VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК–517.53

ТЕОРЕМА СОХОЦКОГО – ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М. Б. БАЛК

Функция $f(\bar z)$ комплексного переменного z называется целой полианалитической порядка $n+1$ (n – натуральное число), если она представима в следующем виде:

$$f(z)=f_0(z)+\bar z\cdot f_1(z)+\cdots+\bar z^n\cdot f_n(z), \tag{1}$$

где $\bar z$ обозначает число, сопряженное числу z, а $f_k(z)$ ($k=0, 1, \ldots, n$) – целые аналитические функции. Если функция $f(z)$ не является рациональной (относительно z и $\bar z$), то она называется трансцендентной.

Мы намерены доказать следующий аналог известной теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса:

Теорема. *Всякая целая трансцендентная полианалитическая функция* (1) *принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу A, конечному или бесконечному.*

Доказательство. При $A=\infty$ теорема следует из теоремы Лиувилля, справедливой для полианалитической функции (1) при любом натуральном n (см. [2]).

В случае *конечного* A докажем нашу теорему с помощью известной в теории распределения значений формулы Картана (см. [1], стр. 179). Доказательство проведем способом от противного. Допустим, что при некотором A теорема не верна. Тогда должна существовать такая окружность $\delta\{|w-A|=R>0\}$, что $f(z)$ не принимает ни одного значения a с окружности δ. Без потери общности можно считать, что $f_n(z)\not\equiv 0$ (не есть тождественный нуль) и что $f_n(0)\neq 0$, $f_n(1)\neq 0$, $A=0$, $R=1$ (если функция $f(z)$ не обладает этими свойствами, то вместо нее следует рассмотреть функцию вида $\lambda[f(\alpha z+\beta)-A]$ и подобрать параметры λ, α, β так, чтобы указанные требования уже выполнялись).

Функцию (1) можно переписать и так:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}(\bar z-1)^k\cdot\varphi_k(z), \tag{2}$$

где $\varphi_k(z)$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) – линейные комбинации функций $f_k(z)$ с постоянными (не зависящими от $f_k(z)$) коэффициентами, а $\varphi_n(z)\equiv f_n(z)$.

Иначе говоря,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}|z-1|^{2k}\cdot\frac{\varphi_k(z)}{(z-1)^k}. \tag{2'}$$

На окружности $\Gamma\,\{|z-1|=c>2\}$ полианалитическая функция $f(z)$ совпадает с мероморфной *аналитической* функцией

$$\Phi(z;\ c)=\sum_{k=0}^{n} c^{2k}\,\frac{\varphi_k(z)}{(z-1)^k}. \tag{3}$$

Ее перепишем так:

$$\Phi(z;\ c)=\sum_{k=0}^{n} c^{2k}\cdot\psi_k(z), \tag{4}$$

где

$$\psi_k(z)=\varphi_k(z)\mid(z-1)^k(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Функция (3) имеет единственный полюс $z=1$; порядок его равен n. Обозначим через $\text{Вр}_\Gamma f(z)$ вращение функции $f(z)$ на контуре Γ:

$$\text{Вр}_\Gamma f(z)=\frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\arg f(z).$$

При любом a, принадлежащем окружности δ, функция $f(z)-a$ не имеет нулей, и поэтому

$$\text{Вр}_\Gamma\,[f(z)-a]=0.$$

Но так как на Γ имеем $\Phi(z;\ c)\equiv f(z)$, то $\text{Вр}_\Gamma\,[\Phi(z;\ c)-a]=0$. А это значит, что число нулей функции $\Phi(z;\ c)-a$ равно числу полюсов этой функции (с учетом кратности тех и других), то есть равно n. Так как окружность $\gamma\,\{|z|=c-1\}$ лежит целиком внутри окружности Γ, то и внутри γ имеется не более, чем n a-точек функции $\Phi(z;\ c)$ и единственный ее полюс $z=1$ (порядка n).

Возможно указать такую окружность $L\,\{|z|=\rho\}$ $(0<\rho<1)$, что все нули функции $\Phi(z;\ c)-a$ при $|a|=1$ и достаточно большом c лежат вне этой окружности. Действительно, так как $\psi_n(0)=(-1)^n\cdot f_n(0)\neq 0$, то существует замкнутый круг $|z|\leqslant\rho$, в котором $\psi_n(z)$ не имеет нулей. Пусть на L

$$\min|\psi_n(z)|=m>0,\qquad \max|\psi_k(z)|=m_k\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

При c достаточно больших $(c>c_0)$ и $|a|=1$

$$\left|\frac{\Phi(z;\ c)-a}{c^{2n}}-\psi_n(z)\right|\leqslant\frac{m_0+1}{c^{2n}}+\frac{m_1}{c^{2n-2}}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{c^2}<\frac{m}{2}.$$

В силу теоремы Руше функция $\Phi(z;\ c)\ -a$ не имеет нулей внутри окружности L (при $c>c_0$).

Пусть теперь $a=\exp(i\alpha)$ и α пробегает все значения от 0 до 2π. Согласно известной формуле А. Картана (см. [1], стр. 179)

$$T[r,\ \Phi(z;\ c)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N[r,\ \exp(i\alpha)]\,d\alpha+\ln^+|\Phi(0,\ c)|. \tag{6}$$

Здесь $N(r,\ a)$ и $T(r,\ \Phi)$ — известные характеристики Неванлинны для функции $\Phi(z;\ c)$. При $\rho\leqslant r\leqslant c-1$

$$N[r,\ \exp(i\alpha)]=\int_\rho^r \frac{n[t,\ \exp(i\alpha)]}{t}\,dt<n\ln\frac{c}{\rho}. \tag{7}$$

Из формулы (3) ясно, что при больших c

$$\ln^+ |\Phi(0,\ c)| < 2n \ln c + \ln [(n+1) B],$$

где

$$B = \max |\varphi_k(0)| \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Следовательно, при $\rho \leqslant r \leqslant c-1$

$$T[r,\ \Phi(z;\ c)] < 3n \cdot \ln c + \ln [(n+1) B] + n |\ln \rho|. \tag{8}$$

Покажем, что последнее неравенство противоречит трансцендентности функции $f(z)$.

Заменим в (8) c на $c\sqrt{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n+1$) и положим $r = c_1 = c-1$. Ясно, что при $c \to \infty$

$$T[c_1;\ \Phi(z;\ c\sqrt{\nu})] = O(\ln c). \tag{9}$$

Рассмотрим систему тождеств ($\nu = 1, 2, \ldots, n+1$)

$$\Phi(z;\ c\sqrt{\nu}) = \psi_0(z) + \nu \cdot c^2 \psi_1(z) + \cdots + \nu^n c^{2n} \psi_n(z). \tag{10}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля (это определитель Вандермонда для чисел $1, 2, \ldots, n+1$), то возможно каждую из функций $c^{2k}\psi_k(z)$ представить в виде линейной комбинации функций $\Phi(z,\ c\sqrt{\nu})$ с коэффициентами, зависящими только от n и k, но не от c:

$$c^{2k} \cdot \psi_k(z) = A_1^{(k)} \cdot \Phi(z;\ c) + A_2^{(k)} \cdot \Phi(z;\ c\sqrt{2}) + \\ + \cdots + A_{n+1}^{(k)} \Phi(z,\ c\sqrt{\nu+1}). \tag{11}$$

Из формул (11) и (9) следует, что

$$T\Big(c_1,\ c^2 \psi_k(z)\Big) = O(\ln c).$$

Если еще учтем известное неравенство (см. [1], стр. 173):

$$|T(r,\ \lambda w) - T(r,\ w)| < |\ln \lambda| \quad (\lambda > 0),$$

то найдем, что

$$T[c,\ c^2 \psi_k(z)] - T[c,\ \psi_k(z)] \leqslant \ln(c^2),$$
$$T[c_1,\ \psi_k(z)] = O(\ln c) = O(\ln c_1) \quad \text{при} \quad c_1 \to \infty. \tag{12}$$

А это соотношение невозможно, если $\psi_k(z)$ — трансцендентная функция.

Итак, при любом k ($k=0, 1, \ldots, n$) функция $\psi_k(z)$ (а, следовательно, и $\varphi_k(z)$) должна быть рациональной, так что $f(z)$ — *рациональная* (а не трансцендентная) функция. Полученное противоречие с условием теоремы доказывает, что теорема справедлива.

Замечание. Используя известную формулу О. Фростмана (см. [1], стр. 182, (15)), можно получить иной вариант доказательства теоремы.

Смоленский педагогический институт

Поступило в редакцию
24.X.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, ГИТТЛ, М., 1941.
2. М. Б. Балк, Теоремы типа Лиувилля для полианалитических функций, Смоленский математический сборник, 1 (1965), стр. 25—34.

SOCHOCKIO–VEJERŠTRASO TEOREMA SVEIKŲ POLIANALIZINIŲ FUNKCIJŲ ATVEJU

M. Balkas

(*Reziumė*)

Straipsnyje įrodoma, kad funkcija

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\,\bar{z}^k$$

($f(z)$ nėra polinomas ir koeficientai $f_k(z)$ yra sveikos funkcijos) įgyja reikšmes, kaip norima artimas bet kuriam iš anksto duotam kompleksiniam skaičiui.

THE SOHOZKY–WEIERSTRASS THEOREM FOR ENTIRE POLYANALYTIC FUNCTIONS

M. Balk

(*Summary*)

In the note it is proved that every function of the form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\,\bar{z}^k;$$

(all $f_k(z)$ are entire analytic functions) which is not a polynomial attains values as close as desired to every given complex number.