УДК–518.9

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ПОЛИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Е. Б. ЯНОВСКАЯ

Известно [1], [2], что задача нахождения ситуаций равновесия по Нэшу в биматричной игре сводится к решению следующей задачи квадратичного программирования: найти вектор Z, удовлетворяющий условиям

$$Z \geqq O,$$

$$MZ - q \geqq O,$$

$$Z^T(MZ - q) = 0. \tag{1}$$

M – матрица, q – вектор.

Для решения этой задачи, при условии, что оно существует, имеется алгорифм, предложенный Лемке [1]. Оказывается, что к решению указанной задачи квадратичного программирования может быть сведена задача нахождения ситуаций равновесия в специальном случае конечных бескоалиционных игр n лиц.

Назовем конечную бескоалиционную игру полиматричной, если выигрыш каждого игрока в любой ситуации определяется как сумма результатов взаимодействий данного игрока со всеми остальными. Название оправдывается тем, что игра задается $n(n-1)$ матрицами результатов попарных взаимодействий между игроками.

Пусть каждый из n игроков имеет k_i стратегий $i=1, \ldots, n$ и пусть для любых $i, j=1, \ldots, n$, $i \neq j$ задана матрица A^{ij} размера $k_i \times k_j$, элементы которой $a^{ij}_{s_i s_j}$ являются частью выигрыша игрока i, зависящей от стратегии s_j игрока j, если игрок i применяет стратегию s_i. Общий выигрыш игрока i в ситуации $s=(s_1, \ldots, s_n)$, $H_i(s)$, по определению равен сумме

$$H_i(s) = \sum_{j \neq i} a^{ij}_{s_i s_j}.$$

Пусть $X^i = (x^i_1, \ldots, x^i_{k_i})$ – смешанная стратегия игрока i, то есть $x^i_{s_i} \geqslant 0$, $s_i = 1, \ldots, k_i$, $\sum\limits_{s_i=1}^{k_i} x^i_{s_i} = 1$. Тогда выигрыш игрока i в смешанной ситуации $X = (X^1, \ldots, X^n)$ выражается билинейной формой

$$H_i(X) = \sum_{s_i=}^{k_i} \sum^{k_j} \sum_{\neq i} a^{ij}_{s_i s_j} x^j_{s_j} x^i_{s_i} = X^{iT} \Big(\sum_{j \neq i} A^{ij} X^j \Big).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что выигрыши игроков неотрицательны в любой ситуации. Этого всегда можно добиться, отняв от всех элементов матриц A^{ij} достаточно большое число так, чтобы все их элементы стали отрицательными. Очевидно, что новая игра будет стратегически эквивалентна исходной.

Так как рассматриваемая игра является конечной, то в ней [3] существуют ситуации равновесия в смешанных стратегиях. Пусть

$$\tilde{X}=(\tilde{X}^1, \ldots, \tilde{X}^n)$$

какая-нибудь ситуация равновесия, а

$$v=(v_1, \ldots, v_n)$$

вектор выигрышей игроков в этой ситуации. Это означает, что

$$v_i = H_i(\tilde{X}) \geqslant H_i(\tilde{X} \| s_i) \qquad s_i=1, \ldots, k_i$$

и

$$\max_{s_i} H_i(\tilde{X} \| s_i) = v_i,$$

откуда следует, что если

$$H_i(\tilde{X} \| s_i) < v_i,$$

то

$$x^i_{s_i}=0.$$

Таким образом, для того чтобы набор $X=(X^1, \ldots, X^n)$ являлся ситуацией равновесия, а $v=(v_1, \ldots, v_n)$ — вектором выигрышей игроков в этой ситуации необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств:

$$\left.\begin{aligned} & v_i \geqslant H_i(X \| s_i), \\ & x^i_{s_i}\left(v_i - H_i(X \| s_i)\right)=0, \\ & X^i \geqq O, \\ & \sum_{s_i=1}^{k_i} x^i_{s_i}=1. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & s_i=1, \ldots, k_i, \\ & i=1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Если рассматривать не выигрыши игроков, а их проигрыши $H_i'(X)=-H_i(X)$, $v_i'=-v_i$, то система (2) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} & v_i' \leqslant H_i'(X \| s_i), \\ & x^i_{s_i}\left(H_i'(X \| s_i) - v_i'\right)=0, \\ & X^i \geqq O, \\ & \sum_{s_i=1}^{k_i} x^i_{s_i}=1. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & s_i=1, \ldots, k_i, \\ & i=1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2'}$$

Обозначим через Z, q $(k_1+k_2+\ldots+k_n+n)$-мерные векторы

$$Z=(X^1, X^2, \ldots, X^n, v_1', \ldots, v_n'),$$

$$q=(O_{k_1+\ldots+k_n}, 1, \ldots, 1),$$

где X^i — k_i-мерные векторы, $O_{k_1+\ldots+k_n}$ — нулевой вектор размерности $k_1+\ldots+k_n$, v'_i — числа, а через M — следующую квадратную матрицу размерности $k_1+k_2+\ldots+k_n+n$.

$$M=\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
O & A^{12} & \cdots & A^{1n} & -1 & O & \cdots & O\\
A^{21} & O & \cdots & A^{2n} & O & -1 & \cdots & O\\
\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots\\
A^{n1} & A^{n2} & \cdots & O & O & O & \cdots & -1\\
\hline
1 & O & \cdots & O & & & & \\
O & 1 & \cdots & O & & & O & \\
\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & & & & \\
O & O & \cdots & 1 & & & &
\end{array}\right\|$$

где A^{ij} — матрицы игры, 1 — единичные векторы, а O — нулевые матрицы, соответствующих размерностей. Вектор $MZ-q$ имеет следующий вид:

$$MZ-q=\Bigl(\sum_{j\neq 1} A^{1j}X^j-v'_1,\ \sum_{j\neq 2} A^{2j}X^j-v'_2,\ \ldots,\ \sum_{j\neq n} A^{nj}X^j-$$
$$-v'_n,\ \sum_{s_1=1}^{k_1} x^1_{s_1}-1,\ \ldots,\ \sum_{s_n=1}^{k_n} x^n_{s_n}-1\Bigr),$$

где v'_i — вектор размерности k_i, все компоненты которого равны v_i.

Для таким образом построенных M, Z и q решение задачи (1) совпадает с необходимыми и достаточными условиями (2′) того, чтобы набор векторов $X^1, \ldots, X^n$ являлся ситуацией равновесия в полиматричной игре, а числа $v_1=-v'_1, \ldots, v_n=-v'_n$ были бы соответствующими выигрышами игроков в этой ситуации. Действительно, следующие условия эквивалентны

$$Z\geqq O \leftrightarrow X^i\geqq O,\ v^i\geqslant 0,$$
$$MZ-q\geqq O\leftrightarrow v'_i\leqslant H'_i(X\|s_i),\ \sum_{s_i=1}^{k_i} x^i_{s_i}\geqslant 1,$$
$$Z(MZ-q)=0 \leftrightarrow x^i_{s_i}\left(v'_i-{}_iH'(X\|s_i)\right)=0,$$
$$v'_i\Bigl(\sum_{s_i=1}^{k_i} x^i_{s_i}-1\Bigr)=0. \tag{3}$$

Так как по предположению числа $v'_i\neq 0$ для всех $i=1, \ldots, n$, то из (3) следует $\sum_{s_i=1}^{k_i} x^i_{s_i}=1$.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-
математического института

Поступило в редакцию
10.XI.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. C. E. Lemke, Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, Management science, 11 N 7, 1968.
2. C. E. Lemke, J. T. Howson, Equilibrium points of bimatrix games, SIAM Journal, 12, 1964.
3. Дж. Нэш, Бескоалиционные игры, в сб. Матричные игры, физматгиз, 1961.

POLIMATRICINIŲ LOŠIMŲ PUSIAUSVYROS TAŠKAI

E. Janovskaja

(Reziumė)

Nagrinėjami specialūs nekoaliciniai n asmenų lošimai, vadinami polimatriciniais lošimais. Jie definuojami $n(n-1)$ matricomis. Pateikiamas šių lošimų pusiausvyros taškų radimo metodas. Šiuo metodu uždavinys, kaip ir bimatricinių lošimų atveju (Lemkė [1]), suvedamas į kvadratinio programavimo uždavinio sprendimą.

EQUILIBRIUM POINTS IN POLYMATRIX GAMES

E. Janovskaja

(Summary)

A special case of the finite non-cooperative n-person games is considered. These games named polymatrix are defined by $n(n-1)$ numbers of matrices. The method to find the equilibrium points of such games is given. This method is reduced to a method of Lemke [1] of the solving of a quadratic-programming problem.