УДК–519.21

ИНТЕГРАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ ОВАЛА И РАССТОЯНИЯ ВНУТРИ ОВАЛА

Э. ГЯЧЯУСКАС

В работе интегрально-геометрическим способом выводится формула вычисления функции распределения длины случайной хорды данного овала в случае II-ой модели Горовица (см. [3], [4]) и явное выражение средней хорды любого овала. I модель рассматривалась в [3]. Показывается, что кроме определения функции распределения расстояния между двумя случайными точками внутри овала используя дифференциальное уравнение Крофтона (см. [2]) это можно сделать, применяя формулы интегральной геометрии. Устанавливается связь между этими функциями. Связь между их моментами получена в [3] и там же получена связь между функциями в случае I модели. Устанавливается связь между функциями распределения длины хорды I и II модели Горовица.

Теорема 1. *Функция $P\{\sigma<x\}$ распределения (II модель) длины σ случайной хорды овала K равна*

$$P\{\sigma<x\}=1-\frac{1}{L}\int\limits_{\sigma\geqslant x} dG,$$

где L – периметр овала, dG – плотность множества прямых.

Доказательство.

$$P\{\sigma<x\}=1-P\{\sigma\geqslant x\}=1-\frac{\mu\{\sigma\geqslant x\,|\,G\cdot K\neq 0\}}{\mu\{\sigma\geqslant 0\,|\,G\cdot K\neq 0\}},$$

где μ – мера множества прямых.

Известно ([6]), что

$$\mu\{\sigma\geqslant 0\,|\,G\cdot K\neq 0\}=\int\limits_{G\cdot K\neq 0} dG=L,$$

$$\mu\{\sigma\geqslant x\,|\,G\cdot K\neq 0\}=\int\limits_{\sigma\geqslant x} dG.$$

Теорема доказана.

Замечание. Для II модели М. О. длины хорды овала определяется следующим образом и равна

$$E(\sigma)=\frac{\int\limits_{G\cdot K\neq 0}\sigma dG}{\int\limits_{G\cdot K\neq 0} dG}=\frac{\pi F}{L}.$$

Пример. Вычислим $P\{\sigma<x\}$ для круга с радиусом R.

$$P\{\sigma<x\}=1-\frac{1}{L}\int\limits_{\sigma\geqslant x} dG=1-\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\sigma\geqslant x} dp\, d\varphi,$$

где p — расстояние от начала координат до прямой G, φ — угол прямой, содержащей тот перпендикуляр, с осью абсцисс

$$\int\limits_{\sigma\geqslant x} dp\, d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}} dp\Bigg)d\varphi=\pi\sqrt{4R^2-x^2},$$

$$P\{\sigma<x\}=1-\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-x^2}.$$

Теорема 2. *Функция $P\{r\leqslant x\}$ распределения расстояния r между двумя точками, случайно расположенными внутри овала K площади F, равна*

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{1}{F^2}\int\limits_0^x rm(r)\,dr,$$

где $m(r)$ — кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины r, содержащихся внутри овала K.

Доказательство.

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{\mu\{r\leqslant x\mid P_1,\ P_2\in K\}}{\mu\{r\leqslant D\mid P_1, P_2\in K\}},$$

где μ — мера множества пар точек, D — наибольшая хорда овала K.

Известно ([6]), что

$$\mu\{r\leqslant D\mid P_1,\ P_2\in K\}=F^2.$$

Принимая $r=|t_2-t_1|$, можем записать, что

$$\mu\{r\leqslant x\mid P_1,\ P_2\in K\}=\int\limits_{r\leqslant x}|t_2-t_1|\,[dG\, dt_1\, dt_2],$$

где dG — плотность множества прямых G, соединяющих точки P_1 и P_2, t_1 и t_2 — расстояния этих точек от основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую G.

Так как по правилам внешнего произведения дифференциальных форм $[d\ldots d\ldots]$ здесь и везде по абсолютной величине при $r=[t_2-t_1]$, $[dt_1\, dt_2]=$ $=2\,[dt_1\, dr]$ (см. [6], стр. 13), то

$$\int\limits_{\substack{r\in K\\ r\leqslant x}} r[dG\, dt_1\, dt_2]=\int\limits_{r\leqslant x} r\Big(2\int\limits_{r\in K}[dG\, dt_1]\Big)\,dr=$$

$$=\int\limits_0^x rm(r)\,dr \qquad \text{(см. [6], стр. 35)},$$

где $m(r)$ — кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины r, содержащихся внутри овала К.

Теорема доказана.

Пример. В случае круга радиуса R, употребив выражение $m(r)$ из [1], получаем, что

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{1}{\pi^2R^4}\int_0^x r2\pi\left(2R^2\arccos\frac{r}{2R}-\frac{r}{2}\sqrt{4R^2-r^2}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{\pi R^4}\left[\pi x^2+2(R^2-x^2)\arcsin\frac{x}{2R}-\frac{x^3+2R^2x}{4R^2}\sqrt{4R^2-x^2}\right].$$

Выражение точно совпадает с известным в [5].

Теорема 3. *При обозначениях теорем* 1 *и* 2 *имеет место соотношение*

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{2}{F^2}\int_0^x r\left[\int_{\sigma\geqslant r}\sigma dG-rLP\{\sigma\geqslant r\}\right]dr.$$

Доказательство. Запишем утверждение теоремы 2 в развернутом виде

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{1}{F^2}\int_0^x rm(r)\,dr=\frac{1}{F^2}\int_0^x r\left[2\int_{\sigma\geqslant r}(\sigma-r)\,dG\right]dr=$$

$$=\frac{2}{F^2}\int_0^x r\left[\int_{\sigma\geqslant r}\sigma dG-r\int_{\sigma\geqslant r}dG\right]dr.$$

Из доказательства теоремы 1 видно, что

$$\int_{\sigma\geqslant r}dG=LP\{\sigma\geqslant r\}.$$

Поэтому

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{2}{F^2}\int_0^x r\left[\int_{\sigma\geqslant r}\sigma dG-rLP\{\sigma\geqslant r\}\right]dr.$$

Теорема доказана.

Путем сравнения выражений $P\{r\leqslant x\}$, полученных в теореме 2 и в работе [2], получим соотношение между функциями распределения длины хорды I и II модели Горовица

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{2}{F^2}\int_0^x r\left[\int_{\sigma\geqslant r}\sigma dG-rLP\{\sigma\geqslant r\}\right]dr,$$

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{4}{F}\,[B(x)+C_2],$$

$$B(x)+C_2=\int x\,[A(x,\ 1)+C_1(x)]\,dx,$$

$$A(x,\ \lambda)+C_1(x)=\pi\int\lambda\,[1-F(x,\ \lambda)]\,d\lambda,$$

где $F(x,\ \lambda)$ — функция распределения (I модель) длины овала, подобного данному с коэффициентом подобия λ, $C_1(x)$ определяется из

$$A\left(x,\ \frac{x}{D}\right)+C_1(x)=0,$$

D — наибольшая хорда овала.

Сравнив оба выражения $P\{r \leqslant x\}$ и продифференцировав, имеем

$$\frac{2}{F^2} x \Big[\int\limits_{\sigma \geqslant x} \sigma dG - xLP\{\sigma \geqslant x\} \Big] = \frac{4}{F} x [A(x,\ 1) + C_1(x)],$$

$$xLP\{\sigma < x\} = xL - \int\limits_{\sigma \geqslant x} \sigma dG + 2F[A(x,\ 1) + C_1(x)].$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4. *Функция распределения длины хорды овала, при второй модели Горовица, равна*

$$P\{\sigma < x\} = 1 - \frac{1}{xL} \int\limits_{\sigma \geqslant x} \sigma dG + \frac{2F}{xL} [A(x,\ 1) + C_1(x)],$$

$$A(x,\ \lambda) + C_1(x) = \pi \int \lambda [1 - F(x,\ \lambda)]\, d\lambda,$$

где $F(x,\ \lambda)$ — функция распределения, при первой модели, длины хорды овала, подобного данному с коэффициентом подобия λ, $C_1(x)$ определяется из

$$A\left(x,\ \frac{x}{D}\right) + C_1(x) = 0,$$

D — наибольшая хорда овала.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.I.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Гячяускас, О линейном и плоском поисках, Лит. мат. сб., V, 2, 1965, 227–231.
2. Э. Гячяускас, Функция распределения расстояния между двумя точками внутри овала, Лит. мат. сб., VI, 2, 1966, 245–248.
3. Э. Гячяускас, Функция распределения длины хорды овала и овалоида и ее связь с распределением расстояния внутри овала и овалоида, Лит. мат. сб., VII, 3, 1967, 409–412.
4. M. Horowitz, Probability of random paths across elementary geometrical shapes, J. Appl. Prob., 2, 1965, 169–177.
5. M. G. Kendall, P. A. P. Moran, Geometrical probability, London, 1963.
6. Л. Сантало, Введение в интегральную геометрию, Москва, 1956.

INTEGRALINĖS GEOMETRIJOS FORMULIŲ TAIKYMAS OVALO STYGOS ILGIO IR ATSTUMO OVALE PASISKIRSTYMO FUNKCIJOMS RASTI

E. Gečiauskas

(*Reziumė*)

Straipsnyje gauta formulė ovalo stygos ilgio pasiskirstymo funkcijai apskaičiuoti II Horovico modelio atveju. Tuo pačiu metodu gaunama atstumo ovale pasiskirstymo funkcija. Randamos ryšio formulės tarp šių funkcijų ir tarp ovalo stygos ilgio pasiskirstymo funkcijų I ir II Horovico odeliams.

THE METHOD OF THE INTEGRAL GEOMETRY FOR FINDING THE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF CHORD LENGTH OF AN OVAL AND OF DISTANCE IN AN OVAL

E. Gečiauskas

(Summary)

The formula for calculation of the distribution function of the chord length of oval is given in the case of II Horowitz's model. By the same method of the integral geometry the distribution function of a distance between two random points in an oval is given.The formulas of relation between these functions and between the distribution functions of the chord length of oval in the cases of I and II Horowitz's models are obtained.