УДК–518.9

ВОПРОС ИНФОРМАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

И. П. ЯЧЯУСКАС

Пусть оба игрока P и E обладают простым движением, и скорости их равны соответственно v и u, $v>u$. Рассмотрим некоторые игры качества с полной информацией и выясним, в каких случаях игрок P для достижения своей цели может использовать информацию о положении игрока E только в дискретные моменты времени.

1. Пусть игра происходит на плоскости. Игрок P выигрывает 1, поймав игрока E, и проигрывает 1 в противоположном случае. В этой простой постановке игроку P достаточно знать расположение игрока E только в дискретные моменты времени. Например, игрок P движется вдоль прямой линии, соединяющей точки начальных положений игроков P_0 и E_0, до точки E_0. За это время игрок E переместится в точку E_1. Затем игрок P из точки E_0 движется до точки E_1 и т. д. Так как $v>u$, то поимка происходит за конечное время.

2. Игра на полуплоскости. Если игрок P находится в выигрывающем множестве, то, как показано в [1], ему достаточно использовать информацию о положении игрока E только в дискретные моменты времени. В противном случае, если игрок E действует оптимально, то игрок P всегда проигрывает. Когда игрок E действует не оптимально, то, очевидно, игрок P должен использовать информацию о положении игрока E в каждый момент времени.

3. Игры в замкнутых выпуклых множествах S. Хотя основные результаты справедливы для n-мерных множеств, но для простоты ограничимся плоскими множествами.

Пусть $L(S, E)$ обозначает выигрывающее множество игрока P, когда игрок E находится в точке $E\in \mathrm{Int}(S)$. (Теоретико-множественные обозначения см. в [3]). Если $P\notin L(S, E)$, то игроку P нужна такая же информация, как и на полуплоскости. Поэтому будем предполагать, что $P\in L(S, E)$.

Найдем вид множества $L(S, E)$, когда $\mathrm{Fr}(S)$ имеет непрерывно меняющуюся касательную. С этой целью через каждую точку $\mathrm{Fr}(S)$ проведем касательную, и, считая, что эта касательная является „линией жизни“ (см. [2]), находим выигрывающее множество. Ясно, что $L(S, E)$ имеет границу, которая является внутренней огибающей границ найденных множеств.

Поместим начало координат в точку E. Пусть $\mathrm{Fr}(S)$ представима параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=r(t)\cos t, \\ y=r(t)\sin t. \end{cases}$$

Так как E находится внутри множества S, т. е. $E\in \mathrm{Int}(S)$, то $r(t)\neq 0$. Через точку $(x, y)\in \mathrm{Fr}(S)$ проведем касательную, уравнения которой:

$$[r'(t)\sin t+r(t)\cos t]X-[r'(t)\cos t-r(t)\sin t]Y=r^2(t). \qquad (1)$$

Перпендикуляр к этой касательной через точку E пересекается с касательной (1) в точке $M(\bar{x}, \bar{y})$, координаты которой:

$$\bar{x}=\frac{r^2(r'\sin t+r\cos t)}{r^2+(r')^2},$$

$$\bar{y}=\frac{r^2(r\sin t-r'\cos t)}{r^2+(r')^2}.$$

Расстояние между E и M:

$$|OM|=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+(r')^2}}.$$

Таким образом, барьер, соответствующий „линии жизни" (1), является эллипсом с центром в точке M, фокусом в точке E и большой полуосью $dr^2/\sqrt{r^2+(r')^2}$, где $d=v/u$. Уравнение эллипса

$$\sqrt{X^2+Y^2}+\sqrt{\left[X-\frac{2r^2(r'\sin t+r\cos t)}{r^2+(r')^2}\right]^2+\left[Y-\frac{2r^2(r\sin t-r'\cos t)}{r^2+(r')^2}\right]^2}=$$
$$=\frac{2dr^2}{\sqrt{r^2+(r')^2}}.$$

Переходя к полярным координатам $X=\rho\cos\varphi$, $Y=\rho\sin\varphi$, получаем уравнение

$$(d^2-1)r^2+\rho[r\cos(t-\varphi)+r'\sin(t-\varphi)]-d\rho\sqrt{r^2+(r')^2}=0. \qquad (2)$$

Левую часть (2) обозначим через $F(\rho, \varphi, t)$. Чтобы получить огибающую семейства кривых от параметра t, частную производную F по t приравниваем нулю:

$$2(d^2-1)rr'+$$
$$+\rho[2r'\cos(t-\varphi)-r\sin(t-\varphi)+r''\sin(t-\varphi)]-d\rho\frac{rr'+r'r''}{\sqrt{r^2+(r')^2}}=0. \qquad (3)$$

Левую часть (3) обозначим через $G(\rho, \varphi, t)$. Для того чтобы система уравнений $F(\rho, \varphi, t)=0$, $G(\rho, \varphi, t)=0$ определяла непрерывные функции $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ с непрерывными производными, должно быть

а) $\dfrac{\partial F}{\partial\rho}$, $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial G}{\partial\rho}$, $\dfrac{\partial G}{\partial\varphi}$ непрерывные;

б) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial\rho} & \dfrac{\partial F}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial G}{\partial\rho} & \dfrac{\partial G}{\partial\varphi} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Условие а) выполнено, если r' и r'' непрерывны. Подставляя значения производных, находим, что условие б) эквивалентно условию:

$$[r^2+2(r')^2-rr'']\left\{1-\frac{d}{\sqrt{r^2+(r')^2}}[r'\sin(t-\varphi)+r\cos(t-\varphi)]\right\}\rho\neq 0. \qquad (4)$$

Из уравнений (2) и (3) находим, что

$$\sin(t-\varphi)=\frac{dr'}{\sqrt{r^2+(r')^2}}, \qquad (5)$$

$$\cos(t-\varphi)=-\frac{\sqrt{r^2-(d^2-1)(r')^2}}{\sqrt{r^2+(r')^2}}. \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) во второй множитель (4), получаем, что

$$(r')^2 \neq \frac{r^2}{d^2-1}. \tag{7}$$

Таким образом справедлива лемма.

Лемма 1. *Если функция расстояния $r(t)$ от точки E до $\mathrm{Fr}(S)$ удовлетворяет условиям*

1) $r(t)>0$,
2) r' и r'' *непрерывны*,
3) $r^2+2(r')^2-rr''\neq 0$,
4) $(r')^2\neq r^2/(d^2-1)$,

то касательная барьера меняется непрерывно. Кроме того, внутренняя и внешняя огибающие не имеют общих точек.

Из (5) получаем, что для определения барьера достаточно тех t, для которых

$$(r')^2 \leqslant \frac{r^2}{d^2-1}. \tag{8}$$

Условие 3) леммы 1 означает, что область S строго выпукла и устраняет, прежде всего, случай, когда на некотором участке огибающая касается все время одной и той же кривой семейства, т. е. совпадает с ней. Очевидно, это условие не является необходимым.

Рассмотрим игру в круге K радиуса a. Пусть начало координат находится в центре круга, а игрок E в точке $E_0(\xi_0, \eta_0)$, $\xi_0^2+\eta_0^2<a^2$. Уравнение окружности

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=a\sin t. \end{cases}$$

Рассуждаем аналогично общему случаю.

Уравнение касательной:

$$Y\sin t+X\cos t-a=0.$$

Перпендикуляр к этой касательной через точку E_0:

$$(Y-\eta_0)\cos t-(X-\xi_0)\sin t=0.$$

Координаты точки пересечения касательной и перпендикуляра:

$$x_1=a\cos t-\eta_0\sin t\cos t+\xi_0\cos^2 t,$$

$$y_1=a\sin t+\eta_0\cos^2 t-\xi_0\sin t\cos t.$$

Расстояние между фокусом и центром эллипса:

$$\sqrt{(x_1-\xi_0)^2+(y_1-\eta_0)^2}=a-\eta_0\sin t-\xi_0\sin t.$$

Уравнение эллипса:

$$d^2(a-\eta_0\sin t-\xi_0\cos t)-a+X\cos t+Y\sin t-$$
$$-d\sqrt{(X-\xi_0)^2+(Y-\eta_0)^2}=0. \tag{9}$$

Для получения огибающей производную левой части (9) приравниваем нулю:

$$X\sin t-Y\cos t+d^2(\eta_0\cos t-\xi_0\sin t)=0. \tag{10}$$

Исключая параметр t из уравнений (9) и (10), получаем, что

$$X^2+Y^2-d^2\xi_0^2-d^2\eta_0^2+(d^2-1)a^2-2da\sqrt{(X-\xi_0)^2+(Y-\eta_0)^2}=0$$

или

$$(X^2+Y^2)^2+d^4(\xi_0^2+\eta_0^2)^2+(d^2-1)^2a^4-2d^2(X^2+Y^2)(\xi_0^2+\eta_0^2)-$$
$$-2a^2(X^2+Y^2)-2d^4a^2(\xi_0^2+\eta_0^2)-2d^2a^2(X^2+Y^2)-$$
$$-2d^2a^2(\xi_0^2+\eta_0^2)+8d^2a^2(X\xi_0-Y\eta_0)=0. \tag{11}$$

Внутренняя часть полученной кривой является барьером.

Если начало координат находится в точке E_0, то полярное уравнение окружности:

$$r=\sqrt{a^2-(\xi_0\sin t+\eta_0\cos t)^2}-\eta_0\sin t-\xi_0\cos t,$$

и нетрудно проверить, что первые три условия леммы 1 выполняются.

Пусть $a=2$, $d=2$, $\xi_0=0$, $\eta_0=1$, тогда уравнение (11) имеет вид

$$(X^2+Y^2-24)^2+128Y-576=0. \tag{12}$$

В точке $A(0, 4)$, первые частные производные левой части (12) равны нулю, но не все вторые частные производные обращаются в нуль, т. е. эта точка двойная, точнее, точка самопересечения. Если рассматривать суженное выигрывающее множество, т. е. $L(K, E_0)\cap K$, то в этой области все точки кривой (11) являются простыми.

В дальнейшем будем рассматривать игры преследования, не совпадающие с преследованием в обычном смысле. Будем считать, что игрок P выигрывает 1, если он не позволяет игроку E выйти за пределы S, и проигрывает 1 в противном случае. При таком определении выигрыша преследование может продолжаться бесконечно.

Лемма 2. *Пусть в начальный момент игрок E находится в точке $E_0\in\mathrm{Int}(S)$, расстояние между E_0 и $\mathrm{Fr}(S)$ равняется σ и игрок P находится в точке замкнутого круга с центром в точке E_0 и радиусом $(d-1)\sigma$. Тогда игроку P для достижения своей цели нужна информация о положении игрока E только в дискретные моменты времени.*

Доказательство. Игрок P может использовать следующую стратегию. Независимо от действий игрока E по прямой двигаться до точки E_0. В точке E_0 получить информацию о положении игрока E. Пусть игрок E находится в точке E_1, тогда игрок P из точки E_0 по прямой двигается до точки E_1 и т. д. Так как $d>1$, то поимка происходит в множестве S за конечное время. Лемма доказана.

Область, в которой игрок P использует информацию о положении игрока E только в дискретные моменты времени, можно расширить.

Теорема. *Пусть игра происходит в замкнутом круге K и игрок E находится в точке $E_0(\xi_0, \eta_0)\in\mathrm{Int}(K)$, тогда область, в которой игрок P использует информацию о положении игрока E только в дискретные моменты, совпадает с множеством $L(K, E_0)\cap K$.*

Доказательство. Пусть в начале игры игрок P находится на барьере (11) и со скоростью v перемещается по нормали барьера в точку пересечения этой нормали с радиусом, проходящим через точку E_0. Точку пересечения нормали с вышеупомянутым радиусом обозначим через $P_1(x_1, y_1)$, а перемещение игрока P из точки P_0 в точку P_1 будем называть шагом. Тогда

$$x_1 = \frac{2d^2a^2\xi_0}{d^2(\xi_0^2+\eta_0^2)+d^2a^2+a^2-x_0^2-y_0^2},$$

$$y_1 = \frac{2d^2a^2\eta_0}{d^2(\xi_0^2+\eta_0^2)+d^2a^2+a^2-x_0^2-y_0^2}. \qquad (13)$$

Так как $x_0^2+y_0^2 \leqslant a^2$, то знаменатели в формулах (13) не равны нулю.

Если P_0 находится на вышеупомянутом радиусе, то координаты точки P_1 находим по формулам (13). Чтобы упростить вычисление, положим $\eta_0=0$ и $d^2(\xi_0^2+\eta_0^2)+d^2a^2+a^2-x_0^2-y_0^2$ обозначим через b. Пусть δ_1 – расстояние между P_0 и P_1, тогда

$$\delta_1^2 = \frac{4d^4a^4\xi_0^2}{b^2} - \frac{4d^2a^2\xi_0x_0}{b} + x_0^2 + y_0^2. \qquad (14)$$

За время первого шага игрок E переместится в точку $E_1(\xi_1, \eta_1)$, причем

$$(\xi_1-\xi_0)^2+\eta_1^2 \leqslant \frac{\delta_1^2}{d^2}$$

или

$$\xi_1^2+\eta_1^2 \leqslant 2\xi_0\xi_1 - \xi_0^2 + \frac{4d^2a^4\xi_0^2}{b^2} - \frac{4a^2\xi_0x_0}{b} + \frac{x_0^2+y_0^2}{d^2}. \qquad (15)$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенству (15), обозначим через M_1. После первого шага барьер определяется формулой (11), в которой вместо ξ_0 и η_0 подставлены ξ_1 и η_1. Докажем, что точка P_1 находится в новом выигрывающем множестве, независимо от того, в какую точку множества M_1 переместился игрок E, т. е. докажем неравенство

$$x_1^4 + d^4(\xi_1^2+\eta_1^2)^2 + (d^2-1)^2a^4 - 2d^2(\xi_1^2+\eta_1^2)x_1^2 - 2a^2x_1^2 - 2d^4a^2(\xi_1^2+\eta_1^2) -$$
$$-2d^2a^2x_1^2 - 2d^2a^2(\xi_1^2+\eta_1^2) + 8d^2a^2x_1\xi_1 \geqslant 0. \qquad (16)$$

Сначала докажем неравенство (16) для точек $E_1 \in \mathrm{Fr}(M_1)$, т. е. докажем, что

$$4d^4\xi_0^2\xi_1^2 + 4d^2\xi_0\xi_1\left(\frac{4d^2a^4}{b} - \frac{4d^2a^2\xi_0x_0}{b} + x_0^2 + y_0^2 - d^2\xi_0^2 - d^2a^2 - a^2\right) +$$
$$+(x_0^2+y_0^2)^2 + d^4\xi_0^4 + d^4a^4 - 2d^2a^4 + a^4 - 2d^2(x_0^2+y_0^2)\xi_0^2 - 2a^2(x_0^2+y_0^2) +$$
$$+2d^4a^2\xi_0^2 - 2d^2a^2(x_0^2+y_0^2) - 2d^2a^2\xi_0^2 + \frac{16d^4a^4\xi_0^2}{b^2}(x_0^2-a^2-d^2a^2) +$$
$$+\frac{8\xi_0x_0d^2}{b}\left[d^2a^2\xi_0^2 - a^2(x_0^2+y_0^2) + d^2a^4 + a^4\right) \geqslant 0. \qquad (17)$$

Так как (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению (11), то (17) эквивалентно неравенству

$$4d^4\xi_0^2\xi_1^2 - \frac{16d^4a^2\xi_0^2}{b}(d^2\xi_0+\xi_0-x_0)\xi_1 + 4d^2a^2\xi_0^2(d^2-1) +$$
$$+\frac{16d^4a^4\xi_0^2}{b^2}(x_0^2-a^2-d^2a^2) \geqslant 0.$$

При помощи элементарных преобразований получаем, что

$$\xi_1^2 - \frac{4a^2\xi_1}{b}(d^2\xi_0+\xi_0-x_0) + \frac{4a^4}{b^2}(d^2\xi_0+\xi_0-x_0)^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$\left[\xi_1 - \frac{2a^2(d^2\xi_0+\xi_0-x_0)}{b}\right]^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство (16) выполняется для всех $E_1 \in \mathrm{Fr}(M_1)$.

Из определения выигрывающего множества (или уравнения (11)) следует, что $L(K, E)$ состоит из одной точки E, если только $E \in \mathrm{Fr}(K)$. Так как $P_1 \notin \mathrm{Fr}(K)$ и для всех $E_1 \in \mathrm{Fr}(M_1)$ выполняется неравенство (16), то $\mathrm{Fr}(M_1) \cap \mathrm{Fr}(K) = \varnothing$. Таким образом, $M_1 \subset \mathrm{Int}(K)$, т. е. $\xi_1^2 + \eta_1^2 < a^2$, и

$$d^4(\xi_1^2+\eta_1^2)^2 - 2d^4a^2(\xi_1^2+\eta_1^2) < 0. \tag{18}$$

Ввиду неравенства (18), подставляя правую сторону (15) вместо $\xi_1^2+\eta_1^2$ могли только уменьшить левую сторону неравенства (16). Таким образом, (16) справедливо для всех $E_1 \in M_1$.

Докажем, что шаг имеет ненулевую длину. Из определения точки P_1 следует, что достаточно проверить длину шага для тех P_0, которые лежат на прямой $y=0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $\xi_0 \geqslant 0$. Если $0 \leqslant \xi_0 < \frac{a}{d}$, то барьер пересекает прямую $y=0$ в точках $x_{01} = -da+a+d\xi_0$ и $x_{02} = da-a+d\xi_0$. По формулам (13) вычисляем, что игрок P из точки $P_{01}(x_{01}, 0)$ переходит в точку $P_{11}(x_{11}, 0)$, где

$$x_{11} = \frac{da\xi_0}{a+d\xi_0-\xi_0}.$$

Проверяем, что $x_{01} \neq x_{11}$, т. е.

$$\frac{da\xi_0}{a+d\xi_0-\xi_0} \neq -da+a+d\xi_0.$$

Так как $a+d\xi_0-\xi_0 \neq 0$, то достаточно проверить, что

$$da\xi_0 \neq (a+d\xi_0-\xi_0)(-da+a+d\xi_0). \tag{19}$$

Неравенство (19) эквивалентно неравенству

$$(d-1)(a+d\xi_0)(a-\xi_0) \neq 0.$$

Так как $d>1$ и $a>\xi_0$, то последнее неравенство справедливо и шаг имеет ненулевую длину.

Из точки $P_{02}(x_{02}, 0)$ игрок P переходит в точку $P_{12}(x_{12}, 0)$, где

$$x_{12} = \frac{da\xi_0}{a-d\xi_0+\xi_0}.$$

Так как $\xi_0 < \frac{a}{d}$, то $a-d\xi_0+\xi_0 \neq 0$ и неравенство $x_{12} \neq x_{02}$ эквивалентно неравенству

$$(d-1)(a-d\xi_0)(a+\xi_0) \neq 0.$$

Так как $d>1$ и $\xi_0 < \frac{a}{d}$, то последнее неравенство справедливо.

Если $\frac{a}{d} \leqslant \xi_0 < a$, то барьер пересекает прямую $y=0$ в точках $x_{01} = -da+a+d\xi_0$ и $x_{03} = da-d\xi_0+a$. Длину шага для первой точки уже проверили, а вторая точка не принадлежит кругу K.

Таким образом, теорему доказали для тех P_0, которые принадлежат барьеру (11).

Если $P_0 \in K \cap \mathrm{Int}(L(K, E))$ и не удовлетворяются условия леммы 2, то уменьшаем d так, чтобы точка P_0 находилась на барьере с новым d_1.

Очевидно, что полученный $d_1 > 1$. Достаточно использовать d_1 только для вычисления координат точки P_1, а при движении скорость игрока P не менять.

Таким образом, игрок P может двигаться по ломаной линии, используя информацию о положении игрока E только в вершинах этой ломаной. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть игрок E находится в точке $E_0 \in \mathrm{Int}(S)$ и $K_\alpha \subset S$ система всех замкнутых кругов, для которых $E_0 \in \mathrm{Int}(K_\alpha)$. Если игрок P находится в точке $P_0 \in S$ и существует такой индекс α_1, что $P_0 \in K_{\alpha_1} \cap \cap L(K_{\alpha_1}, E_0)$, то ему достаточна информация о положении игрока E только в дискретные моменты времени.*

Следствие имеет место для игр качества в любом (даже не выпуклом) множестве S.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
15.XI.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Ячяускас, Одна игра преследования на полуплоскости, Лит. мат. сб., VII, 1 (1967).
2. Л. А. Петросян, Игры преследования с „линией жизни", Вестник ЛГУ, 13 (1967).
3. К. Куратовский, Топология, т. I, „Мир", М., 1966.
4. Р. Айзекс, Дифференциальные игры, „Мир", М., 1967.

INFORMACIJA KAI KURIUOSE PERSEKIOJIMO LOŠIMUOSE

I. Jačiauskas

(*Reziumė*)

Nagrinėjami persekiojimo lošimai uždarame skritulyje. Gaubiamųjų metodu randama lošėjo P išlošiamoji aibė. Parodoma, kad lošėjas P, būdamas išlošiamoje aibėje ir žinodamas lošėjo E padėtis tik diskretiniais laiko momentais, neleidžia lošėjui E išeiti iš skritulio. Gauti rezultatai pritaikomi tyrimui lošimų bet kokiose uždarose srityse.

INFORMATION IN THE GAMES OF PURSUIT

I. Jačiauskas

(*Summary*)

The games of kind in the closed circle are solved. The set of player's P advantageous positions is found. There is shown, that for the player P it is sufficient to know only the discrete location of player E. The results obtained are applied to investigate the games in the closed (convex or not) sets.