VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
1968

УДК 517.535.6

О РОСТЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. ТЕВЯЛИС

В настоящей работе продолжаем изучать (см. [2]) рост периодической с периодом 2π мероморфной функции $f(z)$ в зависимости от ее полюсов и соответствующих им периодических главных частей вида

$$Q(z,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{p}\dfrac{E_l}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda})^l}, & \operatorname{Im}\lambda>0\\ \sum\limits_{l=1}^{p}\dfrac{E_l}{(e^{iz}-e^{i\lambda})^l}, & \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0.\end{cases}$$

Полученный в работе результат аналогичен результату Дж. Уиттекера для непериодических функций (см. [4]).

Приведем несколько используемых в работе обозначений (более подробно по поводу этих обозначений см. [3]).

а) Функция $T(v, f)$ означает характеристику периодической с периодом 2π мероморфной функции $f(z)$ в смысле Мюгеля

$$T(v, f)=m(v, f)+m(-v, f)+N(v, f)+N(-v, f)+N_0(v, f).$$

Здесь

$$m(\pm v, f)=\left[\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{v}\right)\right]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(u\pm iv)|\,du,$$

$$N(\pm v, f)=\frac{1}{2}\int_{0}^{v}n(\pm s, f)\,ds+r,$$

$$|r|\leqslant\frac{\pi}{2}\int_{0}^{v}\frac{n(\pm s, f)}{s}\,ds,$$

где $\ln^+|\alpha|=\max(\ln|\alpha|,0)$ и $n(s,f)$ $\bigl(n(-s, f)\bigr)$ — число полюсов функции $f(z)$ в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$, $0<\operatorname{Im}z\leqslant s$ $(-s\leqslant\operatorname{Im}z<0)$. Полное определение функции $N_0(v, f)$ дано в работе [3], здесь мы ограничимся замечанием, что $N_0(v,f)$ зависит от $n(0,f)$ — числа полюсов функции $f(z)$ на отрезке $\operatorname{Im}z=0$, $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$, причем $N_0(v,f)\equiv 0$, если $n(0,f)=0$ и $N_0(v,f)=O(v)$, если $n(0,f)\neq 0$.

б) Величина

$$\overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\ln^+ S(v)}{\ln v}, \qquad S(v)\geqslant 0, \qquad v>v_0,$$

называется порядком функции $S(v)$. Порядком мероморфной периодической функции $f(z)$ называется порядок ее характеристики. Заметим, что порядок периодической мероморфной функции, определенной при помощи характеристики Мюгеля, совпадает с порядком, определенным по характеристике Неванлины.

1. Пусть задана последовательность конечных множеств H_n; $H_n = \{\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,t_n}\}$ (эти множества могут пересекаться и иметь кратные точки), $-\pi\leqslant \operatorname{Re}\lambda_{n,l} <\pi$, $\operatorname{Im}\lambda_{n,l} >0$, $l=1, 2, \ldots, t_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ и последовательность рациональных функций от e^{-iz}

$$R_n(z)=\sum_{l=m}^{t_n} \frac{a_{n,l}}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}})(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,2}})\cdot\ldots\cdot(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}})}, \quad m\geqslant 1. \tag{1}$$

Если

$$\beta_n=\min_{1\leqslant l\leqslant t_n}(\operatorname{Im}\lambda_{n,l})$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\infty$, то имеется такая последовательность тригонометрических многочленов (от e^{-iz}) $P_n(z)$, что ряд

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}[R_n(z)-P_n(z)] \tag{2}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости. При этом сумма $\Phi(z)$ ряда (2) является периодической с периодом 2π мероморфной функцией.

Оценим порядок $m(v, \Phi)$. Обозначим

$$A_n=\max_{m\leqslant l\leqslant t_n}|a_{n,l}|$$

и пусть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+A_n}{\ln\beta_n}=\tau\,(<\infty). \tag{3}$$

Число τ назовем порядком последовательности коэффициентов функций $R_n(z)$.

Предположим, что показатель сходимости чисел λ равен $\varkappa\,(<\infty)$.

Выберем в качестве $P_n(z)$ сумму первых k_n членов разложения функции $R_n(z)$ в ряд по степеням e^{-iz}.

В этих обозначениях имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть* $B>1$, $C>0$ *— любые действительные числа и*

$$B\frac{\ln^+A_n}{\beta_n}\leqslant k_n\leqslant B\frac{\ln^+A_n}{\beta_n}+C, \tag{4}$$

тогда $m(v, \Phi)=O(v^{\mu+\varepsilon})$, *где* $\mu=\max(\tau, 1)$.

Доказательство. Число B представим в виде

$$B=\frac{LM}{L-M}, \tag{5}$$

где $L>M>1$.

Предположим $\operatorname{Im} z=v>v_0$, v_0 — достаточно большое число, и

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)+\Phi_3(z),$$

где

$$\Phi_1(z)=\sum_{\beta_n\leqslant v_0}[R_n(z)-P_n(z)],$$

$$\Phi_2(z)=\sum_{v_0<\beta_n\leqslant Lv}[R_n(z)-P_n(z)],$$

$$\Phi_3(z)=\sum_{\beta_n>Lv}[R_n(z)-P_n(z)].$$

Слагаемое суммы $\Phi_3(z)$ можно представить в виде

$$R_n(z)-P_n(z)=\sum_{l=k_n}^{\infty}c_l e^{-ilz},$$

где ряд сходится равномерно и абсолютно в области $\operatorname{Im} z<\beta_n-\varepsilon$ и

$$c_l=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n(\zeta)e^{il\zeta}d\zeta,$$

$$\operatorname{Im}\zeta=\mathrm{const}<\beta_n.$$

Поэтому

$$R_n(z)-P_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n(\zeta)\frac{e^{ik_n(\zeta-z)}}{1-e^{-i(\zeta-z)}}d\zeta,$$

$$\operatorname{Im}\zeta=\frac{\beta_n}{M},\qquad \operatorname{Im} z=v.$$

Оценим подынтегральное выражение сверху. Так как

$$|e^{-i\zeta}-e^{-i\zeta}|\geqslant e^{\operatorname{Im}\lambda}-e^{\operatorname{Im}\zeta},\qquad \operatorname{Im}\lambda>\operatorname{Im}\zeta, \tag{6}$$

то

$$|e^{-i\zeta}-e^{-i\lambda_{n,l}}|\geqslant e^{\beta_n}-e^{\frac{\beta_n}{M}}=e^{\beta_n}(1-e^{\frac{1-M}{M}\beta_n})>\frac{e^{\beta_n}}{2},\qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ t_n,$$

и с $m\geqslant 1$ имеем

$$|R_n(\zeta)|<A_n\left[\left(\frac{2}{e^{\beta_n}}\right)^m+\left(\frac{2}{e^{\beta_n}}\right)^{m+1}+\cdots\right]\leqslant 2A_n\left(\frac{2}{e^{\beta_n}}\right)^m\leqslant 4A_n e^{-\beta_n}.$$

Воспользовавшись тем, что $v<\frac{\beta_n}{L}$ и равенством (5), имеем

$$|e^{ik_n(\zeta-z)}|=e^{k_n\left(v-\frac{\beta_n}{M}\right)}<e^{k_n\left(\frac{\beta_n}{L}-\frac{\beta_n}{M}\right)}=e^{-\frac{k_n\beta_n}{B}},$$

кроме того,

$$|1-e^{i(\zeta-z)}|\geqslant 1-e^{v-\frac{\beta_n}{M}}>\frac{1}{2}.$$

Принимая во внимание неравенство (4), получаем

$$|R_n(z)-P_n(z)|<8e^{-\beta_n}.$$

Пусть $p(s)$ — число всех точек, лежащих во множествах H_n, пересекающихся с прямоугольником $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$, $s\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant s+1$, и

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{\ln p(s)}{\ln s}=\nu.$$

Так как $\varkappa$ — показатель сходимости точек λ конечный, то и ν является конечным. Следовательно при $\delta>0$, $s>v_0$

$$p(s)<s^{\nu+\delta}$$

и

$$\sum_{Lv\leqslant s\leqslant\beta_n\leqslant s+1}|R_n(z)-P_n(z)|<8e^{-s}p(s)<8s^{\nu+\delta}e^{-s}.$$

Таким образом

$$\Phi_3(z)\leqslant\sum_{Lv<\beta_n\leqslant Lv+1}|R_n(z)-P_n(z)|+$$

$$+\sum_{Lv+1<\beta_n\leqslant Lv+2}|R_n(z)-P_n(z)|+\cdots=\varepsilon(v),$$

где $\varepsilon(v)\to 0$ при $v\to\infty$.

Итак, показано, что ряд сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости.

Кроме того,

$$\ln^+|\Phi_3(z)|=O(1),\qquad m(v,\Phi_3)=O(1). \tag{7}$$

Обратимся к оценке функции $m(v,\Phi_2)$. При достаточно большом n коэффициенты тригонометрического многочлена $P_n(z)$ не превосходят по модулю $A_n=\max\limits_{m\leqslant l\leqslant t_n}|a_{n,l}|$, действительно, используя оценку (6)

$$c_l=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n(\zeta)e^{il\zeta}d\zeta,\qquad \operatorname{Im}\zeta=0.$$

$$|R_n(\zeta)|=\left|\sum_{l=m}^{t_n}\frac{a_{n,l}}{(e^{-i\zeta}-e^{-i\lambda_{n,1}})\cdot\ldots\cdot(e^{-i\zeta}-e^{-i\lambda_{n,t_n}})}\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_n[(e^{\beta_n}-1)^{-m}+(e^{\beta_n}-1)^{-(m+1)}+\cdots]<A_n,$$

и

$$|c_l|<A_n\qquad l=0,1,2,\ldots,k_n-1.$$

Поэтому, при $\operatorname{Im} z=v$ и $\beta_n>v_0$

$$|P_n(z)|=\left|\sum_{l=0}^{k_n-1}c_le^{-ilz}\right|<A_n\sum_{l=0}^{k_n-1}e^{lv}\leqslant A_ne^{k_nv}.$$

Обозначим

$$\Theta(z)=\sum_{v_0\leqslant\beta_n\leqslant Lv}\sum_{l=m}^{t_n}\frac{1}{|e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}|\cdot\ldots\cdot|e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,l}}|}.$$

Число слагаемых в сумме $\Phi_2(z)$ не превосходит $n(Lv)$ — числа точек, лежащих во множествах H_n, пересекающихся с прямоугольником $-\pi\leqslant\leqslant\mathrm{Re}\,z<\pi$, $0<\mathrm{Im}\,z\leqslant Lv$, поэтому

$$|\Phi_2(z)|\leqslant n(Lv)\max|P_n(z)|+\Theta(z)\max A_n\leqslant$$
$$\leqslant n(Lv)\max A_n\cdot e^{\max k_n\cdot v}+\Theta(z)\max A_n. \tag{8}$$

Здесь максимумы берутся по всем тем n, для которых $v_0\leqslant\beta_n\leqslant Lv$. Принимая во внимание неравенство (4) и равенство (3), имеем

$$k_n\leqslant B\frac{\ln^+A_n}{\beta_n}+C\leqslant B\beta_n^{\tau-1+\varepsilon}+C.$$

Отсюда, если $\tau\geqslant1$, то

$$\max k_n<v^{\tau-1+\varepsilon_1},\qquad(\varepsilon_1>\varepsilon)$$

и если $\tau<1$, то

$$\max k_n<v^{\varepsilon}$$

(ε — произвольно малое число, поэтому его всегда можно выбрать так, что $\tau+\varepsilon<1$).

Таким образом

$$\max k_n<v^{\mu-1+\varepsilon}, \tag{9}$$

где $\mu=\max(\tau,1)$.

Воспользовавшись неравенствами

$$m(v,f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)\leqslant m(v,f_1)+m(v,f_2)+\cdots+m(v,f_n),$$

$$m(v,f_1+f_2+\cdots+f_n)\leqslant\frac{1}{2}\ln n+m(v,f_1)+m(v,f_2)+\cdots+m(v,f_n)$$

и тем, что число слагаемых в сумме $\Theta(z)$ также не превышает $n(Lv)$, получим

$$m(v,\Theta)\leqslant\frac{1}{2}\ln n(Lv)+\sum_{v_0\leqslant\beta_n<Lv}\sum_{l=m}^{t_n}\sum_{j=1}^{l}m\left(v,\frac{1}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,j}}}\right).$$

В работе [2] показано, что

$$m\left(v,\frac{1}{e^{-iz}-e^{-i\lambda}}\right)\leqslant\frac{1}{4e^v}+o\frac{1}{ve^v}\Big),$$

следовательно

$$m(v,\Theta)\leqslant\frac{1}{2}\ln n(Lv)+[n(Lv)]^3\left[\frac{1}{4e^v}+o\left(\frac{1}{ve^v}\right)\right],$$

$$m(v,\Theta)=O(\ln v).$$

В соединении с неравенствами (8) и (9) это дает

$$m(v,\Phi_2)=O(v^{\mu+\varepsilon}),\qquad\mu=\max(\tau,1). \tag{10}$$

Функция $\Phi_1(z)$ — рациональная относительно e^{-iz}, поэтому (см. [3])

$$m(v, \Phi_1) \leqslant T(v, \Phi_1) = O(v),$$

$$m(v, \Phi_1) = O(v). \tag{11}$$

Из равенств (7), (10) и (11) непосредственно следует утверждение теоремы

$$m(v, \Phi) = O(v^{\mu+\varepsilon}), \qquad \mu = \max(\tau, 1).$$

Следствие 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z = -v < -v_0 < 0$, *тогда* $m(-v, \Phi) = O(1)$.

Действительно, ряд (2) сходится равномерно и абсолютно в области $\operatorname{Im} z < 0$ и его сумма в этой области является ограниченной функцией

$$|\Phi(z)| < K.$$

Отсюда

$$m(-v, \Phi) = O(1).$$

Следствие 2. *Порядок функции* $\Phi(z)$ *не превосходит* $\gamma = \max(\tau, \varkappa+1)$, *где* $\varkappa$ — *показатель сходимости точек* λ.

Порядки $vn(v)$ и $N(v, \Phi)$ равные (см. [3]), отсюда

$$N(v, \Phi) = 0(v^{\varkappa+1+\varepsilon}).$$

Все полюсы функции $\Phi(z)$ лежат в верхней полуплоскости, поэтому

$$N(-v, \Phi) \equiv 0, \qquad N_0(v, \Phi) \equiv 0,$$

и

$$T(v, \Phi) = m(v, \Phi) + m(-v, \Phi) + N(v, \Phi) + N(-v, \Phi) + N_0(v, \Phi) =$$
$$= O(v^{\mu+\varepsilon}) + O(v^{\varkappa+1+\varepsilon}) + O(1) = O(v^{\gamma+\varepsilon}).$$

2. Пусть задана последовательность конечных множеств H_{-n}; $H_{-n} = \{\lambda_{-n,1}, \lambda_{-n,2}, \ldots, \lambda_{-n,t_{-n}}\}$ (множества могут пересекаться и иметь кратные точки), $-\pi \leqslant \operatorname{Re} \lambda_{-n,l} < \pi$, $\operatorname{Im} \lambda_{-n,l} < 0$, $l = 1, 2, \ldots, t_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$ и последовательность рациональных функций от e^{iz}

$$R_{-n}(z) = \sum_{l=m}^{t_{-n}} \frac{a_{-n,l}}{(e^{iz} - e^{i\lambda_{-n,1}})(e^{iz} - e^{i\lambda_{-n,2}}) \cdot \ldots \cdot (e^{iz} - e^{i\lambda_{-n,l}})}, \qquad m \geqslant 1.$$

Если $\beta_{-n} = \min\limits_{1 \leqslant l \leqslant t_{-n}} (-\operatorname{Im} \lambda_{-n,l})$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{-n} = \infty$, то совершенно аналогично доказывается, что при надлежащем выборе тригонометрических (от e^{iz}) многочленов $P_{-n}(z)$ ряд

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [R_{-n}(z) - P_{-n}(z)] \tag{12}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости. Сумма $\Psi(z)$ ряда (12) является периодической с периодом 2π мероморфной функцией порядка не выше $\gamma_1 = \max(\tau_1, \varkappa_1 + 1)$, где τ_1 — порядок последовательности коэффициентов функций $R_{-n}(z)$,

$$\tau_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ A_{-n}}{\ln \beta_{-n}}, \tag{13}$$

$$A_{-n} = \max_{m \leqslant l \leqslant t_{-n}} |a_{-n,l}|,$$

и $\varkappa_1 (<\infty)$ — показатель сходимости точек λ.

Следствие. *Пусть дана последовательность чисел* $\{\lambda_k\}$, $-\pi \leqslant \operatorname{Re} \lambda_k < \pi$, $\ldots \leqslant \operatorname{Im} \lambda_{-2} \leqslant \operatorname{Im} \lambda_{-1} \leqslant 0 < \operatorname{Im} \lambda_1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{k\to-\infty} \operatorname{Im} \lambda_k = -\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Im} \lambda_k = \infty$, *и последовательность функций*

$$Q(z, \lambda_k) = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{p_k} \dfrac{E_{k,l}}{(e^{-iz} - e^{-i\lambda_k})^l}, & \operatorname{Im} \lambda_k > 0 \\ \sum\limits_{l=1}^{p_k} \dfrac{E_{k,l}}{(e^{iz} - e^{i\lambda_k})^l}, & \operatorname{Im} \lambda_k \leqslant 0, \end{cases}$$

так, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ E_k}{\ln(\operatorname{Im} \lambda_k)} = \sigma, \quad \overline{\lim_{\substack{k\to-\infty \\ \operatorname{Im} \lambda_k < 0}}} \frac{\ln^+ \ln^+ E_k}{\ln(-\operatorname{Im} \lambda_k)} = \sigma_1,$$

$$E_k = \max_{1 \leqslant l \leqslant p_k} |E_{k,l}|.$$

Тогда существует периодическая с периодом 2π *мероморфная функция порядка не выше* $\max(\sigma, \sigma_1, \varkappa + 1, \varkappa_1 + 1)$ *с полюсами* λ_k *в основной полосе периода и периодическими главными частями* $Q(z, \lambda_k)$. *Здесь* $\varkappa$ *и* $\varkappa_1$ — *показатели сходимости последовательностей* $\{\lambda_k\}$, $k > 0$ *и* $\{\lambda_k\}$, $k \leqslant 0$.

Предполагая каждое множество H_k состоящим из единственной точки λ_k с учетом кратности p_k, возьмем в качестве фнукций $R_n(z)$ функции $Q(z, \lambda_k)$ и построим функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ (см. (3) и (12)). Число точек λ_k, лежащих на отрезке $\operatorname{Im} z = 0$, $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \pi$, является конечным и включение слагаемых, соответствующих этим точкам, в сумму $\Psi(z)$ никакого влияния на окончательный результат не оказывает.

Из доказанного следует, что функция $\Phi(z) + \Psi(z)$ имеет порядок не превышающий $\max(\sigma, \sigma_1, \varkappa + 1, \varkappa_1 + 1)$; ее полюсами являются точки λ_k с периодическими главными частями $Q(z, \lambda_k)$.

3. В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $T(e^{-iz})$ — *многочлен от* e^{-iz} *степени* $n \geqslant 2$ *и* G — *ограниченное конечным числом простых кривых открытое (не обязательно связное) множество, лежащее в основной полосе периода и содержащее все нули из основной полосы периода многочлена* $T(e^{-iz})$.

Если Γ *граница области* G, *то*

$$\int_\Gamma \frac{e^{-iz}\, dz}{T(e^{-iz})} = 0.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $w = e^{-iz}$. При этом открытое множество G отобразится на открытое множество G', содержащее все нули многочлена $T(w)$. Границу множества G' обозначим Γ'.

Пусть C — окружность $|w|=r$, достаточно большого радиуса, тогда

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-iz}dz}{T(e^{-iz})}\right| = \left|\int\limits_{\Gamma'} \frac{dw}{T(w)}\right| = \left|\int\limits_{C} \frac{dw}{T(w)}\right| \leqslant \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{rd\Theta}{O(r^2)} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

4. Пусть $f(z)$ периодическая с периодом 2π мероморфная функция порядка ρ $(1\leqslant\rho<\infty)$, λ_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ — все ее полюсы, лежащие в области $-\pi\leqslant \operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0$, и

$$Q(z, \lambda_k)=\sum_{l=1}^{p_k} \frac{E_{k,l}}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_k})^l}$$

периодические главные части.

Если среди полюсов есть достаточно близкие, то нельзя ничего утверждать о величине коэффициентов $E_{k,l}$, поэтому, следуя Уиттекеру, будем объединять полюсы в группы (множества H_n).

Пусть h — любое действительное число больше $\varkappa$ — показателя сходимости точек λ_k и $c>0$ — подобранное так действительное число, что

$$c\cdot\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im}\lambda_k)^{-h}<\pi.$$

Так как функция $f(z)$ периодическая, то ее полюсами в верхней полуплоскости будут точки $\lambda_{k,m}=\lambda_k+2m\pi$, $k=1, 2, 3, \ldots$. $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Построим вокруг каждой точки $\lambda_{k,m}$ как центра, окружности радиуса $c(\operatorname{Im}\lambda_k)^{-h}$. Не нарушая общности, можно предполагать окружности, построенные вокруг точек λ_k, не пересекающимися с границей основной полосы периода, т. е. прямыми $\operatorname{Re} z=\pm\pi$. Действительно, сумма диаметров окружностей, построенных вокруг точек λ_k, меньше 2π, поэтому на отрезке действительной оси $\operatorname{Im} z=0$, $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$ существует по крайней мере одна точка d такая, что прямая $\operatorname{Re} z=d$ не пересекается ни с одной окружностью. Выбирая в качестве основной полосы периода $d\leqslant\operatorname{Re} z<d+2\pi$, мы удовлетворили бы поставленное выше требование.

Множества H_n будем образовывать следующим образом. Выберем какую нибудь точку λ_k и присоединим к ней все те точки, вокруг которых построенные окружности имеют хотя бы одну общую точку с окружностью, построенной вокруг выбранной точки. Присоединим к этим точкам новые, если окружности, построенные вокруг них, имеют хотя бы одну общую точку с окружностями, построенными вокруг уже выбранных точек, и т. д.

Объединение кругов, соответствующих множеству H_n, назовем облаком D_n. Выбирая все новые точки λ_k, мы образуем новые облака.

Каждое облако является замкнутой областью ограниченной кривой Γ_n, составленной из дуг окружностей.

Число $d_n=\sup\limits_{z_1, z_2\in\Gamma_n} |z_1-z_2|$ назовем диаметром облака D_n. Диаметр облака стремится к нулю с увеличением r — расстояния облака от действительной оси

$$d_n\leqslant 2c\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k>r} (\operatorname{Im}\lambda_k)^{-h}\to 0,\quad r\to\infty.$$

Обозначим через β_n минимум мнимых частей точек λ_k, входящих во множество H_n. Можно предполагать множества H_n пронумерованными так, чтобы числа β_n не убывали.

Пусть множество H_n состоит из полюсов $\lambda_{k_{n,l}}=\lambda_{n,l}$ с кратностями $p_{k_{n,l}}=p_{n,l}$, $l=1, 2, \ldots, t_n$, и

$$p_{n,1}+p_{n,2}+\ldots+p_{n,t_n}=s_n.$$

Сложим периодические главные части, соответствующие этим полюсам, тогда

$$f(z)=\frac{T_n(z)}{\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}\right)^{p_{n,1}}\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,2}}\right)^{p_{n,2}}\cdot\ldots\cdot\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}}\right)^{p_{n,t_n}}}+$$

$$+G_n(z),$$

где $T_n(z)$ многочлен от e^{-iz} степени меньше s_n и $G_n(z)$ — функция регулярная в облаке D_n.

Многочлен $T_n(z)$ можно представить в виде

$$T_n(z)=a_{n,s_n}+a_{n,s_n-1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}})+\ldots+$$

$$+a_{n,s_n-p_{n,t_n}}\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}}\right)^{p_{n,t_n}}+$$

$$+a_{n,s_n-p_{n,t_n}-1}\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}}\right)^{p_{n,t_n}}\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n-1}}\right)+\ldots+$$

$$+a_{n,1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}})^{p_{n,t_n}}\cdot\ldots\cdot(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,2}})^{p_{n,2}}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}})^{p_{n,1}-1},$$

отсюда

$$f(z)=\frac{a_{n,1}}{e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}}+\frac{a_{n,2}}{\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}\right)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{a_{n,p_{n,1}}}{\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}\right)^{p_{n,1}}}+\frac{a_{n,p_{n,1}+1}}{\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}\right)^{p_{n,1}}\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,2}}\right)}+\ldots+$$

$$+\frac{a_{n,s_n}}{\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}}\right)^{p_{n,1}}\cdot\ldots\cdot\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,t_n}}\right)^{p_{n,t_n}}}+G_n(z).$$

Теорема 2. *Если порядок периодической мероморфной функции равен* ρ $(1\leqslant\rho<\infty)$ *и*

$$A_n=\max_{1\leqslant l\leqslant s_n}|a_{n,l}|,$$

то

$$\tau=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+A_n}{\ln\beta_n}\leqslant\rho,$$

где

$$\beta_n=\min_{1\leqslant l\leqslant t_n}(\operatorname{Im}\lambda_{n,l}).$$

Доказательство. В силу леммы коэффициенты $a_{n,l}$, $l=1, 2, \ldots, s_n$, можно выразить

$$a_{n,l}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n}[f(z)-G_n(z)](e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}})^{p_{n,1}}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,m}})^{p_{n,m}}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,m+1}})^{\nu}e^{-iz}dz,$$

где Γ_n — граница облака D_n и

$$p_{n,1}+p_{n,2}+\ldots+p_{n,m}+\nu+1=l\quad(\nu\leqslant p_{n,m+1}).$$

Функция $G_n(z)$ регулярная как на Γ_n, так и внутри Γ_n, поэтому

$$a_{n,l}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n} f(z)\quad (e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,1}})^{p_{n,1}}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,m}})^{p_{n,m}}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,m+1}})^{\nu}e^{-iz}dz.$$

Оценим подынтегральное выражение сверху.

В силу известных результатов Адамара и Бореля

$$\max_{\operatorname{Im} z=v}|f(z)|<e^{v^{\rho+\varepsilon}},\quad v>v_0>0,$$

если только прямая $\operatorname{Im} z=\nu$ не пересекает какого нибудь из облаков, поэтому

$$|f(z)|<e^{(\beta_n+d_n)^{\rho+\varepsilon}},\quad z\in\Gamma_n,\quad \beta_n>v_0,$$

где d_n — диаметр облака D_n.

Так как

$$|e^{-iz}-e^{-i\lambda_{n,l}}|\leqslant e^{\operatorname{Im} z}+e^{\operatorname{Im}\lambda_{n,l}}<2e^{\beta_n+d_n},\qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1,$$

то

$$|a_{n,l}|<e^{(\beta_n+d_n)^{\rho+\varepsilon}}(2e^{\beta_n+d_n})^l\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\text{длина }\Gamma_n,\ \beta_n>v_0,\qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ s_n.$$

Число l не превосходит $n(\beta_n+d_n)$ — числа полюсов функции $f(z)$ в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$, $0<\operatorname{Im} z<\beta_n+d_n$, поэтому

$$l\leqslant n(\beta_n+d_n)<(\beta_n+d_n)^{\varkappa+\varepsilon},\quad \varkappa+1\leqslant\rho.$$

Окончательно имеем с $\varepsilon_1>\varepsilon$

$$|a_{n,l}|<e^{\beta_n^{\rho+\varepsilon_1}},\quad \beta_n>v_0.$$

Полученное неравенство справедливо для всех $l=1,\ 2,\ \ldots,\ s_n$, отсюда

$$A_n<e^{\beta_n^{\rho+\varepsilon_1}},\quad \beta_n>v_0,$$

и

$$\tau=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\ln^+\ln^+A_n}{\ln\beta_n}\leqslant\rho.$$

Теорема доказана.

Замечание. Мы получили бы совершенно аналогичный результат, если бы рассматривали полюсы $\{\lambda_k\}$ функции $f(z)$ лежащие в области $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z<0$ с периодическими главными частями

$$Q(z,\ \lambda_k)=\sum_{l=1}^{p_k}\frac{E_{k,l}}{\left(e^{iz}-e^{i\lambda_k}\right)^{p_k}}.$$

4. Из сказанного следует, что любую периодическую с периодом 2π мероморфную функцию $f(z)$, имеющую конечный порядок, можно представить в виде

$$f(z)=G(z)+\Phi(z)+\Psi(z),\tag{14}$$

где $G(z)$ — целая периодическая с периодом 2π функция, $\Phi(z)$ — функция вида (2) и $\Psi(z)$ — функция вида (12) с множествами H_n, составленными методом пункта 3.

Полюсы $f(z)$, лежащие на отрезке $\operatorname{Im} z=0$, $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$, можно причислить либо к верхней, либо к нижней полуплоскости.

Представление функции $f(z)$ в виде (14) назовем нормальным, а ряд $\Phi(z)+\Psi(z)$ — нормальным рядом.

Теорема 3. *Порядок* ρ *функции* $f(z)$, *представленной в нормальном виде, равен* $\max(\sigma,\ \tau,\ \tau_1,\ \varkappa+1,\ \varkappa_1+1)$.

Здесь σ — порядок целой функции $G(z)$; τ, τ_1 — *порядки последовательностей коэффициентов, определенные равенствами* (3) *и* (13); $\varkappa\ (\varkappa_1)$ — *показатель сходимости полюсов функции* $f(z)$, *содержащихся в области* $-\pi\leqslant \operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0\ (\operatorname{Im} z<0)$.

Доказательство. Порядок ρ функции $f(z)$ не превосходит наибольшего из порядков функций $G(z)$, $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, то есть (см. теорему 1)

$$\rho\leqslant\max(\sigma,\ \tau,\ \tau_1,\ \varkappa+1,\ \varkappa_1+1).$$

Пусть $\Theta=\max(\tau,\ \tau_1,\ \varkappa+1,\ \varkappa_1+1)$.

Из теоремы 2 имеем, что $\tau\leqslant\rho$, $\tau_1\leqslant\rho$. Очевидно, порядки функций $N(\nu,\Phi)$ и $N(-\nu,\Psi)$ также не превосходят ρ, значит $\varkappa+1\leqslant\rho$, $\varkappa_1+1\leqslant\rho$. Отсюда $\Theta\leqslant\rho$.

Порядок σ целой функции $G(z)=f(z)-\Phi(z)-\Psi(z)$ также не превосходит ρ,

$$\sigma\leqslant\max(\rho,\Theta)=\rho.$$

Следовательно

$$\rho\geqslant\max(\sigma,\Theta)=\max(\sigma,\ \tau,\ \tau_1,\ \varkappa+1,\ \varkappa_1+1).$$

Таким образом

$$\rho=\max(\sigma,\ \tau,\ \tau_1,\ \varkappa+1,\ \varkappa_1+1).$$

Следствие. *Среди всех функций с заданными периодическими главными частями нормальный ряд имеет наименьший порядок, равный* $\max(\tau,\ \tau_1,\ \varkappa+1,\ \varkappa_1+1)$.

5. Пусть $f(z)$ периодическая с периодом 2π мероморфная функция порядка ρ. Если разбить основную полосу периода $-\pi\leqslant\operatorname{Re} z<\pi$ на конечное или бесконечное число областей так, что бы каждое множество H_n (группа полюсов) содержалось либо внутри, либо на границе одной из областей (область может состоять из раздельных частей), то существуют периодические с периодом 2π мероморфные функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... порядка не выше ρ, имеющие полюсы только в этих областях в основной полосе периода и

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ \ldots$$

Благодарю доктора физико-математических наук А. Нафталевича за внимание к работе и полезные советы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
14.XII.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Нафталевич, Об асимптотических периодах мероморфных функций, Уч. записки Вильнюсского ун-та, 25, матем. физ. 8 (1958), 31–47.
2. В. Тевялис, О росте периодических мероморфных функций с простыми полюсами, Лит. мат. сб. VIII, 1 (1968).
3. K. W. Mügel, Über meromorphe periodische Funktionen, Math. Nachr., **13**, 3–4 (1955), 187–230.
4. J. M. Whittaker, A Theorem on Meromorphic Functions, Proc. London. Math. Soc., **40** (1936), 255–272.

APIE PERIODINIŲ MEROMORFINIŲ FUNKCIJŲ AUGIMĄ

V. Tėvelis

(*Reziumė*)

Sakysime, $\{\lambda_k\}$ yra kompleksinių skaičių seka $-\pi \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_k < \pi$, $\ldots \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{-2} \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{-1} \leqslant 0 < \mathrm{Im}\,\lambda_1 \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{k\to-\infty} \mathrm{Im}\,\lambda_k = -\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Im}\,\lambda_k = \infty$, ir $\{Q(z, \lambda_k)\}$ – seka funkcijų

$$Q(z, \lambda_k) = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{p_k} \dfrac{E_{k,l}}{\left(e^{-iz} - e^{-i\lambda_k}\right)^l}, & \mathrm{Im}\,\lambda_k > 0 \\ \sum\limits_{l=1}^{p_k} \dfrac{E_{k,l}}{\left(e^{iz} - e^{i\lambda_k}\right)^l}, & \mathrm{Im}\,\lambda_k \leqslant 0. \end{cases}$$

Egzistuoja be galo daug periodinių su periodu 2π meromorfinių funkcijų, turinčių pagrindinėje periodo juostoje $-\pi \leqslant \mathrm{Re}\,z < \pi$ polius taškuose λ_k ir periodines pagrindines dalis $Q(z, \lambda_k)$.

Darbe apibrėžiama minimali tokių funkcijų augimo eilė ir pateikiamas funkcijos, turinčios minimalią eilę, konstravimo metodas.

Analogišką klausimą neperiodinėms funkcijoms ištyrė J. Vitekeris.

ON THE GROWTH OF A PERIODIC MEROMORPHIC FUNCTION

V. Tėvelis

(*Summary*)

Let $\{\lambda_k\}$ be the sequence of complex numbers $-\pi \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_k < \pi$, $\ldots \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{-2} \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{-1} \leqslant 0 < \mathrm{Im}\,\lambda_1 \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{k\to-\infty} \mathrm{Im}\,\lambda_k = -\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Im}\,\lambda_k = \infty$ and let $\{Q(z, \lambda_k)\}$ be the sequence of functions

$$Q(z, \lambda_k) = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{p_k} \dfrac{E_{k,l}}{\left(e^{-iz} - e^{-i\lambda_k}\right)^l}, & \mathrm{Im}\,\lambda_k > 0 \\ \sum\limits_{l=1}^{p_k} \dfrac{E_{k,l}}{\left(e^{iz} - e^{i\lambda_k}\right)^l}, & \mathrm{Im}\,\lambda_k \leqslant 0. \end{cases}$$

It is an infinity of periodic meromorphic functions with period 2π that have poles λ_k in the strip $\{-\pi \leqslant \mathrm{Re}\,z \leqslant \pi\}$ of primitive period and periodic principal parts $Q(z, \lambda_k)$.

In this paper we determine the minimal order of these functions and give the way of the construction of functions which have minimal order.

This question in the case of non-periodic functions was considered by J. Whittaker.