VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК–519.21

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

П. СУРВИЛА

1. Обозначения и предварительные замечания. Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1.1}$$

с математическими ожиданиями

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$

и дисперсиями

$$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \ldots,\ \sigma_n^2,\ \ldots,$$

принимающих лишь целочисленные значения.

Обозначения:

$$F_j(x)=P\{\xi_j<x\},\quad p_{jm}=P\{\xi_j=m\},$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\quad m=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots,$$

$A_n=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ – математическое ожидание и

$B_n^2=\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j^2$ – дисперсия суммы $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$,

$$P_n(N)=P\{S_n=N\},$$

$M_j(z)$ – производящая функция моментов случайной величины ξ_j, $j=1, 2, \ldots$

По определению последовательность (1.1) удовлетворяет локальной предельной теореме, если

$$\sup_N \left| B_n P_n(N)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\right| \to 0$$

при $n\to\infty$ $\left(\text{здесь } x=\frac{N-A_n}{B_n}\right)$.

В локальной предельной теореме, очевидно, предполагается $x=O(1)$. Интересно также выяснить, как ведет себя величина $B_nP_n(N)$, когда $x=\frac{N-A_n}{B_n}$, возрастает вместе с ростом n (или B_n), но так, чтобы $x=d(B_n)$. Теоремы, получаемые в этих предположениях, называются теоремами о больших уклонениях.

Условия, при выполнении которых имеет место локальная предельная теорема для решетчатого случая, приводятся в работах Б. В. Гнеденко [1], Ю. В. Прохорова [2], В. В. Петрова [3], [4], Ю. А. Розанова [5], Т. А. Азларова [6] и других. Самые общие пока известные условия для л. п. т. даются в работе А. А. Миталаускаса и В. А. Статулявичуса [7].

Что касается теорем о больших уклонениях, то для решетчатого случая мне известен только результат В. Рихтера [8], касающийся одинаково распределенных слагаемых, который можно сформулировать следующим образом:

если независимые, одинакого распределенные случайные величины последовательности

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n, \ \ldots$$

с

$$M\xi_j=0, \ D\xi_j=\sigma^2>0,$$

принимающие только знечения из некоторой арифметической прогрессии с вероятностями

$$p_k=P\,\{\xi_j=a+kh\},$$

h — максимальный шаг распределения, k — целое число, a — некоторое фиксированное действительное число, удовлетворяют условию:

существует положительное число А такое, что для любого вещественного числа $s\,(|s|<A)$ сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\, dF(x),$$

то для $x=\dfrac{an+kh}{\sigma\sqrt{n}}=o(\sqrt{n})$ и $x>1$ при $n\to\infty$ имеет место соотношение

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\,P\{S_n=an+kh\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Здесь $\lambda(t)$ — степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях t.

В настоящей заметке доказываются две теоремы о больших уклонениях в решетчатом случае. Первая теорема касается равномерно ограниченных случайных величин. Вторая — рассматривает случай неодинаково распределенных случайных слагаемых, между функциями распределения которых имеется только конечное число различных.

2. Случай равномерно ограниченных слагаемых. На протяжении этого параграфа будем считать, что случайные величины последовательности (1.1) равномерно ограничены, т. е.

$$|\xi_j|\leqslant K, \ j=1, \ 2, \ \ldots \qquad (A$$

Теорема 1. *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет условиям* (A) *и*

$$\alpha_n=\sum_{j=1}^{n}\min_{\substack{0\leq r<q\\ q\geq 2}} P\{\xi_j\neq r\,(\mathrm{mod}\,q)\}\to\infty \quad (n\to\infty), \tag{B}$$

то при $n\to\infty$ *и* $|x|=0(B_n)$ *имеет место соотношение*

$$B_nP_n(N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{B_n}\lambda_n\left(\frac{x}{B_n}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{1+|x|}{B_n}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\{-\varphi(K)\alpha_n\}\right],$$

где

$$x=\frac{N-A_n}{B_n},\quad \varphi(K)=K^{-3}\exp\{-6\pi\},$$

а $\lambda_n(t)$ *— степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях* t *равномерно по* n.

Доказательство. Пусть $x>1$ и $x=o(B_n)$. Из условия (B) следует, что

$$B_n\to\infty,\ \text{когда}\ n\to\infty. \tag{2.1}$$

Кроме того, если обозначить через γ_{js} — s-ый семиинвариант случайной величины ξ_j, то из условия (A) следуют неравенства

$$|\gamma_{js}|\leq(s-1)!\ \sigma_j^2K^{s-2}\quad\text{при}\quad s\geq 2,\ j=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.2}$$

(Эти неравенства нам любезно сообщены А. Бикялисом; см. [9].) Очевидно также, что если выполняется условие (A), то при

$$|z|\leq\frac{\pi}{3K}$$

имеют место неравенства:

$$\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}\leq|M_j(z)|\leq\exp\left\{\frac{\pi}{3}\right\},\quad j=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.3}$$

из которых следует, что производящие функции моментов случайных величин ξ_j,

$$M_j(z)=\sum_m e^{zm}p_{jm},\quad j=1,\ 2,\ \ldots$$

являются функциями аналитическими в полосе $|\mathrm{Re}z|\leq\frac{\pi}{3K}$.

Обозначим через $\overline{M}_n(z)$ производящую функцию моментов суммы S_n, т. е.

$$\overline{M}_n(z)=\prod_{j=1}^{n}M_j(z). \tag{2.4}$$

Известно, что

$$P_n(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\pi}^{c+i\pi}\overline{M}_n(z)\,e^{-zN}\,dz,$$

для любого $|c|<\frac{\pi}{3k}$. Использовав обозначение $x=\frac{N-A_n}{B_n}$, отсюда получаем

$$P_n(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\pi}^{c+i\pi}\overline{M}_n(z)\,e^{-z(xB_n+A_n)}\,dz.$$

Взяв $0<\varepsilon<\pi$ и обозначив через

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\varepsilon}^{c+i\varepsilon} \overline{M}_n(z)\, e^{-z(xB_n+A_n)}\,dz, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{c-i\pi}^{c-i\varepsilon} + \int\limits_{c+i\varepsilon}^{c+i\pi} \overline{M}_n(z)\, e^{-z(xB_n+A_n)}\,dz\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

имеем

$$P_n(N) = I_1 + I_2. \tag{2.6}$$

Оценим в отдельности каждый интеграл.

Интеграл I_1 оцениваем методом перевала (см. [8]). Взяв такое c, чтобы круг $|z-c|<\varepsilon$ принадлежал кругу $|z|<\frac{\pi}{3K}$, мы сможем написать

$$\overline{M}_n(z)\, e^{-z(xB_n+A_n)} = \exp\{\ln \overline{M}_n(z) - z(xB_n+A_n)\}. \tag{2.7}$$

В качестве c берем точку перевала, т. е. решение уравнения

$$\frac{d}{dz}\{\ln \overline{M}_n(z) - z(xB_n+A_n)\} = 0. \tag{2.8}$$

Пусть $K_j(z) = \ln M_j(z)$ (здесь основное значение логарифма). Из соотношения (2.3) следует, что $K_j(z)$ является аналитическими функциями в круге $|z|<\frac{\pi}{6K}$. Следовательно, имеем

$$\left.\begin{aligned} &K_j(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{js}}{s!} z^s, \\ &\text{и} \\ &K_j'(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{js}}{(s-1)!} z^{s-1}, \quad j=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Поэтому уравнение (2.8) можно написать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} K_j'(z) - (xB_n+A_n) = 0.$$

После обозначений

$$\Gamma_{ns} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{js}, \quad s=1,\ 2,\ \ldots, \quad \tau = \frac{x}{B_n} \tag{2.10}$$

оно принимает вид

$$\tau = z + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{\Gamma_{ns} z^{s-1}}{B_n^s (s-1)!}. \tag{2.11}$$

Согласно неравенствам (2.2), ряд

$$\sum_{s=3}^{\infty} \frac{\Gamma_{ns} z^{s-1}}{B_n^s (s-1)}$$

мажорируется рядом

$$\frac{1}{K} \sum_{s=3}^{\infty} |Kz|^{s-1},$$

следовательно, он сходится абсолютно в круге $|z|<\frac{1}{K}$. Тем более он будет сходиться абсолютно в круге $|z|<\frac{\pi}{6K}$. Решение уравнения (2.11), z_0 получаем обращением ряда

$$z_0=\tau-\frac{\tau^2}{2}\frac{\Gamma_{n3}}{B_n^2}+\tau^3\left(\frac{3\Gamma_{n3}^2-\Gamma_{n4}B_n^2}{6B_n^4}\right)+\cdots \tag{2.12}$$

При оценке интеграла I_1 берем $c=z_0$ и ε подбираем такое, чтобы круг $|z-z_0|<\varepsilon$ лежал в круге $|z|<A_1<\frac{\pi}{6K}$ и ряд (2.12) сходился бы абсолютно при $|\tau|<\varepsilon$. Что такое $\varepsilon>0$ существует, следует из неравенств (2.2). Согласно обозначениям (2.5) и (2.10) и соотношениям (2.7), (2.9) получаем

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_0-i\varepsilon}^{z_0+i\varepsilon}\exp\left\{B_n^2\left[-z\tau+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{ns}z^s}{B_n^2 s!}\right]\right\}dz.$$

После замены переменного $z=z_0+it$, заметив, что

$$\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{ns}}{s!}z^s=\sum_{j=1}^{n}K_j(z)-zA_n,$$

и использовав соотношения (2.9), (2.11), имеем

$$-z\tau+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{ns}z^s}{B_n^2 s!}=-\tau z_0+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{ns}z_0^s}{B_n^2 s!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varphi_{kn}(z_0)}{B_n^2}(it)^k,$$

где

$$\rho_{kn}(t)=\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n}K_j^{(k)}(z_0). \tag{2.13}$$

Использовав выражение для τ а также соотношение (2.12), легко получим, что

$$-z_0\tau+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{ns}z_0^s}{B_n^2 s!}=-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda_n(\tau),$$

где

$$\lambda_n(\tau)=\frac{\Gamma_{n3}}{6B_n^2}-\frac{3\Gamma_{n3}^2-B_n^2\Gamma_{n4}}{24B_n^4}\tau+\cdots \tag{2.14}$$

ряд, сходящийся при достаточно малых τ. Итак, имеем

$$-z\tau+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{ns}z^s}{B_n^2 s!}=-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda_n(\tau)+\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=2}^{\infty}\rho_{kn}(z_0)(it)^k.$$

Следовательно,

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{B_n^2\tau}{2}+B_n^2\tau^3\lambda_n(\tau)\right\}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\rho_{kn}(z_0)(it)^k\right\}dt. \tag{2.15}$$

Оценим последний интеграл.

Из соотношений (2.9), используя (2.12), получаем

$$\rho_{2n}(z_0)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}K_j^{(2)}(z_0)=\frac{B_n^2}{2}\left[1+\tau\frac{\Gamma_{n3}}{B_n^2}+o(\tau)\right].$$

Взяв n такое, чтобы $o(\tau) \leqslant \frac{\tau(\Gamma_{n3})}{B_n^2}$, получим

$$\rho_{2n}(z_0) \geqslant B_n^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\tau |\Gamma_{n3}|}{B_n^2} \right].$$

Отсюда и неравенств (2.2) при $\tau < \frac{1}{8K}$ следует неравенство

$$\rho_{2n}(z) \geqslant \frac{1}{4} B_n^2. \tag{2.16}$$

После замены переменных $t' = t\sqrt{2\rho_{2n}(z_0)}$, получаем

$$I_1' = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \rho_{kn}(z_0)(it)^k \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\rho_{2n}(z_0)}} \int_{-\varepsilon\sqrt{2\rho_{2n}(z_0)}}^{\varepsilon\sqrt{2\rho_{2n}(z_0)}} \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \exp\left\{ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\rho_{kn}(z_0)}{[2\rho_{2n}(z_0)]^{\frac{k}{2}}} (it)^k \right\} dt.$$

Теперь, согласно неравенствам (2.2) и (2.16) имеем

$$I_1' = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\rho_{2n}(z_0)}} + o\left(\frac{1}{\rho_{2n}(z_0)}\right).$$

Но так как $2\rho_{2n}(z_0) = B_n^2[1 + O(\tau)]$, то $I_1' = \frac{\sqrt{2\pi}}{B_n}[1 + O(\tau)]$. Используя эту оценку, из (2.15) получаем

$$I_1 = \frac{1}{B_n\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{B_n^2\tau^2}{2} + B_n^2\tau^3\lambda_n(\tau) \right][1 + O(\tau)]. \tag{2.17}$$

При отрицательных $x < -1$ и $|x| = o(B_n)$ интеграл I_1 оценивается аналогично.

Теперь оценим интеграл I_2.

Вводим новые случайные величины $\bar{\xi}_j$, функции распределения которых задаются следующим образом:

$$\bar{F}_j(z_0, x) = P\{\bar{\xi}_j < x\} = \frac{1}{M_j(z_0)} \int_{-\infty}^{x} e^{z_0 u} dF_j(u), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Характеристические функции $\bar{f}_j(t)$ этих величин задаются следующими формулами:

$$\bar{f}_j(t) = \frac{1}{M_j(z_0)} M_j(z_0 + it).$$

Следовательно, имеем

$$M_j(z_0 + it) = M_j(z_0)\bar{f}_j(t),$$

и

$$\bar{M}_n(z_0 + it) = \prod_{j=1}^{n} M_j(z_0) \prod_{j=1}^{n} \bar{f}_j(t).$$

Заметив, что $c=z_0$, и используя последнее соотношение, после замены переменных $z=z_0+it$ из соотношения (2.5) имеем

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\exp\{-z_0(xB_n+A_n)\}\prod_{j=1}^{n}M_j(z_0)\times$$

$$\times\int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi}\exp\{-it(xB_n+A_n)\}\prod_{j=1}^{n}\tilde{f}_j(t)\,dt.$$

Но

$$\prod_{j=1}^{n}M_j(z_0)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}K_j(z_0)\right\},$$

и, согласно подбору z_0,

$$-z_0(xB_n+A_n)+\sum_{j=1}^{n}K_j(z_0)=B_n^2\left[-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda_n(\tau)\right],$$

то

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{B_n^2\left[-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda_n(\tau)\right]\right\}I_2', \tag{2.18}$$

где

$$I_2'=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi}\exp\{-it(xB_n+A_n)\}\prod_{j=1}^{n}\tilde{f}_j(t)\,dt.$$

Делаем замену переменного

$$t'=t\tilde{B}_n,\ \text{где}\ \tilde{B}_n^2=\sum_{j=1}^{n}D\tilde{\xi}_j \tag{2.19}$$

и получаем

$$|I_2'|\leqslant\frac{1}{\tilde{B}_n}(I_{21}+I_{22}), \tag{2.20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_{21}&=\int\limits_{\varepsilon\tilde{B}_n\leqslant|t|\leqslant\frac{\tilde{B}_n}{4k}}\prod_{j=1}^{n}\left|\tilde{f}_j\left(\frac{t}{\tilde{B}_n}\right)\right|dt,\\ I_{22}&=\int\limits_{\frac{\tilde{B}_n}{4k}\leqslant|t|\leqslant\pi\tilde{B}_n}\prod_{j=1}^{n}\left|\tilde{f}_j\left(\frac{t}{\tilde{B}_n}\right)\right|dt.\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Замечаем, что

$$\varphi_n\left(\frac{t}{\tilde{B}_n}\right)=\prod_{j=1}^{n}\tilde{f}_j\left(\frac{t}{\tilde{B}_n}\right) \tag{2.22}$$

является характеристической функцией суммы

$$\frac{1}{\tilde{B}_n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\xi}_j.$$

Нетрудно заметить, что случайные величины $\tilde{\xi}_j$ принимают только целочисленные значения, и

$$\tilde{p}_{jm} = P\{\tilde{\xi}_j = m\} = \frac{1}{M_j(z_0)} e^{z_0 m} p_{jm}. \qquad (2.23)$$

Следовательно

$$|\tilde{\xi}_j| \leqslant K.$$

Поэтому верна следующая оценка:

$$\text{при} \quad |t| \leqslant \frac{\tilde{B}_n}{4K}, \left| \varphi_n\left(\frac{t}{\tilde{B}_n}\right) \right| \leqslant \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \right\}$$

(см. [10], стр. 93). Используя эту оценку, легко получаем, что

$$I_{21} = o\left(\frac{1}{\tilde{B}_n}\right). \qquad (2.24)$$

Имеем

$$I_{22} = \tilde{B}_n \int\limits_{\frac{1}{4K} \leqslant |t| \leqslant \pi} |\varphi_n(t)|\, dt. \qquad (2.25)$$

Так как

$$|\tilde{f}_j(t)|^2 \leqslant \exp\{|\tilde{f}_j(t)|^2 - 1\},$$

то

$$|\varphi_n(t)| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} [|\tilde{f}_j(t)|^2 - 1]\right\}. \qquad (2.26)$$

Функция $|\tilde{f}_j(t)|^2$ является характеристической функцией разности двух случайных величин, распределенных одинаково с $\tilde{\xi}_j$. Следовательно

$$|\tilde{f}_j(t)|^2 = \sum_k e^{itk} \hat{p}_{jk} = \sum_k \hat{p}_{jk} \cos t_k,$$

где

$$\hat{p}_{jk} = \sum_s \tilde{p}_{j,k+s}\, \tilde{p}_{js}.$$

Обозначим лежащие на отрезке $\left[\frac{1}{4K}, \pi\right]$ точки вида $2\pi r l^{-1}$ ($(r, l) = 1$, $1 \leqslant r \leqslant \left[\frac{l}{2}\right]$, $2 \leqslant l \leqslant 2K$), взятые в порядке возрастания абсцисс, $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$. Минимальное расстояние между точками t_p, очевидно, не меньше величины $\pi(2K)^{-2}$. Кроме того, $t_1 > (4K)^{-1}$, $t_\nu = \pi$. Положим далее

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{4K}, \frac{t_1+t_2}{2}\right], \quad \Delta_m = \left[\frac{t_{m-1}+t_m}{2}, \frac{t_m+t_{m+1}}{2}\right], \quad m = 2, 3, \ldots, \nu-1,$$

$$\Delta_\nu = \left[\frac{t_{\nu-1}+t_\nu}{2}, \pi\right], \quad (\pi = t_\nu).$$

Имеем

$$\int\limits_{\frac{1}{4K} \leqslant t \leqslant \pi} |\varphi_n(t)|\, dt = \sum_{m=1}^{\nu} \int\limits_{\Delta_m} |\varphi(t)|\, dt. \qquad (2.28)$$

Теперь оценим интеграл

$$\int\limits_{\Delta_m} |\varphi_n(t)|\, dt.$$

На интервале Δ_m лежит одна и только одна точка из t_p, именно t_m. Пусть $t_m = 2\pi r_0 (l_0)^{-1}$, $(r_0, l_0) = 1$, $l_0 \geqslant 2$.

Имеем

$$|\tilde{f}_j(t)|^2 - 1 = \sum_k \hat{p}_{jk}(\cos tk - 1) =$$

$$= \sum_{k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)} \hat{p}_{jk}(\cos tk - 1) + \sum_{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)} \hat{p}_{jk}(\cos tk - 1).$$

Из построения интервалов ясно, что если $t \in \Delta_m$, то $|t - t_p| \geqslant \delta_1 = \frac{1}{8K^2}$ при $p \neq m$, т. е. эта разность не может быть меньше половины длины интервала Δ_m. Пусть $t_p = 2\pi w k^{-1}$, w — любое целое и $k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)$ $(2 \leqslant k \leqslant 2K)$. Тогда

$$|t - t_p| = \left| t - \frac{2\pi w}{k} \right| = \frac{1}{k}\, |tk - 2\pi w| \geqslant \delta_2 > 0.$$

Сл?довательно, для таких k

$$\cos tk - 1 < -\frac{1}{8\pi^2 K^2}\,.$$

Если же $t \in \Delta_m$ и $k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)$ $(2 \leqslant k \leqslant 2K)$, то

$$\cos tk - 1 = -2\sin^2 \frac{tk}{2} < -\frac{8}{\pi^2}(t - t_m)^2,$$

ибо при $k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)$, $(k \neq 0)$

$$\frac{tk}{2} = \frac{t_m k}{2} + (t - t_m)\frac{k}{2} = \pi r_0 d + (t - t_0)\frac{k}{2}\,.$$

Таким образом при $t \in \Delta_m$ получаем

$$|\tilde{f}_j(t)|^2 - 1 \leqslant -\frac{1}{8\pi^2 K^2} \sum_{k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)} \hat{p}_{jk} - \frac{8}{\pi^2}(t - t_m)^2 \sum_{\substack{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0) \\ k \neq 0}} \hat{p}_{jk}.$$

Следовательно, при $t \in \Delta_m$

$$|\varphi_n(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{1}{16\pi^2 K^2}\left[H_n(m) + (t - t_m)^2 G_n(m)\right] \right\}, \tag{2.29}$$

где

$$H_n(m) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)} \hat{p}_{jk},$$

и

$$G_n(m) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0) \\ k \neq 0}} \hat{p}_{jk}.$$

Так как

$$2\tilde{B}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_k k^2 \hat{p}_{jk} \leqslant (2K)^2 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)} \hat{p}_{jk} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0) \\ k \neq 0}} \hat{p}_{jk} \right\} = (2K)^2 \left[H_n(m) + G_n(m)\right],$$

и

$$\int_{\Delta_m} |\varphi_n(t)|\, dt \leqslant \exp\left\{ -\frac{1}{16\pi^2 K^2} H_n(m) \right\} \int_{\Delta_m} \exp\left\{ -\frac{(t - t_m)^2}{16\pi^2 K^2} G_n(m) \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\frac{1}{(4\pi K)^2} H_n(m) \right\} \frac{4K\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G_n(m)}}\,,$$

то при $H_n(m) \geqslant G_n(m)$, имеем

$$\int_{\Delta_m} |\varphi_n(t)|\, dt = o\left(\frac{1}{\tilde{B}_n^2}\right),$$

а при $G_n(m) > H_n(m)$, имеем

$$\int_{\Delta_m} |\varphi_n(t)|\, dt = O\left(\exp\left\{-\frac{1}{(4\pi K)^2} H_n(m)\right\} \tilde{B}_n^{-1}\right).$$

Так как число интервалов Δ_m конечно, то согласно (2.28), имеем

$$\int\limits_{\frac{1}{4K} \leqslant t \leqslant \pi} |\varphi_n(t)|\, dt = \frac{1}{\tilde{B}_n}\left[o\left(\frac{1}{\tilde{B}_n}\right) + O\left(\exp\left\{-\frac{1}{(4\pi K)^2} \overline{H}_n\right\}\right)\right].$$

Совершенно аналогично получим, что и

$$\int\limits_{-\pi \leqslant t \leqslant -\frac{1}{4K}} |\varphi_n(t)|\, dt = \frac{1}{\tilde{B}_n}\left[o\left(\frac{1}{\tilde{B}_n}\right) + O\left(\exp\left\{-\frac{1}{(4\pi K)^2} \overline{H}_r\right\}\right)\right].$$

Следовательно, согласно соотношению (2.25),

$$I_{22} = o\left(\frac{1}{\tilde{B}_n}\right) + O\left(\exp\left\{-\frac{1}{(4\pi K)^2} \tilde{H}_r\right\}\right).$$

Теперь из соотношений (2.20), согласно оценкам (2.24) и (2.30) имеем

$$|I_2'| = \frac{1}{\tilde{B}_n}\left[O\left(\frac{1}{\tilde{B}_n}\right) + O\left(\exp\left\{-\frac{1}{(4\pi k)^2} \tilde{H}_n\right\}\right)\right]. \qquad (2.31)$$

Здесь

$$\tilde{H}_n = \min_m H_n(m).$$

Используя соотношения (2.3), (2.23) и ограниченность случайных величин ξ_j, из соотношения (2.27) получаем:

$$\hat{p}_{jk} \geqslant \frac{1}{(2K+1)\exp\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}} p_{j,\,k+s_j},$$

где s_j такое, что $\max\limits_m p_{jm} = p_{js_j}$. Следовательно, согласно (2.29), имеем

$$H_n(m) \geqslant \frac{1}{(2K+1)\exp\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \not\equiv -s_j \,(\mathrm{mod}\, l_0)} p_{j,k}.$$

Но

$$\sum_{k+s_j \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, l_0)} p_{jk} = P\{\xi_j \not\equiv -s_j \,(\mathrm{mod}\, l_0)\} \geqslant \min_r P\{\xi \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, l_0)\},$$

и поэтому

$$H_n(m) \geqslant \frac{1}{(2K+1)\exp\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}} \sum_{j=1}^{n} \min_r P\{\xi_j \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, l_0)\}.$$

Следовательно

$$H_n(m) \geqslant \frac{1}{(2K+1)\exp\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}} \sum_{j=1}^{n} \min_{q} \min_{0\leqslant r<q} P\{\xi \not\equiv r \pmod q\} =$$

$$= \frac{\alpha_n}{(2K+1)\exp\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{H}_n \geqslant \frac{\alpha_n}{(2K+1)\exp\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}},$$

и, согласно соотношению (2.31), после несложных подсчетов получаем оценку

$$|I_2'| = \frac{1}{\bar{B}_n}\left[O\left(\frac{1}{\bar{B}_n}\right) + O\left(\exp\left\{-\alpha_n K^{-3}\exp\{-6\pi\}\right)\right]. \tag{2.32}$$

Так как из соотношений (2.19) и (2.23) следует, что

$$\exp\left\{-\frac{2}{3}\pi\right\} B_n^2 \leqslant \bar{B}_n^2 \leqslant 2\exp\left\{\frac{2}{3}\pi\right\} B_n^2,$$

то утверждение теоремы при $x > 1$ следует из соотношений (2.6), (2.17), (2.32).

При $x < -1$ доказательство проводится аналогично.

Если же $|x| \leqslant 1$, то утверждение теоремы непосредственно следует из локальной теоремы.

3. **Случай k — последовательностей.** Пусть k — произвольное фиксированное натуральное число.

Следуя В. В. Петрову [4] последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, будем называть k — *последовательностью*, если число различных функций распределения в соответствующей последовательности функций распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ равно k.

Пусть этими функциями будут $V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x)$.

Теорема 2. *Пусть k — последовательность независимых случайных величин, принимающих лишь целочисленные значения, удовлетворяет условиям:*

1) *максимальный шаг распределения $V_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, k$ равен единице,*
2) *существует положительное число A такое, что для любого действительного числа s ($|s| \leqslant A$) интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\, dV_j(x), \quad j=1, 2, \ldots, k \text{ существует.}$$

Тогда при $n\to\infty$ и $|x| = o(B_n)$ имеет место соотношение

$$B_n P_n(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{B_n}\lambda_n\left(\frac{x}{B_n}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{1+|x|}{B_n}\right)\right].$$

Здесь $\lambda_n(t)$ и x — те же, что и в теореме первой.

Очевидно, что при $k=1$ теорема 2 превращается в цитированную теорему В. Рихтера с $h=1$.

Доказательство. Из условия 2 следует, что для каждого j $(j=1, 2, \ldots, k)$ существуют числа $A_j \leqslant A$, l_j и L_j $(0<l_j<L_j<\infty)$ такие, что в круге $|z| \leqslant A_j$

$$l_j \leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dV_j(x) \right| \leqslant L_j.$$

Взяв $\tilde{A}=\min(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $l=\min(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ и $L=\max(L_1, \ldots, L_k)$ получим, что в круге $|z| \leqslant \tilde{A}$

$$l \leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dV_j(x) \right| \leqslant L, \quad j=1, 2, \ldots, k. \tag{3.1}$$

Следовательно, в круге $|z| \leqslant \tilde{A}$

$$l \leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, dF_m(x) \right| \leqslant L, \quad m=1, 2, 3, \ldots \tag{3.2}$$

Из последних неравенств следует, что $D\xi_j=\sigma_j^2$ существуют $(j=1, 2, \ldots, n \ldots)$ и

$$\underline{\sigma}^2 n \leqslant B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \leqslant \bar{\sigma}^2 n,$$

где

$$\underline{\sigma}^2 = \min_j \sigma_j^2, \quad \bar{\sigma}^2 = \max_j \sigma_j^2.$$

(Эти максимум и минимум существуют, так как имеем только k – различных распределений.) Следовательно

$$0 < \underline{\sigma}^2 \leqslant \frac{B_n^2}{n} \leqslant \bar{\sigma}^2 < \infty. \tag{3.3}$$

Рассуждая аналогично рассуждениям при доказательстве первой теоремы при оценке интеграла I_1 (см. соотношения (2.5) и (2.6)) и заменяя неравенства (2.2) неравенствами

$$|\gamma_{js}| \leqslant \frac{B(s-1)!}{H^{s-1}} \quad (B<\infty), \quad \left(0 < H < \frac{\tilde{A}}{2}\right),$$

которые легко получаются из неравенств (3.2) в силу неравенств Коши для коэффициентов сходящегося ряда, и используя также неравенство (3.3), получаем соотношение (см. (2.17))

$$I_1 = \frac{1}{B_n \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{B_n^2 \tau^2}{2} + B_n^2 \tau^3 \lambda_n(\tau) \right\} [1+O(\tau)]. \tag{3.4}$$

Следовательно, остается оценить только интеграл

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{c-i\pi}^{c-i\varepsilon} + \int_{c+i\varepsilon}^{c+i\pi} \overline{M}_n(z)\, e^{-z(xB_n+A_n)}\, dz \right\}, \tag{3.5}$$

где $c=z_0$ – решение уравнения (2.8), а $\varepsilon>0$ такое, что ряд (2.12) сходится абсолютно при $|\tau|<\varepsilon$ и круг $|z-z_0|\leqslant\varepsilon$ лежит в круге $|z|<H$.

Оценим интеграл I_2. Для этого обозначим через n_j число повторения функции $V_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ в последовательности $F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x))$. Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{k} n_j=n$$

и

$$\overline{M}_n(z)=[v_1(z)]^{n_1}[v_2(z)]^{n_2}\cdots[v_k(z)]^{n_k},$$

где

$$v_j(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{zk}\,dV_j(x).$$

Следовательно, из соотношения (2.18) получаем

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-B_n^2\left[-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda_n(\tau)\right]\right\}I_2', \tag{3.6}$$

где

$$I_2'=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi}\exp\{-it(xB_n+A_n)\}\,[\varphi_1(t)]^{n_1}[\varphi_2(t)]^{n_2}\cdots[\varphi_k(t)]^{n_k}\,dt,$$

и $\varphi_j(t)$ характеристическая функция случайной величины с функцией распределения

$$\tilde{V}_j(z_0,\ x)=\frac{1}{v_j(z_0)}\int_{-\infty}^{x} e^{z_0u}\,dV_j(u),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{x} n_j=n$, то хотя бы для одного j_α, $n_{j_\alpha}\geqslant\frac{n}{k}$. Следовательно

$$|I_2'|\leqslant\int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi}|\varphi_{j_\alpha}(t)|^{\frac{n}{k}}\,dt. \tag{3.7}$$

Оценим этот интеграл. Так как $V_{j_\alpha}(z_0,x)$ – решедчатая функция распределения с максимальным шагом единицей, то из периодичности функции $\varphi_j(t)$ с периодом 2π следует, что существует такое $a>0$, что при $\varepsilon\leqslant\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|\varphi_{j_\alpha}(t)|\leqslant e^{-a}.$$

Используя это неравенство из соотношения (3.7) получим

$$|I_2'|\leqslant 2\pi e^{-\frac{na}{k}}. \tag{3.8}$$

Но так как $B_n^2\leqslant\bar{\sigma}^2n$, то и $|I_2'|=\frac{1}{B_n}\,o\left(\frac{1}{B_n}\right)$.

Следовательно, согласно соотношению (3.6) имеем, что

$$I_2=\frac{1}{B_n\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{B_n^2\tau^2}{2}+B_n^2\tau^3\lambda_n(\tau)\right\}o\left(\frac{1}{B_n}\right). \tag{3.9}$$

Утверждение теоремы при $x>1$ следует из соотношений (3.4) и (3.9).

При $x<-1$ доказательство аналогично. При $|x|<1$ утверждение теоремы следует из локальной предельной теоремы.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
30.VI.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М–Л., 1949.
2. Ю. В. Прохоров, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, ДАН СССР 98, 4 (1954), 535–538.
3. В. В. Петров, Уточнение локальной предельной теоремы для неодинаковых решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее примен., 7, 3 (1962), 344–346.
4. В. В. Петров, Предельные теоремы для k-последовательностей независимых случайных величин, Лит. мат. сб., V, 3 (1965), 443–455.
5. Ю. А. Розанов, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее примен., 2,2 (1957), 278–281.
6. Т. А. Азларов, Об одной предельной теореме для решетчатых распределений, Предельные теоремы теории вероятностей, Ташкент, 1963, 5–14.
7. А. А. Миталаускас, В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит. мат. сб., VI, 4 (1966), 569–583.
8. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее примен., II, 2 (1957) 214–229.
9. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Лит. мат. сб., VII, 4 (1967),
10. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.

APIE DIDELIUS NUKRYPIMUS LOKALINĖJE TEOREMOJE RĖTINIAMS DYDŽIAMS

P. Survila

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjami dideli nukrypimai nepriklausomų, rėtiškai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms, kai atsitiktiniai dydžiai yra aprėžti (1 teorema) ir kai atsitiktiniai dydžiai sudaro k-seką.

ÜBER GROSSE ABWEICHUNG FÜR DIE DISKRETEN ZUFALLSGRÖßEN

P. Survila

(*Zusammenfassung*)

In diesem Artikel gibt man die hinreichende Bedingungen, daß für die Folge unabhängiger Zufallsgrößen, die nur ganze Werte annimt, die grosse Abweichungen in lokalem Grenzwertsatz gelte (Theoremen 1 und 2).