1968

УДК–517.53

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

М. Б. БАЛК

Рассмотрим функцию $f(z)$ двух сопряженных комплексных переменных $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$, которая может быть на всей плоскости комплексного переменного z представлена в виде:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z), \tag{1}$$

где $f_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ – целые функции переменного z. Функцию $f(z)$ назовем целой полианалитической функцией порядка n (или целой n-аналитической функцией). В частности, если все $f_k(z)$ – полиномы от z, то функцию (1) назовем полианалитическим полиномом порядка n. Понятно, что всякий „аналитический" полином $P(z)$ (то есть зависящий явно только от z, но не от $\bar{z}$) представляет собой полианалитический полином порядка 1.

Согласно основной теореме алгебры такой полином $P(z)$, отличный от константы, имеет по крайней мере один корень. Для полианалитических полиномов порядка выше первого такое утверждение уже неверно. Например, полианалитический полином четвертого порядка $z^3-\bar{z}^3-1$ вовсе не имеет корней (ибо $z^3-\bar{z}^3$ принимают только чисто мнимые значения).

В этой заметке мы намерены обобщить основную теорему алгебры на полианалитические полиномы любого порядка.

Теорема 1 (*основная теорема алгебры для полианалитических полиномов*).

Если точная степень полинома $\Pi(z, \bar{z})$ *относительно пары сопряженных переменных* z *и* $\bar{z}$ *более, чем вдвое, превышает точную степень этого полинома относительно одного из этих переменных, то полином* $\Pi(z, \bar{z})$ *имеет по крайней мере один корень.*

Доказательство. Обозначим через n, n_1 и s точные степени многочлена $\Pi(z, \bar{z})$ соответственно относительно переменного $\bar{z}$, относительно z и относительно пары переменных z и $\bar{z}$.

Нам предстоит доказать следующее: если $\Pi(z, \bar{z})$ нигде не обращается в нуль, то одновременно

$$s \leqslant 2n, \tag{2}$$

$$s \leqslant 2n_1. \tag{3}$$

Полином $\Pi(z, \bar{z})$ можно записать в следующем виде:

$$\Pi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} P_k(z).\ \bar{z}^k, \tag{4}$$

причем $P_n(z) \not\equiv 0$.

Каждый полином $P_k(z)$ ($k=0, 1, \ \ n$), входящий в формулу (4), можно записать так:

$$P_k(z) = \sum_{\nu=0}^{s-k} a_\nu^{(k)} z^\nu,$$

причем среди „старших" коэффициентов $a_{s-k}^{(k)}$ хотя бы один должен быть отличен от нуля (ибо в противном случае точная степень полинома $\Pi(z, \bar{z})$ была бы ниже, чем s).

Рассмотрим вспомогательный полианалитический полином (порядка $n+1$):

$$B(z) = z^n \cdot \Pi(z, \bar{z}), \tag{5}$$

имеющий единственный корень в точке $z=0$. $B(z)$ можно переписать еще так:

$$B(z) = \sum_{k=0}^{n} |z|^{2k} \left(z^{n-k} \sum_{\nu=0}^{s-k} a_\nu^{(k)} z^\nu\right). \tag{6}$$

Пусть c — произвольное положительное число. Ясно, что $B(z) \neq 0$ на окружности $\Gamma\ \{|z|=c\}$ при любом $c>0$.

Через $\text{Вр}_\Gamma B(z)$ обозначим вращение фукнции $B(z)$ на контуре Γ:

$$\text{Вр}_\Gamma B(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg B(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d \arg B(z).$$

В силу известной теоремы о вращении непрерывного векторного поля без нулевых векторов (см. [2], стр. 26, теорема 3.1) имеем:

$$\text{Вр}_\Gamma \Pi(z, \bar{z}) = 0.$$

Поэтому (при любом $c>0$)

$$\text{Вр}_\Gamma B(z) = \text{Вр}_\Gamma (z^n) + \text{Вр}_\Gamma \Pi(z, \bar{z}) = n. \tag{7}$$

На контуре Γ полианалитический полином $B(z)$ совпадает с аналитическим полиномом

$$\Phi(z;\ c) = \sum_{k=0}^{n} c^{2k} \left(z^{n-k} \sum_{\nu=0}^{s-k} a_\nu^{(k)} z^\nu\right). \tag{8}$$

Поэтому

$$\text{Вр}_\Gamma \Phi(z;\ c) = n. \tag{9}$$

Рассмотрим еще полином $\Psi(z;\ c)$, определяемый формулой

$$\Psi(z;\ c) = \frac{\Phi(cz;\ c)}{c^{s+n}}. \tag{10}$$

Он имеет внутри единичной окружности $\gamma\ \{|z|=1\}$ в точности столько же корней, сколько их имеет полином $\Phi(z;\ c)$ внутри окружности Γ. Поэтому

$$\text{Вр}_\gamma \Psi(z;\ c) = n. \tag{11}$$

Функцию $\Psi(z; c)$ можно представить в следующем виде:

$$\Psi(z;\ c)=Q(z)+R(z;\ c), \tag{12}$$

где

$$Q(z)=a_s^{(0)}z^{s+n}+a_{s-1}^{(1)}z^{s+n-2}+\ldots+a_{s-n}^{(n)}z^{s-n}, \tag{13}$$

$$R(z;\ c)=\frac{1}{c^{s+n}}\sum_{k=0}^{n}c^{n+k}\left(z^{n-k}\sum_{\nu=0}^{s-k-1}a_\nu^{(k)}c^\nu z^\nu\right). \tag{14}$$

Теперь воспользуемся известной теоремой Гурвица. Согласно этой теореме (см. А. И. Маркушевич [1], стр. 317), если $\{\psi_\mu(z)\}$ – последовательность функций, аналитических в области D, – равномерно сходится внутри этой области к функции $\psi(z)$, то для любой простой замкнутой спрямляемой кривой γ, принадлежащей (вместе со своей внутренностью) области D и не проходящей через нули функции $\psi(z)$, существует такое число $N=N(\gamma)$, что при $\mu>N$ каждая из функций $\psi_\mu(z)$ будет иметь внутри γ одно и то же число нулей, равное числу нулей функции $\psi(z)$ внутри этой кривой.

В нашем случае положим $\psi(z)=Q(z)$, $\psi_\mu(z)=Q(z)+R(z;\mu)$, очевидно, что $Q(z)\not\equiv 0$ (ибо, как мы уже заметили выше, среди чисел $a_{s-k}^{(k)}$ хотя бы одно должно быть отлично от нуля). В точке $z=0$ полином $Q(z)$ имеет корень, порядок которого не ниже, чем $s-n$. Выберем настолько малую окрестность $\delta\{|z|<\rho<1\}$ точки $z=0$, чтобы в δ функция $Q(z)$ не обращалась в нуль нигде, кроме точки $z=0$. В силу теоремы Гурвица, функция $\Psi(z;\mu)$ будет иметь в δ – при достаточно большом μ – столько же корней (с учетом их кратности), сколько их имеет там функция $Q(z)$, то есть *не менее, чем* $s-n$ корней. Поэтому внутри единичной окружности γ функция $\Psi(z;\mu)$ подавно имеет не менее, чем $s-n$ корней.

С другой стороны, число корней полинома $\Psi(z;\mu)$ внутри γ *равно* n. Следовательно, $n\geqslant s-n$,

$$s\leqslant 2n.$$

Итак, неравенство (2) доказано. Чтобы доказать неравенство (3), рассмотрим вспомогательный многочлен

$$\Pi_1(z,\ \bar z)\equiv\overline{\Pi(z,\ \bar z)}.$$

Его степень относительно $\bar z$ равна n_1, а относительно пары переменных z и $\bar z$ она составляет s. Если $\Pi(z, \bar z)$ не имеет корней, то и $\Pi_1(z, \bar z)$ не имеет корней, и в силу предыдущих рассуждений получаем:

$$s\leqslant 2n_1.$$

Итак, мы доказали оба неравенства (2) и (3), а, следовательно, и теорему 1.

Следствие 1. *Если точная степень* (s) *n-аналитического полинома относительно пары переменных z и $\bar z$ больше, чем* $2n-2$, *то этот полином принимает каждое комплексное значение.*

Замечание 1. В случае полинома $P(z)$ степени $n_1\geqslant 1$, зависящего только от одного переменного z, условие теоремы 1 автоматически выполняется: $s=n_1$, $n=0$, $s>2n$, так что теорема 1 содержит основную теорему алгебры как частный случай.

Замечание 2. В дополнение к теореме 1 заметим, что при любых целых неотрицательных n и s, удовлетворяющих условию

$$n \leqslant s \leqslant 2n$$

на самом деле существует полианалитический полином точного порядка полианалитичности $n+1$ и точной степени s, лишенный корней. Таков, например, полином

$$(z+\bar{z}+i)^{2n-s} \cdot (1+z \cdot \bar{z})^{s-n}.$$

Следствие 1 допускает следующую перефразировку. *Если точная степень* (s) *n-аналитического полинома* $\Pi(z, \bar{z})$ *равна* $2n-2+p$ ($p>0$), *то* $\Pi(z, \bar{z})$ *имеет хотя бы один корень.*

Несколько уточняя предыдущие рассуждения, можно получить более точный результат: если точная степень (s) n-аналитического полинома равна $2n-2+p$, то этот полином либо имеет неизолированные корни, либо сумма индексов всех изолированных корней этого полинома не меньше, чем p (о понятии индекса см. [2]).

Смоленский педагогический институт

Поступило в редакцию 24.X.1967

Литература

1. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, ГИТТЛ, М., 1950.
2. М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко, Векторные поля на плоскости, Физматгиз, М., 1963.

PAGRINDINĖ ALGEBROS TEOREMA POLIANALIZINIŲ POLINOMŲ ATVEJU

M. BALKAS

(*Reziumė*)

Straipsnyje įrodoma šitokia teorema.

Jei polinomo $\Pi(z, \bar{z})$ laipsnis abiejų kintamųjų z ir $\bar{z}$ atžvilgiu yra daugiau kaip dvigubai didesnis už jo laipsnį kurio nors vieno iš tų kintamųjų atžvilgiu, tai tas polinomas turi bent vieną kompleksinę šaknį.

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ALGEBRA FOR POLYANALYTIC POLYNOMIAL

M. BALK

(*Summary*)

In this note the following theorem is proved.

If the exact degree of a polynomial $\Pi(z, \bar{z})$ in regard to the pair of conjugate variables z, $\bar{z}$ surpasses more then twice the exact degree of this polynomial in regard to one of these variables, then $\Pi(z, \bar{z})$ has at least one complex root.