VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК–517.941

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. МЕРКИС

В теории линейных дифференциальных уравнений рассматривается система

$$\frac{dX}{dt}=X\left[U_1\varphi_1(t)+U_2\varphi_2(t)\right], \tag{A}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – скалярные функции и U_1, U_2 – постоянные квадратные матрицы n-го порядка, обладающие свойством

$$U_1(U_2U_1-U_1U_2)-(U_2U_1-U_1U_2)U_1=0, \tag{1}$$

или вместе с (1) и свойством

$$U_2(U_2U_1-U_1U_2)-(U_2U_1-U_1U_2)U_2=0 \tag{1.1}$$

(см. [1], § 4 и [2], стр. 437–440).

В настоящей заметке рассмотрены виды матриц второго порядка, обладающих свойством (1), и показано, что не существует некоммутирующих матриц второго порядка U_1 и U_2, обладающих одновременно свойствами (1) и (1.1).

§ 1. Рассмотрим сначала вид матриц второго порядка U_1 и U_2, обладающих свойством (1). Запишем матрицы U_1 и U_2 в виде

$$U_1=\left\|\begin{matrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{matrix}\right\|,\quad U_2=\left\|\begin{matrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

Подставив U_1 и U_2 в (1) и приравняв нулю элементы полученной (перемножением и вычитанием) матрицы, (1) матричное условие заменим следующими четырьмя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned}&-2b_1c_1q_2+b_1c_2q_1+b_2c_1q_1=0,\\ &a_1b_1q_2-a_1b_2q_1-2b_1p-b_1d_1q_2+b_2d_1q_1=0,\\ &2c_1p-c_1d_1q_2+c_2d_1q_1+a_1c_1q_2-a_1c_2q_1=0,\\ &2b_1c_1q_2-b_2c_1q_1-b_1c_2q_1=0,\end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&-2b_1c_1q_2+(b_1c_2+b_2c_1)q_1=0,\\ &q_1(b_1q_2-b_2q_1)-2b_1p=0,\\ &q_1(c_1q_2-c_2q_1)+2c_1p=0,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$p=b_2c_1-b_1c_2,\quad q_k=a_k-d_k\quad (k=1,\ 2),$$

так как четвертое уравнение совпадает с первым.

Общий случай. Предположим, что

$$q_1=a_1-d_1\neq 0,$$
$$p=b_2c_1-b_1c_2\neq 0,$$
$$b_1\neq 0,\ c_1\neq 0.$$

В этих предположениях нетрудно убедиться, что уравнения (3) не являются независимыми: из любых двух можно получить третье. Например, умножая первое уравнение системы (3) на q_1 и складывая со вторым, помноженным на c_1, получим третье; или, умножая второе на c_1, а третье — на b_1, и складывая, получим первое.

Теперь из уравнений (3) рассмотрим первое и второе (следует заметить, что можно взять второе и третье или первое и третье). Исключив сначала из этих двух уравнений q_2, а потом q_1, заменим их следующими*):

$$\left.\begin{aligned} &q_1^2+4b_1c_1=0,\\ &b_1c_1q_2^2+(b_1c_2+b_2c_1)^2=0\end{aligned}\right\}$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned} &(a_1-d_1)^2+4b_1c_1=0,\\ &b_1c_1(a_2-d_2)^2+(b_1c_2+b_2c_1)^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Так как 8 элементов матриц U_1 и U_2 связаны двумя соотношениями, следовательно, независимых из них будет только 6 или, иначе говоря, все элементы могут быть выражены в функциях шести независимых переменных. Очевидно, что уравнения (4) будут выполнены, если элементы матриц U_1 и U_2 запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &a_1=a+2cm, && a_2=b+2dm,\\ &b_1=-cm^2, && b_2=m^2n,\\ &c_1=c, && c_2=n+2d,\\ &d_1=a, && d_2=b.\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, общий вид матриц U_1 и U_2, удовлетворяющих условию (1), можно записать так

$$U_1=\begin{Vmatrix} a+2cm, & -cm^2\\ c, & a\end{Vmatrix},\quad U_2=\begin{Vmatrix} b+2dm, & m^2n\\ n+2d, & b\end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Заметим, что первое из условий (4), а также вид матрицы U_1, элементы которой удовлетворяют этому условию, были указаны в монографии [1] (стр. 37). Второе же уравнение системы (4), а следовательно и вид матрицы U_2, данной формулы (6), являются более общими, чем в работе [1].

I случай. Пусть

$$q_1=a_1-d_1=0. \tag{7}$$

---

*) Чтобы исключить q_2, достаточно помножить первое уравнение системы (3) на q_1, а второе — на $2c_1$ и сложить. Из полученного этим путем уравнения и первого уравнения (3) легко исключается q_1.

Тогда из системы (3) получаем

$$\left.\begin{aligned} &b_1 c_1 (a_2 - d_2) = 0, \\ &b_1 (b_2 c_1 - b_1 c_2) = 0, \\ &c_1 (b_2 c_1 - b_1 c_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3а}$$

1. Пусть в (3а)

$$b_1 = 0. \tag{8}$$

В этом случае первые два уравнения (3а) выполнены, а из последнего находим

$$b_2 c_1^2 = 0. \tag{9}$$

Предположим, что $c_1 = 0$. Тогда матрица $U_1 = [a_1, a_1]$ и, следовательно, $U_1 U_2 = U_2 U_1$.

Если в (9) $b_2 = 0$ $(c_1 \neq 0)$, то получаем

$$U_1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ c_1 & a_1 \end{matrix} \right\|, \quad U_2 = \left\| \begin{matrix} a_2 & 0 \\ c_2 & d_2 \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

т. е. случай, указанный в монографии [1], § 4, когда $U_1 U_2 \neq U_2 U_1$.

2. Пусть в (3а)

$$c_1 = 0. \tag{11}$$

Этот случай аналогичен 1, только нули на побочных диагоналях матриц U_1 и U_2 будут стоять в нижнем левом углу.

3. Пусть теперь в уравнениях (3а) $b_1 \neq 0$ и $c_1 \neq 0$. Тогда из этих уравнений получим

$$\left.\begin{aligned} &q_2 = a_2 - d_2 = 0, \\ &p = b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Последние уравнения будут выполнены, если связанные ими элементы выберем следующим образом:

$$d_2 = a_2, \quad b_1 = b_1, \quad c_1 = c_1, \quad b_2 = b_1 m, \quad c_2 = c_1 m. \tag{13}$$

Следовательно,

$$U_1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{matrix} \right\|, \quad U_2 = \left\| \begin{matrix} a_2 & b_1 m \\ c_1 m & a_2 \end{matrix} \right\|, \tag{14}$$

и, как нетрудно проверить, $U_1 U_2 = U_2 U_1$.

II случай. Пусть теперь $q_1 \neq 0$, но

$$p = b_2 c_1 - b_1' c_2 = 0. \tag{15}$$

Последнее уравнение будет выполненным, если

$$b_1 = b_1, \quad c_1 = c_1, \quad b_2 = b_1 m, \quad c_2 = c_1 m. \tag{13а}$$

Подставив эти значения элементов в уравнения (3) (и имея в виду, что $q_1 \neq 0$), получим

$$\left.\begin{aligned} &b_1 c_1 (q_2 - m q_1) = 0, \\ &b_1 (q_2 - m q_1) = 0, \\ &c_1 (q_2 - m q_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3б}$$

1. Пусть в (3б)

$$q_2 - mq_1 = 0,$$

т. е.

$$a_2 - d_2 = m\,(a_1 - d_1). \tag{16}$$

Тогда уравнения (3б) выполнены. Уравнение же (16) будет выполняться, если

$$d_1 = d_1,\quad d_2 = d_2,\quad a_1 = n + d_1,\quad a_2 = mn + d_2. \tag{17}$$

Учитывая (13а) и (17), матрицы U_1 и U_2 запишем так:

$$U_1 = \begin{Vmatrix} n + d_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix},\quad U_2 = \begin{Vmatrix} mn + d_2 & b_1 m \\ c_1 m & d_2 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Но последние матрицы обладают свойством $U_1 U_2 = U_2 U_1$.

2. Пусть в (3б) $q_2 - mq_1 \neq 0$. Тогда из второго и третьего уравнений (3б) следует $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$, а учитывая (13а) — $b_2 = 0$ и $c_2 = 0$. Следовательно, матрицы U_1 и U_2 диагональные и $U_1 U_2 = U_2 U_1$.

Заметим, что $p = 0$ и при $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Но тогда, как нетрудно проверить, $q_1 = 0$ и следовательно, $U_1 = [a_1,\ a_1]$.

III случай. Пусть, наконец,

$$b_1 = 0, \tag{19}$$

а $q_1 = a_1 - d_1 \neq 0$ (случай $q_1 = 0$ уже рассмотрен).
Тогда уравнения (3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &b_2 c_1 = 0, \\ &b_2 = 0, \\ &c_1 q_2 - c_2 q_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3в}$$

Первое, как видно, выполняется на основании второго. Третье запишем так

$$c_1\,(a_2 - d_2) = c_2\,(a_1 - d_1). \tag{20}$$

Оно будет выполнено, если элементы, связанные им, подобрать следующим образом:

$$\begin{gathered} d_1 = d_1,\quad d_2 = d_2,\quad a_1 = d_1 + m,\quad a_2 = d_2 + n, \\ c_1 = mk,\quad c_2 = nk. \end{gathered} \tag{21}$$

Матрицы U_1 и U_2 в этом случае имеют вид

$$U_1 = \begin{Vmatrix} d_1 + m & 0 \\ mk & d_1 \end{Vmatrix},\quad U_2 = \begin{Vmatrix} d_2 + n & 0 \\ nk & d_2 \end{Vmatrix}.$$

Однако, как легко проверить, имеем $U_1 U_2 = U_2 U_1$.

Случай $c_1 = 0$ (при $q_1 \neq 0$) аналогичен только что рассмотренному.

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи, не входящие в общий.

§ 2. Покажем теперь, что не существует некоммутирующих матриц второго порядка, обладающих одновременно свойствами (1) и (1.1).

Подставив матрицы U_1 и U_2, записанные в виде (2), в (1.1) и приравняв к нулю элементы полученной матрицы, матричное условие (1.1) заменим следующими скалярными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} & -2b_2c_2q_1+(b_1c_2+b_2c_1)q_2=0, \\ & q_2(b_1q_2-b_2q_1)-2b_2p=0, \\ & q_2(c_1q_2-c_2q_1)+2c_2p=0, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где, как и прежде, $p=b_2c_1-b_1c_2$, $q_k=a_k-d_k$ $(k=1,\ 2)$. Общий вид элементов матриц U_1 и U_2, обладающих свойством (1), записан формулами (5). Подставив эти значения элементов из формул (5) в (2.2), получим следующие соотношения

$$\left.\begin{aligned} & cm^3(n+d)^2=0, \\ & cm^4(n+d)^2=0, \\ & cm^2(n+d)^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $c=0$. Тогда (2.3) выполнены. Но в этом случае матрица $U_1=[a,\ a]$ и, следовательно, $U_1U_2=U_2U_1$.

2. Пусть $m=0$ $(c\neq 0)$. Тогда

$$U_1=\begin{Vmatrix} a & 0 \\ c & a \end{Vmatrix}, \quad U_2=\begin{Vmatrix} b & 0 \\ n+2d & b \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

и $U_1U_2=U_2U_1$.

3. Пусть, наконец, в (2.3) $c\neq 0$, $m\neq 0$,

$$n+d=0, \tag{1.5}$$

или

$$d=-n.$$

В этом случае

$$U_1=\begin{Vmatrix} a+2cm, & -cm^2 \\ c, & a \end{Vmatrix}, \quad U_2=\begin{Vmatrix} b-2mn, & m^2n \\ -n, & b \end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

Однако, последние матрицы обладают свойством $U_1U_2=U_2U_1$.

Из остальных случаев, когда выполнено условие (1) нужно рассмотреть только I-й случай, так как во II и III случаях некоммутирующих матриц U_1 и U_2 не существовало.

В I-ом случае некоммутирующие матрицы U_1 и U_2 существовали в 1 и аналогичном ему подслучае 2. Именно, в I. 1 мы имели

$$\begin{aligned} & a_1=a_1, \quad a_2=a_2, \\ & b_1=0, \quad b_2=0, \\ & c_1=c_1, \quad c_2=c_2, \\ & d_1=a_1, \quad d_2=d_2. \end{aligned}$$

Подставив эти значения элементов в (2.2) (и имея в виду, что $q_1=0$ и $p=0$), получим

$$c_1q_2^2=0,$$

или

$$c_1(a_2-d_2)^2=0. \tag{1.7}$$

Отсюда

$$d_2=a_2,$$

так как $c_1\neq 0$ (в случае $c_1=0$, $U_1=[a_1,\ a_1]$).

Следовательно,

$$U_1=\begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & a_1 \end{Vmatrix},\quad U_2=\begin{Vmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & a_2 \end{Vmatrix},$$

т. е. $U_1U_2=U_2U_1$.

Случай I.2. аналогичен только что рассмотренному.

Утверждение доказано.

§ 3. Найдем теперь решение системы (A) в том случае, когда матрицы U_1 и U_2 имеют вид (6).

Как доказано в работе [1] (§ 4), интегральная матрица $X(t)$ системы (A), нормированная при $t=0$, в случае матриц U_1 и U_2 второго порядка, обладающих свойством (1), получается в виде

$$X(t)=e^{\int\limits_0^t e^{U_2L_2(\tau)}\,U_1\,e^{-U_2L_2(\tau)}\,\varphi_1(\tau)d\tau}\,e^{U_2L_2(t)}, \tag{3.1}$$

где

$$L_k(t)=\int\limits_0^t \varphi_k(\tau)\,d\tau\quad (k=1,\ 2), \tag{3.2}$$

Характеристические числа матриц U_1, U_2, имеющих вид (6), соответственно будут

$$\xi_1=\xi_2=a+cm, \tag{3.3}$$

$$\lambda_1=b+mn+2dm,\quad \lambda_2=b-mn. \tag{3.4}$$

Следовательно,

$$U_2=A^{-1}\begin{Vmatrix} b+mn+2dm, & 0 \\ 0,- & b-mn \end{Vmatrix}A, \tag{3.5}$$

где

$$A=\begin{Vmatrix} 2d+n, & mn \\ 1, & -m \end{Vmatrix}. \tag{3.6}$$

Учитывая (6), (3.5), (3.6) и принимая во внимание, что

$$e^{\pm U_2L_2(t)}=A^{-1}\,e^{\pm\begin{Vmatrix} b+mn+2dm, & 0 \\ 0, & b-mn \end{Vmatrix}L_2(t)}A,$$

а также

$$AU_1A^{-1}=\begin{Vmatrix} a+cm, & 2cm(n+d) \\ 0, & a+cm \end{Vmatrix},$$

получим

$$e^{U_2L_2(t)}\,U_1\,e^{-U_2L_2(t)}=$$

$$=A^{-1}\,e^{\begin{Vmatrix} b+mn+2dm, & 0, \\ 0, & b-mn \end{Vmatrix}L_2(t)}\,AU_1A^{-1}\,e^{-\begin{Vmatrix} b+mn+2dm, & 0 \\ 0, & b-mn \end{Vmatrix}L_2(t)}A=$$

$$=A^{-1}\begin{Vmatrix} a+cm, & 2cm(n+d)\,e^{2m(n+d)L_2(t)} \\ 0, & a+cm \end{Vmatrix}A.$$

На основании последней формулы, интегральную матрицу (3.1) запишем в виде

$$X(t)=e^{(a+cm)L_1(t)+bL_2(t)}A^{-1}e^{\begin{Vmatrix}0, & 2cm(n+d)\int\limits_0^t e^{2m(n+d)L_2(\tau)}\varphi_1(\tau)\,d\tau\\ 0, & 0\end{Vmatrix}}\times$$

$$\times\, e^{\begin{Vmatrix}m(n+2d), & 0\\ 0, & -mn\end{Vmatrix}L_2(t)}A,$$

или, окончательно,

$$X(t)=e^{(a+cm)L_1(t)+bL_2(t)}A^{-1}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}e^{m(n+2d)L_2(t)}, & 2cm(n+d)e^{-mnL_2(t)}\int\limits_0^t e^{2m(n+d)L_2(\tau)}\varphi_1(\tau)d\tau\\ 0, & e^{-mnL_2(t)}\end{Vmatrix}A. \qquad (3.7)$$

Заметим, что в том случае, когда матрицы U_1 и U_2 имеют вид (10), решение системы (A) после некоторых упрощений можно записать так:

$$X(t)=e^{a_1L_1(t)}A_1^{-1}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}e^{a_2L_2(t)}, & 0\\ c_1(d_2-a_2)e^{a_2L_2(t)}\int\limits_0^t e^{(d_2-a_2)L_2(\tau)}\varphi_1(\tau)d\tau, & e^{d_2L_2(t)}\end{Vmatrix}A_1, \qquad (3.8)$$

где

$$A_1=\begin{Vmatrix}1, & 0\\ c_2, & d_2-a_2\end{Vmatrix}.$$

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
14.IX.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Еругин, Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, Изд. Ленинградского университета, 1956.
2. И. А. Лаппо-Данилевский, Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1957.

KAI KURIŲ TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ INTEGRAVIMAS BAIGTINIU PAVIDALU

V. Merkys

(*Reziumė*)

Darbe išnagrinėtos antros eilės matricos, patenkinančios (1) sąlygą. Parodyta, kad neegzistuoja nekomutuojančios antros eilės matricos, pasižyminčios apibendrinto komutavimo (1) ir (1.1) savybėmis. (1) atveju rasta (A) sistemos integralinė matrica baigtiniu pavidalu.

ÜBER DAS INTEGRIEREN EINES LINEAREN SYSTEMS VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN GESCHLOSSENER FORM

V. Merkys

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir eine Matrix zweiter Ordnung, die der Bedingung (1) genügt. Wir beweisen, dass keine nichtkommutierende Matrix existiert, die die Eigenschaften (1) und (1.1) besitzt. Im Falle (1) lässt sich das System (1) in geschlossener Form integrieren.