического преобразования предельного симметрического закона распределения, отличного от $\varepsilon(x)$, *равны*

$$w_0(t) = \lim_{n\to\infty} a_n^{it} \prod_{p\leqslant n} \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varphi_0\big(g(p^\alpha), t\big)}{p^\alpha},$$

$$w_1(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Теорема 3. *Если ряд* (2) *сходится, в то время как ряд* (5) *расходится, и существует такая постоянная* ρ *и сходящаяся к* 1 *последовательность* $c_n > 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *что при* $n\to\infty$

$$\sum_{p\leqslant n} \operatorname{sgn} g(p) = \frac{\rho n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin L_{c_n}}} 1 = o\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

то функция распределения $\nu_n\{a_n g(m) < x\}$ *при* $n\to\infty$ *сходится к некоторой симметрической предельной функции распределения, отличной от* $\varepsilon(x)$.

Элементы характеристического преобразования предельного закона распределения являются такими же, как и в теореме 2.

*) Определение функций $\varphi_r(x, t)$, $r \equiv 0, 1$ см. на стр. 8.

Доказательство этих теорем основано на некоторых теоремах Г. Деланжа [3, 4].

2. Аналитический аппарат. Предельные законы распределения аддитивных функций, т. е. таких арифметических функций, которые для всех взаимно простых m, n удовлетворяют условию

$$f(m\ n)=f(m)+f(n),$$

обычно изучаются с помощью преобразования Фурье. Это обусловлено тем, что к характеристической функции

$$\varphi_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,d\nu_n\{f(m)<x\}=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} e^{itf(m)}$$

закона распределения $\nu_n\{f(m)<x\}$ могут быть применены известные методы как аналитической, так и элементарной теории чисел. Если же применить преобразование Фурье к мультипликативной функции $g(m)$, то придется рассматривать суммы

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} e^{itg(m)},$$

где слагаемые $\exp\{itg(m)\}$ обладают более сложной природой, чем мультипликативные функции.

Поэтому при изучении предельных законов распределения для $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ так же, как и в [1], вместо преобразования Фурье воспользуемся характеристическим преобразованием, предложенным В. М. Золотаревым в [5] для целей перемножения независимых случайных величин. Характеристическим преобразованием функции распределения $F(x)$ называется матрица

$$W(t)=\begin{bmatrix} w_0(t) & 0 \\ 0 & w_1(t)\end{bmatrix},$$

где

$$w_r(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x,\ t)\ dF(x),\quad r=0,\ 1,$$

$$\varphi_r(x,\ t)=\begin{cases} |x|^{it}\ \operatorname{sgn}^r x & \text{для}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{для}\quad x=0.\end{cases}$$

Согласно этому, характеристическим преобразованием функции распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ является матрица

$$W_n(t)=\begin{bmatrix} {}_nw_0(t) & 0 \\ 0 & {}_nw_1(t)\end{bmatrix}$$

с элементами

$${}_nw_r(t)=\frac{a_n^{it}}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_r\Big(g(m),\ t\Big),\qquad r=0,\ 1.$$

Комплекснозначную мультипликативную арифметическую функцию $f(m)$ отнесем к классу $\mathfrak{M}_0$, если $|f(m)|\leqslant 1$ и $f(1)=1$. Легко проверить, что функции $\varphi_r(g(m),\ t)$, $r=0,\ 1$, принадлежат классу $\mathfrak{M}_0$.

Г. Деланж в [3, 4] исследовал поведение при $n \to \infty$ сумм

$$\frac{1}{n} \sum_{m \leqslant n} f(m),$$

где $f(m) \in \mathfrak{M}_0$. Мы воспользуемся следующими его теоремами, первые две из которых опубликованы в [3], а третья в [4].

Теорема А. *Если* $f(m) \in \mathfrak{M}_0$, *то*

1) $$\prod_{p \leqslant n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} = \Phi(f) \exp\left\{ - \sum_{p \leqslant n} \frac{1-f(p)}{p} \right\} + o(1), \qquad n \to \infty;$$

2) *если* $f(m)$ *зависит еще от параметра* t *и* $f(p^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ *являются непрерывными функциями этого параметра, то* $\Phi(f)$ *тоже является непрерывной функцией относительно* t;

3) $\Phi(f) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $f(2^\alpha) = -1$ *для всех целых* $\alpha \geqslant 1$.

Теорема В. *Если* $f(m) \in \mathfrak{M}_0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *ряд*

$$\sum_{\operatorname{Re} f(p) < 1 - \varepsilon} \frac{1}{p}$$

сходится, то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{m \leqslant n} f(m) = \prod_{p \leqslant n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} + o(1).$$

Теорема С. *Если* $f(m) \in \mathfrak{M}_0$ *и существует такое постоянное* ρ, *что*

$$\sum_{p \leqslant n} f(p) = \frac{\rho n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right), \quad n \to \infty,$$

а в случае $\rho = 1$ *еще*

$$\sum_{p} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} = +\infty,$$

то при $n \to \infty$

$$\sum_{m \leqslant n} f(m) = o(n).$$

3. Доказательство теоремы 1. Элементы характеристического преобразования предельного закона распределения для функции распределения $\nu_n \{a_n g(m) < x\}$ обозначим через $w_r(t)$, $r = 0, 1$. В случае несимметрического предельного закона распределения имеем:

1) $w_0(0) = c_0 > 0$;

2) существует такое значение $t = t'$, что $w_1(t') = c_1$, $|c_1| > 0$.

Так как функции $w_r(t)$, $r = 0, 1$, непрерывны, то отсюда следует существование таких постоянных $T_0 > 0$ и $T_1 > 0$, что

$$|w_0(t)| \geqslant \frac{c_0}{2} \quad \text{для} \quad |t| \leqslant T_0,$$

$$|w_1(t)| \geqslant \frac{|c_1|}{2} \quad \text{для} \quad |t - t'| \leqslant T_1.$$

Достаточность. Пусть ряды (2), (5) сходятся и хотя бы при одном целом положительном α $g(2^\alpha)\neq-1$. Так как для любого $c>1$ имеет место неравенство

$$\sum_p \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p} \geqslant \left(1-\frac{1}{c}\right)\sum_{p\notin L_c}\frac{1}{p},$$

то ряд

$$\sum_{p\notin L_c}\frac{1}{p} \tag{7}$$

сходится при любом $c>1$. Тоже самое можно сказать и относительно ряда

$$\sum_{p\in L_c}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}, \tag{8}$$

так как для $x\geqslant\alpha$, $0<\alpha<1$, имеет место неравенство

$$\ln^2 x \leqslant \left(\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}\right)^2 (x-1)^2,$$

в силу которого

$$\sum_p \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p} \geqslant \left(\frac{c-1}{c\ln c}\right)^2 \sum_{p\in L_c}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}.$$

Теперь покажем, что центрирующий множитель a_n, подобранный так, что при некотором $c>1$ последовательность (3) сходится, можно представить в виде (4). Пусть a_n уже определен по формуле (3) при некоторых $c>1$ и $\beta(n)$. Если теперь вместо c взять другую постоянную $c'>1$, оставляя a_n прежним, то в (3) вместо $\beta(n)$ получим последовательность $\beta'(n)$, тоже сходящуюся. Действительно,

$$\beta'(n)=\ln a_n+\sum_{p\in L_{c',n}}\frac{\ln|g(p)|}{p}=\ln a_n+\sum_{p\in L_{c,n}}\frac{\ln|g(p)|}{p}+$$
$$+\operatorname{sgn}(c'-c)\sum{}'\frac{\ln|g(p)|}{p},$$

где Σ' обозначает суммирование по тем простым $p\leqslant n$, которые удовлетворяют одному из неравенств: $c<|g(p)|\leqslant c'$, или $\frac{1}{c'}\leqslant|g(p)|<\frac{1}{c}$, когда $c'>c$ и $c'<|g(p)|\leqslant c$, или $\frac{1}{c}\leqslant|g(p)|<\frac{1}{c'}$, когда $c'<c$. Ряд же

$$\sum{}'\frac{\ln|g(p)|}{p}$$

сходится, так как в случае $c'>c$ мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{p\notin L_c}\frac{\ln c'}{p},$$

а когда $c'<c$, то его мажорирует сходящийся ряд

$$\sum_{p\notin L_{c'}}\frac{\ln c}{p}.$$

Поэтому, определяя a_n по формуле (3), фиксируем значение $c=\frac{3}{2}$. Далее, пусть выбрана какая-нибудь сходящаяся последовательность вещественных чисел $\beta(n)$. Тогда центрирующий множитель a_n определяется по формуле

$$\ln a_n + \sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \frac{\ln|g(p)|}{p} = \beta(n). \tag{9}$$

Для $p\in L_{\frac{3}{2}}$ имеет место разложение

$$\ln|g(p)| = |g(p)|-1-\frac{1}{2}\left(|g(p)|-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(|g(p)|-1\right)^3-\cdots,$$

в силу которого

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \frac{\ln|g(p)|}{p} = \sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \frac{|g(p)|-1}{p} + R,$$

где

$$|R| = \left|\sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^3}{p}-\cdots\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{(|g(p)|-1)^2}{p}+\cdots\right] =$$

$$= \sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \frac{(|g(p)|-1)^2}{p} \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p}.$$

Далее, из соотношения

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{(|g(p)|-1)^*}{p} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ \frac{3}{2}<|g(p)|\leqslant 2}} \frac{|g(p)|-1}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ |g(p)|>2}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ |g(p)|<\frac{2}{3}}} \frac{|g(p)|-1}{p} +$$

$$+ \sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \frac{|g(p)|-1}{p}$$

имеем, что

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2},n}} \frac{|g(p)|-1}{p} = \sum_{p\leqslant n} \frac{(|g(p)|-1)^*}{p} + R',$$

где

$$|R'| \leqslant \left|\sum_{\substack{p\leqslant n\\ \frac{3}{2}<|g(p)|\leqslant 2}} \frac{|g(p)|-1}{p}\right| + \left|\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |g(p)|>2}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ |g(p)|<\frac{2}{3}}} \frac{|g(p)|-1}{p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p\notin L_{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p}.$$

Отсюда, в силу сходимости последовательности (9), следует сходимость последовательности

$$\ln a_n + \sum_{p \leq n} \frac{(|g(p)|-1)^*}{p} = \beta(n) - R - R' = \rho(n), \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

что и требовалось показать.

Далее установим, что в условиях данной теоремы можно воспользоваться теоремой B. Для этой цели покажем, что сходимость рядов (5) и (7) влечет за собой сходимость ряда

$$\sum_{\mathrm{Re}\,\varphi_r(g(p),\, t) < 1-\varepsilon} \frac{1}{p}, \quad r = 0,\ 1, \tag{10}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Действительно, когда $\varepsilon \geqslant 2$, то этот ряд заведомо сходится при любом t. Если же $t = 0$, а $\varepsilon > 0$ любой, то

$$\mathrm{Re}\,\varphi_0\Big(g(p),\ 0\Big) = \mathrm{sgn}\,|g(p)|,$$

$$\mathrm{Re}\,\varphi_1\Big(g(p),\ 0\Big) = \mathrm{sgn}\,g(p),$$

и сходимость ряда (10) следует из сходимости рядов (5) и (7). Кроме того, так как $\varphi_0\big(g(2^\alpha),\ 0\big) \neq -1$, то по теоремам A и B получаем, что при $n \to \infty$

$${}_n w_0(0) = \frac{1}{n} \sum_{m \leq n} \varphi_0\Big(g(m),\ 0\Big) \to w_0(0) > 0.$$

Пусть теперь $t \neq 0$ и $0 < \varepsilon < 2$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,\varphi_r\Big(g(p),\ t\Big) = \begin{cases} \cos t \ln |g(p)| \cdot \mathrm{sgn}^r g(p) & \text{для} \quad g(p) \neq 0, \\ 0 & \text{для} \quad g(p) = 0, \quad r = 0,\ 1. \end{cases}$$

Поэтому ряд (10) разложим на три ряда

$$\sum_{\mathrm{Re}\,\varphi_r(g(p),\, t) < 1-\varepsilon} \frac{1}{p} = \sum\nolimits_1 \frac{1}{p} + \sum\nolimits_2 \frac{1}{p} + \sum\nolimits_3 \frac{1}{p},$$

где Σ_1, Σ_2, Σ_3 обозначают суммирование по тем простым p, для которых $\mathrm{Re}\,\varphi_r\big(g(p), t\big) < 1 - \varepsilon$ и $g(p) = 0$, $g(p) > 0$ или $g(p) < 0$ соответственно. Так как

$$\sum\nolimits_1 \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p \notin L_c} \frac{1}{p},$$

то нам остается рассмотреть только случаи $g(p) > 0$ и $g(p) < 0$.

Множество тех простых p, по которым ведется суммирование Σ_2, включено в множество тех простых чисел, для которых имеет место неравенство

$$\frac{\arccos(1-\varepsilon)}{|t|} < \Big|\ln |g(p)|\Big|,$$

которое можно преобразовать к виду

$$|g(p)| > \exp\left\{\frac{\arccos(1-\varepsilon)}{|t|}\right\},$$

$$|g(p)| < \exp\left\{-\frac{\arccos(1-\varepsilon)}{|t|}\right\}.$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_2 \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p \notin L_c} \frac{1}{p},$$

где

$$c = \exp\left\{\frac{\arccos(1-\varepsilon)}{|t|}\right\}.$$

Так как ряд (7) сходится при любом $c>1$, то отсюда следует, что ряд

$$\sum\nolimits_2 \frac{1}{p}$$

тоже сходится для любых $t \neq 0$ и $0<\varepsilon<2$.

Все вышесказанное, конечно, также относится и к ряду

$$\sum\nolimits_3 \frac{1}{p},$$

когда $r=0$. Поэтому сходимость ряда (2) влечет за собой сходимость ряда (10) при $r=0$ для любых t и $\varepsilon>0$. Если же $r=1$, то в силу неравенства

$$\sum\nolimits_3 \frac{1}{p} \leqslant \sum_{g(p)<0} \frac{1}{p}$$

ряд (10) тоже сходится для любых t и $\varepsilon>0$.

Таким образом к функциям $\varphi_r\big(g(m), t\big)$, $r=0, 1$, для любого фиксированного $T>0$ при $|t| \leqslant T$ применима теорема B: при $n \to \infty$ имеем

$$
\begin{aligned}
{}_n w_r(t) &= \frac{a_n^{it}}{n} \sum_{m \leqslant n} \varphi_r\big(g(m),\ t\big) = \\
&= a_n^{it} \prod_{p \leqslant n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varphi_r\big(g(p^\alpha), t\big)}{p^\alpha} + o(1), \quad r=0,\ 1.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Отсюда по теореме A при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$ {}_n w_r(t) = \Phi(\varphi_r) \exp\left\{ it \ln a_n - \sum_{p \leqslant n} \frac{1-\varphi_r\big(g(p), t\big)}{p} \right\} + o(1), \quad r=0,\ 1,$$

где $\Phi(\varphi_r)$ — непрерывные функции, так как функции $\varphi_r\big(g(p^\alpha), t\big)$, $r=0, 1$, $\alpha=1, 2, 3, \ldots$ являются непрерывными относительно t. Поэтому равномерная сходимость при $n \to \infty$ и $|t| \leqslant T$ для любого фиксированного $T>0$ последовательности функций

$$it \ln a_n - \sum_{p \leqslant n} \frac{1-\varphi_r\big(g(p), t\big)}{p}, \qquad r=0, 1, \tag{12}$$

влечет за собой существование непрерывных пределов

$$w_r(t) = \lim_{n \to \infty} {}_n w_r(t), \quad r=0,\ 1, \tag{13}$$

а тем самым предельного закона распределения. Так как ряд

$$\sum_{p \notin L_c} \frac{1-\varphi_r\big(g(p), t\big)}{p}, \qquad r=0,\ 1,$$

при любом $c>1$ мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{p\notin L_c} \frac{2}{p},$$

то нужную сходимость функций (12) обеспечивает сходимость следующей последовательности функций

$$it\ln a_n - \sum_{p\in L_{c,\,n}} \frac{1-\varphi_r\left(g(p),t\right)}{p} = -\sum_{p\in L_{c,\,n}} \frac{1-\cos t\ln|g(p)|\cdot \operatorname{sgn}^r g(p)}{p} +$$

$$+i\left[t\ln a_n + \sum_{p\in L_{c,\,n}} \frac{\sin t\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p)\right] = A_r + iB_r, \quad r=0,\ 1,$$

с некоторым $c>1$. При $t=0$ сходимость этой последовательности функций очевидна. При $t\neq 0$ оба члена последнего выражения можно мажорировать следующим образом. Мнимую часть преобразуем к виду

$$B_r = t\left[\ln a_n + \sum_{p\in L_{c,\,n}} \frac{\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p)\right] -$$

$$-\sum_{p\in L_{c,\,n}} \frac{t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p), \quad r=0,\ 1,$$

и рассмотрим каждый из ее двух слагаемых в отдельности.

Для оценки второго слагаемого воспользуемся неравенством

$$|x-\sin x| \leqslant \frac{x^2}{6},$$

имеющим место при $|x|\leqslant 1$. Поэтому для всех $p\in L_{c,n}$ и

$$|t| \leqslant \min\left\{T,\ \frac{1}{\ln c}\right\}$$

рассматриваемая сумма мажорируется сходящимся рядом

$$\frac{t^2}{6}\sum_{p\in L_c} \frac{\ln^2|g(p)|}{p},$$

что влечет за собой ее равномерную сходимость при указанных значениях t. Эта сходимость имеет место и при $|t|\leqslant T$ для любого фиксированного $T>0$. Действительно, если $c>c'>1$, то из соотношений

$$\sum_{p\in L_{c,n}} \frac{t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p) =$$

$$= \sum_{p\in L_{c',\,n}} \frac{t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p) +$$

$$+ \sum_{p\in L_{c,\,n}-L_{c',n}} \frac{t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p),$$

$$\left|\sum_{p\in L_{c,\,n}-L_{c',\,n}} \frac{t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|}{p} \operatorname{sgn}^r g(p)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (|t|\ln c+1)\sum_{p\notin L_{c'}} \frac{1}{p}, \quad r=0,\ 1,$$

и того, что ряды (7) и (8) сходятся при любом $c>1$, следует равномерная сходимость рассматриваемой суммы и при

$$|t|\leqslant \min\left\{T, \frac{1}{\ln c'}\right\}.$$

Поэтому взяв $c'>1$ достаточно малым, можно сделать

$$\min\left\{T, \frac{1}{\ln c'}\right\}=T,$$

к чему мы и стремились.

Первый же член мнимой части B_r при $r=0$ имеет вид (3) и по ранее доказанному сходится. При $r=1$ его можно преобразовать к виду

$$\ln a_n+\sum_{p\in L_{c,\,n}}\frac{\ln|g(p)|}{p}-2\sum_{\substack{p\leqslant n\\ -c\leqslant g(p)\leqslant -\frac{1}{c}}}\frac{\ln|g(p)|}{p}.$$

Так как

$$\left|\sum_{\substack{p\leqslant n\\ -c\leqslant g(p)\leqslant -\frac{1}{c}}}\frac{\ln|g(p)|}{p}\right|\leqslant \ln c\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p},$$

то сходимость имеет место и на этот раз.

Далее установим равномерную сходимость сумм A_r, $r=0, 1$, при $|t|\leqslant T$ для любого фиксированного $T>0$. Для этой цели воспользуемся неравенством

$$1-\cos x\leqslant \frac{x^2}{2},$$

после чего видно, что сумма A_0 мажорируется сходящимся рядом

$$\frac{t^2}{2}\sum_{p\in L_c}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}. \tag{14}$$

Сумму же A_1 можно представить в виде двух сумм

$$A_1=\sum_{\substack{p\in L_{c,\,n}\\ g(p)>0}}\frac{1-\cos t\ln|g(p)|}{p}+\sum_{\substack{p\in L_{c,\,n}\\ g(p)<0}}\frac{1+\cos t\ln|g(p)|}{p},$$

первая из которых мажорируется сходящимся рядом (14), вторая же рядом

$$\sum_{g(p)<0}\frac{2}{p}.$$

Таким образом A_r, $r=0$, 1, при $n\to\infty$ сходится равномерно при $|t|\leqslant T$ для любого фиксированного $T>0$. Поэтому последовательность функций (12) имеет такой же характер сходимости, что доказывает существование непрерывных пределов (13). Для их определения переходом в (11) к пределу получаем формулу

$$w_r(t)=\lim_{n\to\infty}a_n^{it}\prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_r\left(g(p^\alpha), t\right)}{p^\alpha},\quad r=0,\ 1.$$

Этим существование предельного закона распределения доказано. Остается только показать, что он является несимметрическим. Для этого воспользуемся тем, что существует хотя бы одно целое положительное число α, что $g(2^\alpha)\neq -1$. Тогда легко видно, что $\varphi_1\big(g(2^\alpha),\,t\big)$ не может при всех t равняться -1. Пусть при $t=t'$ имеем, что $\varphi_1\big(g(2^\alpha),\,t'\big)\neq -1$. Тогда по теореме A при $t=t'$ имеет место неравенство $\Phi(\varphi_1)\neq 0$, в силу которого $w_1(t')\neq 0$, что и требовалось показать.

Необходимость. Пусть функция распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ при $n\to\infty$ сходится к некоторой предельной несимметрической функции распределения. Это равносильно утверждению, что существуют непрерывные относительно t пределы

$$w_r(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{it}}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_r\big(g(m),\,t\big),\qquad r=0,\ 1,$$

и функции $w_r(t)$, $r=0,\ 1$, обладают свойствами 1 и 2. Представим это соотношение в следующей эквивалентной форме

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_r\big(g(m),\,t\big)=w_r(t)\exp\{-it\ln a_n\}+o(1),\qquad n\to\infty.$$

Далее, через $\Omega(x)$ обозначим следующую функцию вещественной переменной x

$$\Omega(x)=-\ln a_{[x]}=-\rho([x])+\sum_{p\leqslant x}\frac{\big(|g(p)|-1\big)^*}{p},$$

где $[x]$ — целая часть x. Так как $\rho(n)$ сходящаяся последовательность, для любого фиксированного $\lambda>0$

$$\Omega(x^\lambda)-\Omega(x)=o(1),\quad x\to\infty.$$

Теперь, следуя пути, указанному в § 6 2.2.–6 2.5 [3], можно доказать, что при $|t|\leqslant T_0$, когда $r=0$, и при $|t-t'|\leqslant T_1$, когда $r=1$, имеют место неравенства

$$\sum_{p}\frac{1-\mathrm{Re}\,\varphi_r\big(g(p),t\big)}{p}\leqslant H_r,\qquad r=0,\ 1, \tag{15}$$

где

$$H_r=\sum_{p>2}\frac{2}{p(p-2)}+1-\ln\frac{|c_r|}{4},$$

а T_0 и T_1 некоторые положительные постоянные. Тогда тем более при $r=0$ имеют место оценки

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{1-\cos t \ln|g(p)|}{p} \leqslant H_0,$$

$$\sum_{g(p)=0} \frac{1}{p} < +\infty.$$

Отсюда, как показано в § 3 [1], следует сходимость рядов

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{\ln^2|g(p)|}{p}, \tag{16}$$

$$\sum_{p\notin L_{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p}. \tag{17}$$

Там же показано, что из сходимости ряда (16) следует сходимость ряда

$$\sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{(|g(p)|-1)^2}{p}.$$

Тогда в силу неравенства

$$\sum_{p} \frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p} \leqslant \sum_{p\in L_{\frac{3}{2}}} \frac{(|g(p)|-1)^2}{p} + \sum_{p\notin L_{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p},$$

ряд (2) сходится.

Далее, в силу неравенства (15) при $|t-t'| \leqslant T_1$ имеем

$$\sum_{-\frac{3}{2}\leqslant g(p)\leqslant -\frac{2}{3}} \frac{1+\cos t \ln|g(p)|}{p} \leqslant H_1.$$

А так как

$$1-\cos x \leqslant \frac{x^2}{2},$$

то тем более выполняется неравенство

$$\sum_{-\frac{3}{2}\leqslant g(p)\leqslant -\frac{2}{3}} \frac{2-\frac{t^2}{2}\ln^2|g(p)|}{p} \leqslant H_1.$$

Отсюда в силу сходимости рядов (16) и (17) следует сходимость ряда (5).

2. 10265

Так как ряды (2) и (5) сходятся, то имеет место теорема B. Теорема же A к функции $\varphi_1\big(g(m),\ t\big)$ всегда применима. Поэтому

$$w_1(t)=\lim_{n\to\infty}{}_nw_1(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{it}}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\Big(g(m),\ t\Big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n^{it}\prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_1\big(g(p^\alpha),\ t\big)}{p^\alpha}=$$

$$=\Phi(\varphi_1)\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-it\ln a_n-\sum_{p\leqslant n}\frac{1-\varphi_1\big(g(p),\ t\big)}{p}\right\},$$

где $\Phi(\varphi_1)\neq 0$ при $t=t'$. Тогда по теореме A равенство $\varphi_1\big(g(2^\alpha),\ t'\big)=-1$ не может иметь место для всех целых $\alpha\geqslant 1$. Поэтому и равенство $g(2^\alpha)=-1$ не может выполняться для всех целых $\alpha\geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Наконец, осталось рассмотреть условия непрерывности предельного закона распределения. Пусть функция распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ при $n\to\infty$ сходится к некоторой предельной функции распределения $F(x)$. Тогда функция распределения $\nu_n\{a_n|g(m)|<x\}$ при $n\to\infty$ тоже сходится к некоторой предельной функции распределения $\bar{F}(x)$ и

$$\bar{F}(x)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad x\leqslant 0,\\ F(x)-F(-x+0) & \text{для}\quad x>0.\end{cases}$$

Так как

$$\bar{F}(x+0)-\bar{F}(x)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad x<0,\\ F(x+0)-F(x)+F(-x+0)-F(-x) & \text{для}\quad x\geqslant 0,\end{cases}$$

то $F(x)$ и $\bar{F}(x)$ могут быть непрерывными только одновременно. Далее, если при каком нибудь целом положительном степени простого числа p^α имеет место равенство $g(p^\alpha)=0$, то

$$F(+0)-F(0)=\lim_{n\to\infty}\nu_n\{g(m)=0\}\geqslant\frac{1}{p^\alpha}.$$

Поэтому непрерывными предельными законами распределения могут обладать только такие мультипликативные функции, которые не принимают значения 0. Если же $g(m)$ является такой функцией, то $\ln|g(m)|$ является аддитивной арифметической функцией и, как доказано Й. Кубилюсом [2], предельный закон распределения функции распределения

$$\nu_n\{\ln|g(m)|+\ln a_n<x\}$$

является непрерывным тогда и только тогда, когда расходится ряд (6). Конечно, это относится также и к функции распределения $\bar{F}(x)$, а вместе с ней и к $F(x)$.

Теорема доказана полностью.

В доказательстве этой теоремы мы нигде не пользовались тем, что ряд (1) расходится. Поэтому она верна и в том случае, когда этот ряд сходится. Если тогда взять

$$\rho(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{(|g(p)|-1)^*}{p},$$

то получим теорему 1 из [1].

4. Доказательство теоремы 2. Эта теорема доказывается тоже с помощью характеристического преобразования. Именно, здесь воспользуемся тем, что закон распределения, отличный от $\varepsilon(x)$, является симметрическим тогда и только тогда, когда элементы его характеристического преобразования удовлетворяют условиям:

$$w_0(0)\neq 0,$$
$$w_1(t)=0, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Необходимость. Пусть функция распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ при $n\to\infty$ сходится к некоторой симметрической предельной функции распределения, отличной от $\varepsilon(x)$. Тогда функция распределения $\nu_n\{a_n|g(m)|<x\}$ при $n\to\infty$ тоже сходится к некоторой предельной функции распределения. Так как по лемме из [1] она не может равняться $\varepsilon(x)$, то к центрированной мультипликативной функции $a_n|g(m)|$ применима теорема 1, в силу которой ряды (16) и (17) сходятся. Кроме того, из условия симметричности

$$w_1(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{it}}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\Big(g(m),\ t\Big)=0, \quad -\infty<t<+\infty, \tag{18}$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\Big(g(m),\ t\Big)=0, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Поэтому дальнейшее доказательство проводится совсем также, как и теоремы 2 из [1].

Достаточность. Пусть функция распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$ при $n\to\infty$ сходится к некоторой предельной функции распределения, отличной от $\varepsilon(x)$, и имеет место хотя бы одно из следующих условий:

а) ряд (5) расходится,

б) $g(2^\alpha)=-1$ для всех целых $\alpha\geqslant 1$.

Так как ряды (16) и (17) сходятся и на этот раз, то простым повторением доказательства достаточности теоремы 2 из [1] получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\varphi_1\Big(g(m),\ t\Big)=0$$

при $|t|\leqslant T$ для любого фиксированного $T>0$. Ясно, что тогда имеет место (18).

Элемент характеристического преобразования предельного закона распределения $w_0(t)$ можно написать исходя из того, что он является одинаковым как для функции распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$, так и для $\nu_n\{a_n|g(m)|<x\}$. Последняя же удовлетворяет теореме 1.

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3. Пусть $g(m)$ удовлетворяет всем условиям данной теоремы. Как показано в § 3, сходимость ряда (2) влечет за собой сходимость рядов (7) и (8) для любого $c>1$, а также ряда (10), когда $r=0$. Поэтому имеют место и все отсюда вытекающие следствия относительно ${}_nw_0(t)$, в том числе существование непрерывного предела

$$w_0(t)=\lim_{n\to\infty}{}_nw_0(t)=\lim_{n\to\infty}a_n^{it}\prod_{p<n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\varphi_0\big(g(p^\alpha),\ t\big)}{p^\alpha}$$

и $w_0(0)\neq 0$.

Далее рассмотрим соотношение

$$\sum_{p\leqslant n}\varphi_1\Big(g(p),\ t\Big)=-\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\Big(1-\cos t\ln|g(p)|\Big)\operatorname{sgn}g(p)-$$

$$-i\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\Big(t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|\Big)\operatorname{sgn}g(p)+\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\operatorname{sgn}g(p)+$$

$$+it\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\ln|g(p)|\operatorname{sgn}g(p)+\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin L_{c_n}}}\varphi_1\Big(g(p),\ t\Big).$$

Пусть $T>0$ любое фиксированное число. Так как при $n\to\infty$, $c_n\to 1$, то существует такое число $n_0(T)$, что для $n\geqslant n_0(T)$

$$\ln c_n<\frac{1}{T}.$$

Поэтому при $p\in L_{c_n}$, $n\geqslant n_0(T)$ и $|t|\leqslant T$ имеем

$$\Big|t\ln|g(p)|\Big|\leqslant 1.$$

Учитывая это, мы находим, что при $n\to\infty$

$$\Big|\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\Big(1-\cos t\ln|g(p)|\Big)\operatorname{sgn}g(p)\Big|\leqslant\frac{t^2}{2}\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\ln^2|g(p)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{T^2}{2}\ln^2 c_n\sum_{p\leqslant n}1<T^2\ln^2 c_n\cdot\frac{n}{\ln n}=o\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

$$\Big|\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\Big(t\ln|g(p)|-\sin t\ln|g(p)|\Big)\operatorname{sgn}g(p)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{t^2}{6}\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\ln^2|g(p)|<\frac{T^2\ln^2 c_n}{3}\cdot\frac{n}{\ln n}=o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Кроме того, при $n\to\infty$ имеем

$$\Big|t\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\ln|g(p)|\operatorname{sgn}g(p)\Big|<2T\ln c_n\cdot\frac{n}{\ln n}=o\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

$$\Big|\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin L_{c_n}}}\varphi_1\big(g(p),t\big)\Big|\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin L_{c_n}}}1=o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Таким образом

$$\sum_{p\leqslant n}\varphi_1\Big(g(p),t\Big)=\sum_{p\in L_{c_n},\,n}\operatorname{sgn}g(p)+o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой

$$\Big|\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin L_{c_n}}}\operatorname{sgn}g(p)\Big|\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin L_{c_n}}}1=o\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

мы получим

$$\sum_{p\leqslant n} \varphi_1\big(g(p),\ t\big) = \sum_{p\leqslant n} \operatorname{sgn} g(p) + o\left(\frac{n}{\ln n}\right) = \frac{\rho n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Кроме того, при $|t| \leqslant T$ и $c = \exp \frac{1}{T}$ имеет место неравенство

$$\sum_{p} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi_1\big(g(p),\ t\big)}{p} \geqslant 2 \sum_{g(p)<0} \frac{1}{p} - 2 \sum_{p \notin L_c} \frac{1}{p} - \frac{t^2}{2} \sum_{p \in L_c} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p},$$

в силу которого

$$\sum_{p} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi_1\big(g(p),\ t\big)}{p} = +\infty.$$

Наконец, так как $\varphi_1\big(g(m), t\big)$ удовлетворяет всем условиям теоремы C, то при $|t| \leqslant T$ для любого фиксированного $T > 0$ имеем

$$w_1(t) = \lim_{n\to\infty} {}_n w_1(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{it}}{n} \sum_{m\leqslant n} \varphi_1\big(g(m),\ t\big) = 0.$$

Теорема доказана.

6. Примеры. 1. Для мультипликативной функции

$$g(m) = \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{\ln \ln p}\right) \operatorname{sgn}(p - c),$$

где c — любое фиксированное вещественное число не равное простому, ряды (2) и (5) сходятся, в то время как ряд (6) расходится. Поэтому функция распределения $\nu_n\ \{a_n\ g\ (m) < x\}$ при $n\to\infty$ сходится к некоторой несимметрической непрерывной предельной функции распределения. Так как

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{(|g(p)| - 1)^2}{p} = \sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p \ln \ln p} = \ln \ln \ln n + C + O\left(\frac{1}{\ln \ln n}\right),$$

то центрирующий множитель равен

$$a_n = \frac{\psi(n)}{\ln \ln n}, \quad n \geqslant 3,$$

где $\psi(n)$ — любая сходящаяся последовательность положительных чисел, предел которой не равен нулю.

2. Если в предыдущем примере вместо $\operatorname{sgn}(p-c)$ взять $\operatorname{sgn}(c-p)$, то ряды (1) и (2) не изменятся, а ряд (5) будет расходящимся. Кроме того, при $n\to\infty$

$$\sum_{p\leqslant n} \operatorname{sgn} g(p) = -\frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\notin L_{c_n}}} 1 = o\left(\frac{n}{\ln n}\right), \quad \text{когда} \quad c_n = 1 + \frac{1}{\ln \ln \ln n}.$$

Поэтому функция распределения $\nu_n\{a_n g(m)<x\}$, где a_n определен также, как и в предыдущем примере, а

$$g(m)=\prod_{p\mid m}\left(1+\frac{1}{\ln\ln p}\right)\operatorname{sgn}(c-p),$$

при $n\to\infty$ стремится к некоторой симметрической предельной функции распределения, отличной от $\varepsilon(x)$.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Й. Кубилюсу за руководство моей работой.

Каунасский Политехнический
институт

Поступило в редакцию
17.X.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Лит. мат. сб., VIII, 1, 5–20 (1968).
2. Й. Кубилюс, Об асимптотических законах распределения аддитивных арифметических функций, Лит. мат. сб., V, 2, 261–273 (1965).
3. H. Delange, On a class of multiplicative arithmetical functions, Scripta math., 26, 121 – 141 (1963).
4. H. Delange, Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 3^e série, 78, 1–29 (1961).
5. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, 142, № 4, 788–791, 1962.

MULTIPLIKATYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ KLAUSIMU (II)

A. Bakštys

(*Reziumė*)

Sakysime, $g(m)$ – reali multiplikatyvinė aritmetinė funkcija, $\rho(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ – bet kuri konverguojanti realių skaičių seka ir

$$a_n=\exp\left\{\rho(n)-\sum_{p\leqslant n}\frac{(|g(p)|-1)^*}{p}\right\},$$

kur

$$x^*=\begin{cases} x, & \text{kai } |x|\leqslant 1,\\ 1, & \text{kai } |x|>1.\end{cases}$$

Remiantis H. Delanžo darbais [3, 4], nagrinėjamos pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_n\{a_n g(m)<x\}=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ a_n g(m)<x}}1 \qquad (1)$$

konvergavimo, kai $n\to\infty$, prie kurios nors ribinės pasiskirstymo funkcijos sąlygos. Gautas šis pagrindinis rezultatas.

Jeigu kiekvienam $\lambda>0$

$$\sum_{x<p\leqslant x}\frac{(|g(p)|-1)^*}{p}\to 0,$$ *kai* $x\to\infty$, *tai pasiskirstymo funkcijos* (1) *turi nesimetrišką ribinį pasiskirstymo dėsnį tada ir tik tada, kai eilutės*

$$\sum_{p}\frac{\left((|g(p)|-1)^*\right)^2}{p}, \quad \sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}$$

konverguoja ir nors vienai sveikai $\alpha\geqslant 1$ *reikšmei* $g(2^\alpha)\neq -1$.

Be to, gautos pasiskirstymo funkcijų (1) konvergavimo į simetrišką ribinį pasiskirstymo dėsnį pakankamos sąlygos ir būtinos bei pakankamos sąlygos, kad ribinis dėsnis būtų simetriškas, kai jis egzistuoja.

ÜBER DIE GRENZVERTEILUNGEN VON MULTIPLIKATIVEN ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN. II

A. Bakštys

(Zusammenfassung)

Sei $g(m)$ eine reellwertige multiplikative zahlentheoretische Funktion und $\rho(n)$, $n=1, 2, \ldots$ ist eine beliebige konvergente Folge der reellen Zahlen. Wir setzen

$$a_n = \exp\left\{ \rho(n) - \sum_{p \leqslant n} \frac{\left(|g(p)|-1\right)^*}{p} \right\},$$

wobei

$$x^* = \begin{cases} x & \text{für } |x| \leqslant 1, \\ 1 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

ist.

Mit Berufung auf die Arbeiten [3, 4] von H. Delange werden Konvergenzkriterien für Verteilungsfunktionen

$$\nu_n\{a_n g(m) < x\} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ a_n g(m) < x}} 1 \tag{1}$$

für $n \to \infty$ betrachtet. Es wird folgendes Ergebnis bekommen.

Sei für jedes $\lambda > 0$

$$\sum_{x < p \leqslant x^\lambda} \frac{(|g(p)|-1)^*}{p} \to 0,$$

wenn $x \to \infty$.

Verteilungsfunktionen (1) *besitzen nichtsymmetrische Grenzverteilungsfunktion genau dann, wenn die Reihen*

$$\sum_p \frac{\left(\left(|g(p)|-1\right)^*\right)^2}{p}, \qquad \sum_{g(p)<0} \frac{1}{p}$$

konvergent sind und es wenigstens eine derartige ganze Zahl $\alpha \geqslant 1$ *gibt, daß* $g(2^\alpha) \neq -1$ *ist.*

Letztere sind hinreichende Bedingungen bekommen für Konvergenz gegen symmetrische Grenzverteilungsfunktion.