1968

УДК – 517.55

ОБ УТОЧНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ф. И. ГЕЧЕ

Основные результаты этой статьи были приведены нами в работе [1]. Настоящая статья посвящается развернутому изложению вопросов, связанных с уточненными порядками целых функций многих переменных. Для простоты ограничимся случаем двух комплексных переменных, случай произвольного конечного числа переменных рассматривается также.

При изучении роста целых функций двух комплексных переменных пространство C^2 обычно исчерпывают либо однопараметрическим семейством поверхностей $S(R)$ $|z_1|^\alpha+|z_2|^\alpha=R^\alpha$, $\alpha>0$, либо двухпараметрическим семейством $S(r_1, r_2)$ $\{|z_1|=r_1\}\cdot\{|z_2|=r_2\}$. В первом случае рост функции $f(z_1, z_2)$ измеряют с помощью функции $\ln M(R)$, где через $M(R)$ обозначается максимум модуля функции $f(z_1, z_2)$ на $S(R)$ и получают глобальные характеристики роста – порядок и тип. Во втором случае сравнивают рост функции $\ln M(r_1, r_2)$ с ростом $\sigma_1 r_1^{\rho_1}+\sigma_2 r_2^{\rho_2}$, где $M(r_1, r_2)=\max\limits_{(z_1, z_2)\in S(r_1, r_2)}|f(z_1, z_2)|$ и приходят к определению системы сопряженных порядков и системы сопряженных типов [2].

Для более полной характеристики роста целой функции одной переменной используется понятие уточненного порядка [3]. Оно автоматически переносится на случай функции двух переменных, если их рост измеряется с помощью $\ln M(R)$. Менее тривиальна задача изучения уточненных порядков при исчерпании пространства C^2 семейством поверхностей $S(r_1, r_2)$. Но при этом получаются более тонкие результаты, больше отражающие природу функций двух комплексных переменных.

§ 1. Системы сопряженных уточненных порядков

Системы сопряженных порядков (ρ_1, ρ_2) и сопряженных типов (σ_1, σ_2) при системе сопряженных порядков (ρ_1, ρ_2), которые образуют некоторые кривые (гиперповерхности) были введены Л. И. Ронкиным [4–6], [2]. В частном случае они изучались уже в работе М. М. Джрбашяна [7], а в дальнейшем в работах А. А. Гольдберга [8], [9] (здесь рассматривались также обобщения этих понятий) и Л. С. Маергойза [10]. Мы приведем здесь определения систем сопряженных порядков и сопряженных типов в удобной для наших целей форме. Легко показать, что эти определения эквивалентны определениям, приведенным в вышецитируемых работах.

Все время будем рассматривать целые функции $f(z_1, z_2)\not\equiv\mathrm{const}$, причем не исключается случай, когда функция зависит фактически только от одной переменной.

Введем обозначение

$$M(r_1, r_2)=\max_{|z_1|=r_1,\ |z_2|=r_2}|f(z_1, z_2)|. \tag{1.1}$$

Система неотрицательных чисел (ρ_1, ρ_2) называется системой сопряженных порядков (с. с. п.) функции $f(z_1, z_2)$, если при любом $\varepsilon>0$ имеет место асимптотическое относительно $R=r_1+r_2$ неравенство

$$\ln M(r_1, r_2)\leqslant r_1^{\rho_1+\varepsilon}+r_2^{\rho_2+\varepsilon}, \tag{1.2}$$

а с другой стороны, на некоторой последовательности

$$\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\} \qquad (R_k=r_1^{(k)}+r_2^{(k)}\to\infty)$$

при некоторой положительной постоянной δ выполняется неравенство

$$\ln M(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})>\delta\,[(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon}+(r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}]. \tag{1.3}$$

Если не существует такой системы конечных чисел (ρ_1, ρ_2), для которой выполнялось бы неравенство (1.2), то $f(z_1, z_2)$ – целая функция бесконечного порядка, если же $\rho_1=\rho_2=0$, то $f(z_1, z_2)$ имеет нулевой порядок.

Пусть (ρ_1,ρ_2) $(\rho_1>0,\ \rho_2>0)$ – некоторая система сопряженных порядков функции $f(z_1, z_2)$. Система неотрицательных чисел (σ_1,σ_2) называется системой сопряженных типов (с.с. т.) при с. с. п. (ρ_1, ρ_2), если при любом $\varepsilon>0$ выполняется, с одной стороны, асимптотическое относительно $R=r_1+r_2$ неравенство

$$\ln M(r_1, r_2)\leqslant(\sigma_1+\varepsilon)\,r_1^{\rho_1}+(\sigma_2+\varepsilon)\,r_2^{\rho_2}, \tag{1.4}$$

а с другой стороны, на некоторой последовательности

$$\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\} \qquad (R_k=r_1^{(k)}+r_2^{(k)}\to\infty)$$

имеет место

$$\ln M(r_1, r_2)>(\sigma_1-\varepsilon)\,r_1^{\rho_1}+(\sigma_2-\varepsilon)\,r_2^{\rho_2}. \tag{1.5}$$

Аналогично предыдущему дается определение функции бесконечного или нулевого типа. Совокупность всех с. с. п. (ρ_1, ρ_2) функции $f(z_1, z_2)$ называется кривой сопряженных порядков, а совокупность с. с. т. (σ_1, σ_2) при с. с. п. (ρ_1, ρ_2) – кривой сопряженных типов при с. с. п. (ρ_1, ρ_2).

В дальнейшем мы будем рассматривать только целые функции конечного порядка и введем новую характеристику роста целых функций двух переменных – систему сопряженных уточненных порядков (с. с. у. п.).

Введем следующие обозначения: $|z_i|=r_i$, $R=r_1+r_2$, α_i и β_i – некоторые неотрицательные фиксированные числа, удовлетворяющие условиям: $\alpha_1>0$, $\beta_2>0$, $\alpha_2\geqslant0$, $\beta_1\geqslant0$; $R_i=\alpha_i r_1+\beta_i r_2$, $i=1, 2$.

Пусть (ρ_1, ρ_2) – некоторая система положительных чисел. В качестве с. с. у. п. естественно выбрать системы функций $\big(\rho_1(r_1, r_2), \rho_2(r_1, r_2)\big)$, таких, чтобы $\rho_i(r_1, r_2)\to\rho_i$, $i=1, 2$, и, кроме того, чтобы эти функции обладали определенными свойствами гладкости и роста, аналогично случаю одной переменной. В различных вопросах удобно по разному выбирать классы функций $\rho_i(r_1, r_2)$ для определения с. с. у. п. Естественно рассматривать классы более простых функций, но достаточных для построения шкалы роста всех целых функций. Мы предлагаем следующее.

Определение 1. Систему неотрицательных непрерывных функций $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$, определенных при $0 \leqslant R_i < \infty$, $i=1, 2$, назовем с. с. у. п., если: 1) $\rho_i(R_i)$ – дифференцируемая функция переменной R_i, исключая, быть может, изолированные точки, в которых существуют односторонние производные;

2) $\lim\limits_{R_i \to \infty} \rho_i(R_i) = \rho_i < \infty;$ (1.6)

3) $\lim\limits_{R_i \to \infty} R_i \rho_i'(R_i) \ln R_i = 0 \qquad (i=1, 2).$ (1.7)

Определение 2. Пусть $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ является с. с. у. п. и функция $f(z_1, z_2)$ имеет с. с. п. (ρ_1, ρ_2). Если существует система положительных чисел (σ_1, σ_2), которая удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{R\to\infty} \frac{\ln M(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1(R_1)} + \sigma_2 r_2^{\rho_2(R_2)}} = 1, \tag{1.8}$$

то система функций $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ называется с. с. у. п. функции $f(z_1, z_2)$, а система (σ_1, σ_2) – системой сопряженных типов (с. с. т.) при с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$.

Очевидно, с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ функции $f(z_1, z_2)$ определяется неединственным образом; на любом конечном интервале функции $\rho_i(R_i)$, $i=1, 2$, можно выбирать произвольно, соблюдая условие 1) определения 1. В работе [1] мы рассматривали с. с. у. п. двух видов: $\rho_i(R_i) = \rho_i(R)$ и $\rho_i(R_i) = \rho_i(r_i)$ $(i=1, 2)$, т.е. рассматривали случаи: A) $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=1$ и B) $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_2=\beta_1=0$.

Покажем, что всякая целая функция $f(z_1, z_2)$ конечного порядка имеет с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ при произвольных α_i, β_i, удовлетворяющих вышеуказанным условиям. При некоторых естественных ограничениях справедлива несколько более общая теорема, обобщающая теорему 16 из [3], гл. I.

Теорема 1. *Пусть целая функция* $f(z_1, z_2)$ *имеет* с. с. п. (ρ_1, ρ_2) $(\rho_i < \infty$, $i=1, 2)$, *причем если* $f(z_1, z_2)$ *не зависит от переменной* z_1 *(переменной* z_2*), то система* (ρ_1, ρ_2') *с* $\rho_2' < \rho_2$ *(система* (ρ_1', ρ_2) *с* $\rho_1' < \rho_1$*) не является с. с. п. Тогда существует с. с. у. п.* $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ *функции* $f(z_1, z_2)$, *которая удовлетворяет условиям:*

4) $\ln M(r_1, r_2) \leqslant r_1^{\rho_1(R_1)} + r_2^{\rho_2(R_2)}$ *при* $R > R_0$; (1.9)

5) *на некоторой последовательности*

$$\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\} \qquad (R^{(k)} = r_1^{(k)} + r_2^{(k)} \to \infty)$$

имеют место равенства

$$\ln M(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}) = (r_1^{(k)})^{\rho_1(R_1^{(k)})} + (r_2^{(k)})^{\rho_2(R_2^{(k)})}. \tag{1.10}$$

Если $R_i = r_i$, $i=1, 2$, *то существует* с. с. у. п. $\left(\rho_1(r_1), \rho_2(r_2)\right)$, *удовлетворяющая условиям* 4) *и* 5), *какова бы ни была функция* $f(z_1, z_2)$ *и* с. с. п. (ρ_1, ρ_2) *функции* $f(z_1, z_2)$, $\rho_i < \infty$, $i=1, 2$.

Доказательство. Если целая функция $f(z_1, z_2)$ не зависит от z_2, то $f(z_1, z_2) = f(z_1)$ имеет уточненный порядок $\rho_1(r_1)$, удовлетворяющий аналогичным условиям 4) и 5) в случае одной независимой переменной (см., например, [3]). Но тогда $\left(\rho_1(r_1), \rho_2 + \ln\ln(r_2+9)\,[\ln(r_2+e)]^{-1}\right)$ является с. с. у. п. функции $f(z_1, z_2) = f(z_1)$, причем выполняются условия 4) и 5); $\rho_2(r_2) = c/\ln r_2$ при $r_2 > e$ в случае, когда $\rho_1 = \lim\limits_{r_1\to\infty} \rho_1(r_1)$ больше порядка функции $f(z_1)$.

Пусть теперь функция $f(z_1, z_2)$ зависит от обеих переменных z_1 и z_2. Не ограничивая общности, можем предполагать, что никакая система чисел (ρ_1, ρ_2') с $\rho_2' < \rho_2$ не является с. с. п. функции $f(z_1, z_2)$. Действительно, в противном случае мы могли бы это утверждать относительно ρ_1 и изменением нумерации переменных пришли бы к указанному случаю.

Построим кусочно постоянные функции $\lambda_1(R_1)$ и $\lambda_2(R_2)$ следующим образом. Выберем строго монотонную последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$. Тогда по условию (1.2) при $R \geqslant \bar{R}^{(k)}$ имеет место неравенство (функции $f(z_1, z_2)$ и $e^2 f(z_1, z_2)$ имеют одинаковые с. с. п.)

$$\ln M(r_1, r_2) \leqslant r_1^{\rho_1+\varepsilon_k} + r_2^{\rho_2+\varepsilon_k} - 2, \qquad k=0, 1, 2, \tag{1.11}$$

Обозначим

$$R^{(0)} = \bar{R}^{(0)}, \quad R^{(k)} = \max(\bar{R}^{(k)}, R^{(k-1)})^{1/\varepsilon_k}, \qquad k=1, 2,$$

и

$$R_i^{(k)} = \max_{\substack{r_1+r_2=R^{(k)} \\ r_1\geqslant 0;\ r_2\geqslant 0}} (\alpha_i r_1 + \beta_i r_2), \qquad i=1, 2.$$

Функции $\lambda_i(R_i)$, $i=1, 2$, положим равными $\lambda_i(R_i) = \rho_i + 2\varepsilon_k$ пр $R_i^{(k)} \leqslant R_i < R_i^{(k+1)}$,

$$i=1, 2, \ k=0, 1, 2, \tag{1.12}$$

Очевидно, $R_i^{(k)} \to \infty$, когда $k \to \infty$, $i=1, 2$, и

$$\ln M(r_1, r_2) \leqslant r_1^{\lambda_1(R_1)} + r_2^{\lambda_2(R_2)} - 2 \qquad (R > R^{(0)}). \tag{1.13}$$

Для функции $\lambda_1(R_1)$ построим (ср. [11]) аппроксимирующую сверху функцию $\rho_1(R_1)$, удовлетворяющую соотношениям (1.6) и (1.7). Считаем, что $\ln\ln R_1^{(0)} \geqslant 1$, и положим $\rho_1(R_1) = \lambda_1(R_1)$ при $R_1^{(0)} \leqslant R_1 < R_1^{(1)}$. Определим число $u_1 > R_1^{(1)}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\rho_1(R_1) = \rho_1(R_1^{(1)} - 0) - \ln\ln\ln R_1 + \ln\ln\ln R_1^{(1)} \quad \text{при} \quad R_1^{(1)} \leqslant R_1 \leqslant u_1,$$

$$\rho_1(R_1) = \lambda_1(R_1) \qquad \text{при} \quad R_1 = u_1,$$

$$\rho_1(R_1) > \lambda_1(R_1) \qquad \text{при} \quad R_1^{(1)} \leqslant R_1 < u_1.$$

Пусть $R_1^{(k_1)}$ — наименьшее из чисел $R_1^{(k)}$, для которых $u_1 < R_1^{(k)}$. На интервале $u_1 < R_1 < R_1^{(k)}$ положим $\rho_1(R_1) = \lambda_1(R_1)$. Отправляясь от $R_1^{(k_1)}$, как и от $R_1^{(1)}$, подберем аналогично предыдущему число u_2 и функцию $\rho_1(R_1)$

при $R_1^{(k_i)} \leqslant R_1 \leqslant u_2$. Бесконечным повторением этого процесса построим функцию $\rho_1(R_1)$:

$$\rho_1(R_1) = \lambda_1(R_1) \qquad \text{при } u_i < R_1 < R_1^{(k_i)},$$

$$\rho_1(R_1) = \rho_1(R_1^{(k_i)} - 0) - \ln\ln\ln R_1 + \ln\ln\ln R_1^{(k_i)} \text{ при } R_1^{(k_i)} \leqslant$$

$$\leqslant R_1 \leqslant u_{i+1}, \tag{1.14}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$, $u_0 = R_1^{(0)}$, $R_1^{(k_0)} = R_1^{(1)}$. Очевидно, функция $\rho_1(R_1)$ обладает требуемыми свойствами гладкости и удовлетворяет соотношениям (1.6) и (1.7). В силу неравенства (1.13) получаем неравенство

$$\ln M(r_1, r_2) \leqslant r_1^{\rho_1(R_1)} + r_2^{\lambda_2(R_2)} - 1 \qquad (R > R^{(0)}). \tag{1.15}$$

Рассмотрим теперь функцию $(R \geqslant R'^{(0)})$ *):

$$\omega(r_1, r_2) = \begin{cases} \ln^+[\ln^+ M(r_1, r_2) - r_1^{\rho_1(R_1)}](\ln r_2)^{-1} & \text{при } r_2 > 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant r_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, функция $\omega(r_1, r_2)$ непрерывна и $\rho_2 = \Omega$, где $\Omega = \varlimsup\limits_{R\to\infty} \omega(r_1, r_2)$. Действительно, неравенство $\Omega \leqslant \rho_2$ следует из определения функций $\lambda_i(R_i)$, $i = 1, 2$, $\rho_1(R_1)$, и $\omega(r_1, r_2)$ и неравенств (1.2), (1.15). С другой стороны, учитывая, что (ρ_1, Ω) является с. с. п. функции $f(z_1, z_2)$ и наше предположение относительно (ρ_1, ρ_2) в начале доказательства, получаем неравенство $\rho_2 \leqslant \Omega$ Следовательно,

$$\varlimsup_{R\to\infty} \omega(r_1, r_2) = \rho_2. \tag{1.16}$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$\ln M(r_1, r_2) = r_1^{\rho_1(R_1)} + r_2^{\omega(r_1, r_2)} \text{ при } \omega(r_1, r_2) > 0, \tag{1.17}$$

$$\ln M(r_1, r_2) \leqslant r_1^{\rho_1(R_1)} + 1 \text{ при } \omega(r_1, r_2) = 0, \tag{1.18}$$

$$\ln M(r_1, r_2) \leqslant r_1^{\rho_1(R_1)} \text{ при } 0 \leqslant r_2 \leqslant 1. \tag{1.19}$$

Так как функция $f(z_1, z_2)$ зависит от z_2, то существует последовательность $\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\}$ $(R^{(k)} \to \infty)$, на которой $\omega(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}) > 0$ и выполняется равенство (1.17).

Рассмотрим два случая:

A) существует последовательность $\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\}$ $(R^{(k)} \to \infty)$, на которой $\omega(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}) > \rho_2$;

B) при всех $R > R' = \text{const}$ имеет место неравенство $\omega(r_1, r_2) \leqslant \rho_2$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим через $\mu(R_2) = \max\limits_{\alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 \geqslant R_2} \omega(r_1, r_2)$. Вследствие непрерывности $\omega(r_1, r_2)$, условия A) и равенства (1.16) такая функция существует, она непрерывна, невозрастающая и $\mu(R_2) \to \rho_2$, когда $R_2 \to \infty$. Пусть $R_2^{(1)}$ $(R_2^{(1)} > R_2^{(0)})$ – значение R_2, при котором $\ln\ln R_2^{(1)} \geqslant 1$ и $\mu(R_2^{(1)}) = \omega(r_1^{(1)}, r_2^{(1)})$; u_1 $(u_1 > R_2^{(1)} + 1)$ – наименьшее целое число, для которого $\mu(u_1) < \mu(R_2^{(1)})$. Положим $\rho_2(R_2) = \mu(R_2^{(1)})$ при $R_2^{(0)} \leqslant R_2 \leqslant u_1$. Определим число v_1 $(v_1 > u_1)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\rho_2(R_2) = \rho_2(u_1) - \ln\ln\ln R_2 + \ln\ln\ln u_1 \quad \text{при } u_1 \leqslant R_2 \leqslant v_1,$$

$$\rho_2(R_2) = \mu(R_2) \quad \text{при } R_2 = v_1,$$

$$\rho_2(R_2) > \mu(R_2) \quad \text{при } u_1 \leqslant R_2.$$

---

*) Обозначаем $\ln^+ x = \ln x$ при $x \geqslant 1$ и $\ln^+ x = 0$ при $x \leqslant 1$.

Пусть $R_2^{(2)} \geqslant v_1$ – наименьшее значение R_2, для которого $\mu(R_2^{(2)}) = \omega(r_1, r_2)$. Если $R_2^{(2)} > v_1$, то положим $\rho_2(R_2) = \mu(R_2) = \rho_2(v_1)$, когда $v_1 \leqslant R_2 \leqslant R_2^{(2)}$. Отправляясь от $R_2^{(2)}$, как и от $R_2^{(1)}$, повторим этот процесс. Бесконечным повторением указанного процесса построим функцию $\rho_2(R_2)$. При

$u_i \leqslant R_2 \leqslant v_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ имеем

$$\rho_2(R_2) = \rho_2(u_1) - \ln\ln\ln R_2 + \ln\ln\ln v_i, \tag{1.20}$$

а на каждом дополнительном интервале функция $\rho_2(R_2)$ равна постоянной. Очевидно, в силу (1.16) и (1.20), функция $\rho_2(R_2)$ удовлетворяет условиям (1.6) и (1.7) и обладает требуемым свойством гладкости. На отрезках $0 \leqslant R_i < R_i^{(0)}$ функции $\rho_i(R_i)$ можно выбрать тождественно равными постоянным, положив $\rho_i(R_i) = \rho_i(R_i^{(0)})$, $0 \leqslant R_i < R_i^{(0)}$, $i=1, 2$.

Из неравенств (1.17), (1.18) и (1.19) следует, что построенные функции $\rho_1(R_1)$ и $\rho_2(R_2)$ удовлетворяют условиям 4) и 5) теоремы 1.

В случае В) имеем:

1) либо $\omega(r_1, r_2) = \rho_2$, по крайней мере, на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\}$ $(R^{(k)} \to \infty)$;

2) либо $\omega(r_1, r_2) < \rho_2$ при всех $R_2 > \bar{R}_2 = \text{const}$ (считаем, что $\ln\ln \bar{R}_2 \geqslant 1$).

В первом случае для доказательства теоремы достаточно положить $\rho_2(R_2) \equiv \rho_2$.

Рассмотрим второй случай. Обозначим

$$\nu(R_2) = \max_{\bar{R}_2 \leqslant \alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 \leqslant R_2} \omega(r_1, r_2).$$

Очевидно, $\nu(R_2)$ – неубывающая и непрерывная функция. Выберем достаточно большое $R_2^{(1)} > \bar{R}_2$ и положим

$$\rho_2(R_2^{(1)}) = \rho_2,$$

$$\rho_2(R_2) = \rho_2 + \ln\ln\ln R_2 - \ln\ln\ln R_2^{(1)} \text{ при } s_1 \leqslant R_2 \leqslant R_2^{(1)},$$

где $s_1 < R_2^{(1)}$ такое число, что $\nu(s_1) = \rho_2(s_1)$, но $\nu(R_2) < \rho_2(R_2)$ при $s_1 < R_2 \leqslant R_2^{(1)}$.

Если $\nu(R_2) > \omega(r_1, r_2)$ при $R_2 = s_1$, то положим $\rho_2(R_2) = \nu(R_2)$, когда $t_1 \leqslant R_2 \leqslant s_1$, где $t_1 < s_1$ – ближайшая слева точка, в которой $\nu(t_1) = \omega(r_1^{(1)}, r_2^{(1)})$ $(\alpha_2 r_1^{(1)} + \beta_2 r_2^{(1)} = t_1)$. Функция $\rho_2(R_2)$ постоянна вместе с $\nu(R_2)$ на отрезке $t_1 \leqslant R_2 \leqslant s_1$. При $0 \leqslant R_2 < t_1$ положим $\rho_2(R_2) = \rho_2(t_1)$.

Если же $\nu(s_1) = \max\limits_{\alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 = s_1} \omega(r_1, r_2)$, то положим $t_1 = s_1$.

Пусть теперь $R_2^{(2)} (> R_2^{(1)})$ – достаточно большое число, величина которого будет уточнена ниже. Положим

$$\rho_2(R_2^{(2)}) = \rho_2,$$

$\rho_2(R_2) = \rho_2 + \ln\ln\ln R_2 - \ln\ln\ln R_2^{(2)}$ при $s_2 \leqslant R_2 \leqslant R_2^{(2)}$, где $s_2 < R_2$ – наибольшее число, для которого $\rho_2(s_2) = \nu(s_2)$. Если $\nu(s_2) > \omega(r_1, r_2)$ $(\alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 = s_2)$, то положим $\rho_2(R_2) = \nu(R_2)$, когда $t_2 \leqslant R_2 \leqslant s_2$, где $t_2 < s_2$ – ближайшая слева точка, в которой $\nu(t_2) = \omega(r_1^{(2)}, r_2^{(2)})$ $(\alpha_2 r_1^{(2)} + \beta_2 r_2^{(2)} = t_2)$. Если же $\nu(s_2) = \max\limits_{\alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 = s_2} \omega(r_1, r_2)$, то положим $t_2 = s_2$. При $R_2 < t_2$ функцию $\rho_2(R_2)$ определим следующим образом: $\rho_2(R_2) = \rho_2(t_2) + \ln\ln\ln t_2 - \ln\ln\ln R_2$ при $p_1 \leqslant R_2 \leqslant t_2$, где $p_1 < t_2$ – точка пересечения прямой $y = \rho_2$ с кривой $y = \rho_2(t_2) + \ln\ln\ln t_2 - \ln\ln\ln R_2$. При $R_2^{(1)} \leqslant R_2 \leqslant p_1$ положим $\rho_2(R_2) = \rho_2$. Очевидно, всегда можно выбрать $R_2^{(2)}$

настолько большим, чтобы $R_2^{(i)} \leqslant p_1$. Повторяя указанный процесс бесконечное число раз, мы построим искомую функцию $\rho_2(R_2)$. Она удовлетворяет требуемым свойствам гладкости, а также условиям (1.6) и (1.7). Из построения следуют неравенства $\rho_2 \geqslant \rho_2(R_2) \geqslant \nu(R_2) \geqslant \omega(r_1, r_2)$, причем на последовательности точек $t_1, t_2,$ имеют место равенства $\rho_2(t_i) = \omega(r_1^{(i)}, r_2^{(i)})$ $(\alpha_2 r_1^{(i)} + \beta_2 r_2^{(i)} \to \infty)$. Следовательно, в силу соотношений (1.17) и (1.18) выполняются также условия 4) и 5) теоремы 1.

Теорема доказана.

Приведем пример, который показывает, что при $\alpha_2 > 0$ в теореме 1 существенно условие, согласно которому для функции $f(z_1, z_2) = f(z_2)$ система чисел (ρ_1, ρ_2') с $\rho_2' < \rho_2$, не является с. с. п. Прежде всего укажем, что если (ρ_1, ρ_2) является с. с. п. для функции $f(z_2)$, то $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = \rho$, где ρ — порядок функции $f(z_2)$ одной переменной z_2. Следовательно, сели (ρ_1, ρ_2') с $\rho_2' < \rho_2$ также является с. с. п. для $f(z_1, z_2)$, то $\rho_1 = 0$. Рассмотрим функцию $f(z_2) = \frac{1}{3} e^z$ и с. с. п. $(0, \rho_2)$, где $\rho_2 > 1$ (очевидно, такая система является с. с. п. для $f(z_2)$). Легко показать, что при данной с. с. п. $(0, \rho_2)$ не существует с. с. у. п. функции $f(z_2)$, удовлетворяющая условиям (1.9) и (1.10). Действительно, для $f(z_2)$ имеем оценку $\ln M(r_1, r_2) = r_2 - \ln 3 < r_2^{\rho_2 - \varepsilon}$, $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $\rho_2 - \varepsilon > 1$.

Но так как $\rho_2(R_2) \to \rho_2$, когда $R_2 \to \infty$ (или же $R \to \infty$, так как $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$) то при $R > R_0$ имеет место неравенство $\rho_2(R_2) > \rho_2 - \varepsilon$ и, следовательно, равенства (1.10) не имеют места при $R > R_0$.

Но с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ $\left(\text{удовлетворяющая только условиям 1)}-3\right.$ определения 1 и равенству (1.8)$\left.\right)$ существует и в том случае, когда $f(z_1, z_2) = f(z_2)$ и $\rho_2(R_2) \to \rho_2 > \rho$, где ρ — порядок функции $f(z_2)$. Действительно, в этом случае достаточно положить $\rho_1(R_1) \equiv 0$, а в качестве $\rho_2(R_2)$ выбрать произвольную дифференцируемую функцию, удовлетворяющую условиям (1.6) и (1.7). Аналогичное утверждение верно относительно функций $f(z_1, z_2) = f(z_1)$.

Замечание. Легко видеть, что построенные в тоереме 1 функции $\rho_i(R_i)$ удовлетворяют не только условию (1.7), но также условиям

$$\lim_{R_i \to \infty} \frac{\rho_i'(R_i)}{\rho_i(R_i)} R_i \ln R_i = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{1.21}$$

$$\lim_{R_i \to \infty} \rho''(R_i) R_i^2 \ln R_i = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1.22}$$

В случае $\lim\limits_{R_i \to \infty} \rho_i(R_i) = \rho_i > 0$ равенства (1.7) и (1.21) эквивалентны.

Положительную непрерывную функцию $L(r_1, r_2)$ будем называть медленно растущей, если

$$\lim_{r_1 r_2 \to \infty} \frac{L(r_1, r_2)}{L(k_1 r_1, k_2 r_2)} = 1$$

равномерно в любом прямоугольнике $\{0 < a \leqslant k_1 \leqslant b < \infty,\ 0 < c \leqslant k_2 \leqslant d < \infty\}$. Справедлива следующая

Лемма 1 (ср. [3], стр. 48). *При любой с. с. у. п.* $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ *функция* $L(r_1, r_2) = r_1^{\rho_1(R_1) - \rho_1} + r_2^{\rho_2(R_2) - \rho_2}$ *является медленно растущей функцией.*

Доказательство. Положим

$$L_i(r_1, r_2) = r_i^{\rho_i(R_i)-\rho_i}, \qquad i=1, 2. \tag{1.23}$$

Тогда

$$\ln\frac{L_1(k_1 r_1, k_2 r_2)}{L_1(r_1, r_2)} = [\rho_1(\alpha_1 k_1 r_1 + \beta_1 k_2 r_2) - \rho_1]\ln k_1 +$$
$$+ [\rho_1(\alpha_1 k_1 r_1 + \beta_1 k_2 r_2) - \rho_1(\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2)]\ln r_1. \tag{1.24}$$

Используя теорему Лагранжа, легко получить оценку

$$|\rho_1(\alpha_1 k_1 r_1 + \beta_1 k_2 r_2) - \rho_1(\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2)| \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha_1 |k_1 - 1| r_1 + \beta_1 |k_2 - 1| r_2)\, |\rho_1'(\tilde{r}_1)|, \tag{1.25}$$

где $\tilde{r}_1$ лежит между $\alpha_1 k_1 r_1 + \beta_1 k_2 r_2$ и $\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2$.

В силу положительности чисел α_1, k_1 и k_2 имеют место неравенства

$$c_1 < \frac{\alpha_1 k_1 r_1 + \beta_1 k_2 r_2}{\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2} < c_2, \quad \frac{\alpha_1 |k_1 - 1| r_1 + \beta_1 |k_2 - 1| r_2}{\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2} < c_3,$$

где $c_i > 0$ $(i=1, 2, 3)$ — постоянные, не зависящие от r_1, r_2, k_1 и k_2, когда k_1 и k_2 удовлетворяют неравенствам $0 < a \leqslant k_1 \leqslant b < \infty$, $0 < c \leqslant k_2 \leqslant d < \infty$. Учитывая, это, из (1.25) и (1.24) получим

$$\left|\ln\frac{L_1(k_1 r_1, k_2 r_2)}{L_1(r_1, r_2)}\right| \leqslant |\rho_1(\alpha_1 k_1 r_1 + \beta_1 k_2 r_2) - \rho_1|\,|\ln k_1| +$$
$$+ c_3 |\rho_1'(\tilde{r}_1)|\,(\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2)\,|\ln r_1|. \tag{1.26}$$

В силу соотношений (1.6) и (1.7) заключаем, что правая часть (1.26) стремится к нулю, когда $R_1 \to \infty$. Поэтому при $i=1$ имеем

$$\lim_{R_i\to\infty}\frac{L_i(k_1 r_1, k_2 r_2)}{L_i(r_1, r_2)} = 1. \tag{1.27}$$

Точно так же доказывается равенство (1.27) при $i=2$. Из равенств (1.27) при $i=1, 2$ немедленно следует утверждение леммы 1.

Замечание. Мы фактически доказали, что функции $L_i(r_1, r_2)$, $i=1, 2$, определенные равенствами (1.23), также являются медленно растущими.

Из этого утверждения непосредственно следует

Теорема 2. *С. с. у. п.*

$$\Big(\rho_1(R_1),\ \rho_2(R_2)\Big) = \Big(\rho_1(\alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2),\ \rho_2(\alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2)\Big)$$

$$\Big(\rho_1(\bar{R}_1),\ \rho_2(\bar{R}_2)\Big) = \Big(\rho_1(\bar{\alpha}_1 r_1 + \bar{\beta}_1 r_2),\ \rho_2(\bar{\alpha}_2 r_1 + \bar{\beta}_2 r_2)\Big),$$

где β_1 (α_2), равно нулю тогда и только тогда, когда $\bar{\beta}_1=0$ $(\bar{\alpha}_2=0)$, являются одновременно с. с. у. п. целой функции $f(z_1, z_2)$ с одной и той же с. с. т. (σ_1, σ_2), или же не являются с. с. у. п. функции $f(z_1, z_2)$.

Установим еще одно простое свойство с. с. у. п.

Пусть $\Big(\rho_1(R_1),\ \rho_2(R_2)\Big)$ — с. с. у. п. целой функции $f(z_1, z_2)$. Если $f(z_1, z_2)$ зависит от переменной z_i, то существует такое большое значение R_i^0, что при $R_i > R_i^0$ выполняется неравенство $\rho_i(R_i) > 0$ $(i=1, 2)$.

Если $\lim \rho_i(R_i) = \rho_i > 0$, то утверждение очевидно, причем без ограничения на $f(z_1, z_2)$. Пусть теперь для определенности $\rho_1 = 0$ и $f(z_1, z_2)$ зависит от z_1. Тогда при некотором фиксированном $r_2=r_2^0>0$ имеет место $M(r_1, r_2^0)\to\infty$, когда $r_1\to\infty$. Допустив теперь, что наше утверждение неверно, найдем последовательность $\{R_1^{(k)}=\alpha_1 r_1^{(k)}+\beta_1 r_2^0\}$ $(R_1^{(k)}\to\infty)$, на которой $\rho_1(R_1^{(k)})=0$. На этой последовательности имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{M(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})}{\sigma_1(r_1^{(k)})^{\rho_1(R_1^{(k)})}+\sigma_2(r_2^0)^{\rho_2(R_2^{(k)})}}=\infty\,(R_2^{(k)}=\alpha_2 r_1^{(k)}+\beta_2 r_2^0),$$

что противоречит условию (1.8). Наше утверждение остается в силе, независимо от того, зависит ли функция $f(z_1, z_2)$ от обеих переменных или нет, если $\rho_i(R_i)\to 0$, $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $i=1, 2$ (напомним, что случай $f(z_1, z_2)=\mathrm{const}$ не рассматривается). Доказательство аналогично предыдущему. Однако, если функция $f(z_1, z_2)$ зависит только от одной переменной и в с. с. у. п. одна из функций $\rho_i(R_i)$, $i=1, 2$, стремится к положительному пределу, то другая может равняться тождественно нулю. Например, функция $f(z_1, z_2)=f(z_1)=e^{z_1}$ имеет с. с. у. п. (1, 0).

§ 2. О системах сопряженных типов

В теории целых функций одной комплексной переменной имеется много работ, где устанавливается связь между уточненным порядком и типом целой функции и ее коэффициентами Тейлора. Среди этих работ надо упомянуть работы Г. Валирона [12], А. Аспейтия [30], Г. А. Фридмана [13] и др. Основное соотношение между порядком, типом и коэффициентами Тейлора — формула Адамара — было перенесено на целые функции многих переменных (см. по этому поводу [2]). Для с. с. т. при с. с. п. эта формула была выведена Л. И. Ронкиным [2]. Л. И. Ронкин [6] установил также характеристическое свойство с. с. т. при с. с. п. Для с. с. т. при с. с. у. п. целой функции двух переменных имеют место аналогичные утверждения, доказательству которых мы посвящаем этот параграф.

Пусть целая функция, представленная в виде ряда

$$f(z_1, z_2)=\sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} c_{k_1, k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{2.1}$$

имеет с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$, причем $\lim\limits_{R_i\to\infty}\rho_i(R_i)=\rho_i>0$, $i=1, 2$. Будем пользоваться обозначениями предыдущего параграфа. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} t_1=r_1^{\rho_1(R_1)}, \\ t_2=r_2^{\rho_2(R_2)} \end{cases} \tag{2.2}$$

и покажем, что при $R_i>R_i^0$, где R_l^0, $l=1, 2$, достаточно большое, существует однозначное, непрерывное, кусочно дифференцируемое, неотрицательное решение этой системы

$$\begin{cases} r_1=\varphi_1(t_1, t_2), \\ r_2=\varphi_2(t_1, t_2). \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим два случая: 1) $\beta_1=\alpha_2=0$, т. е. $R_1=\alpha_1 r_1$, $R_2=\beta_2 r_2$ и 2) одно из чисел β_1, α_2 отлично от нуля.

В первом случае

$$\frac{dt_i}{dr_i}=r_i^{\rho_i(R_i)-1}\ [\rho_i(R_i)+R_i\rho_i'(R_i)\ln r_i]>0,$$

как только $R_i>R_i^0$, следовательно, $t_i=t_i(r_i)$ монотонная функция и имеет обратную функцию $r_i=\varphi_i(t_i)$ $(i=1,\ 2)$. При

$$0\leqslant t_i\leqslant (r_i^0)^{\rho_i(R_i^0)}=s_i,\quad r_1^0=\frac{R_1^0}{\alpha_1},\quad r_2^0=\frac{R_2^0}{\beta_2},$$

доопределим функции $\varphi_i(t_i)$, положив равными

$$\varphi_i(t_i)=\lim_{t_i\to s_i+}\varphi_i(t_i),\qquad i=1,\ 2.$$

Пусть теперь $\beta_1+\alpha_2>0$; предположим для определенности, что $\beta_1>0$. Тогда

$$r_2=\frac{1}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 r_1),\quad R_2=\alpha_2 r_1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\ (R_2-\alpha_1 r_1)$$

и систему (2.2) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} t_1=r_1^{\rho_1(R_1)}, \\ t_2=\left[\frac{1}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 r_1)\right]^{\rho_2\left(\alpha_2 r_1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 r_1\right.} \end{cases}\tag{2.4}$$

Из первого уравнения системы (2.4) получаем $r_1=t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}$, следовательно второе уравнение можно переписать в виде

$$t_2=\left[\frac{1}{\beta_1}\left(R_1-\alpha_1 t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}\right)\right]^{\rho_2\left(\alpha_2 t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}+\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(R_1-\alpha_1 t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}\right)\right)}\tag{2.5}$$

Докажем, что уравнение (2.5) имеет единственное решение относительно R_1 при $R_1>R_1^0$, где R_1^0 достаточно большое. Для этого покажем, что при фиксированном t_1, таком, что $\alpha_1 t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}<R_1$, функция $t_2=t_2\ (R_1,\ t_1)$ строго монотонно возрастает. Действительно, обозначив $h=h(R_1)=t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}$, из (2.5) получим

$$\frac{dt_2}{dR_1}=\Omega\left[\frac{1}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 h)\right]^{\rho_2\left(\alpha_2 h+\frac{\beta_2}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 h)\right)}$$

где

$$\Omega=\left\{\rho_2'\left(\alpha_2 h+\frac{\beta_2}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 h)\right)\left[-\alpha_2 h\frac{\rho_1'(R_1)}{\rho_1(R_1)}\ \ln t_1+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(1+\alpha_1 h\frac{\rho_1'(R_1)}{\rho_1^2(R_1)}\ \ln t_1\right)\right]\ln\frac{R_1-\alpha_1 h}{\beta_1}+$$
$$\left.+\rho_2\left(\alpha_2 h+\frac{\beta_2}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 h)\right)(R_1-\alpha_1 h)^{-1}\left(1+\alpha_1 h\ \frac{\rho_1'(R_1)}{\rho_1(R_1)}\ \ln t_1\right)\right\}=$$
$$=\rho_2(\Theta)\,(R_1-\alpha_1 h)^{-1}\left\{1+\alpha_1 h\frac{\rho_1'(R_1)}{\rho_1(R_1)}\ \ln h+\left[\frac{\beta_2}{\beta_1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\rho_1'(R_1)}{\rho_1(R_1)}\ h\left(\frac{\beta_2\alpha_1}{\beta_1}-\alpha_2\right)\ln h\right](R_1-\alpha_1 h)\ \frac{\rho_2'(\Theta)}{\rho_2(\Theta)}\ \ln\ \frac{R_1-\alpha_1 h}{\beta_1}\right\},$$

где $\Theta=\alpha_2 h+\frac{\beta_2}{\beta_1}\ (R_1-\alpha_1 h)$. Так как $x\ln x\to 0$, когда $x\to 0+$ и $\alpha_1 h<R_1$, то в силу (1.21) последнее выражение в фигурных скобках стремится к единице, когда $R_1\to\infty$. Учитывая это, из последних равенств легко получить нера-

венство $\frac{dt_2}{dR_1}>0$, как только $R_1>R_1^0$. Следовательно, $t_2=t_2(R_1, t_1)$ монотонная функция R_1 и имеет обратную функцию $R_1=\psi(t_1, t_2)$. Поэтому

$$r_1=t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}=t_1^{\frac{1}{\rho_1(\Psi(t_1,\ t_2))}}=\varphi_1(t_1,\ t_2),$$

$$r_2=\frac{1}{\beta_1}(R_1-\alpha_1 r_1)=\frac{1}{\beta_1}\Big(\Psi(t_1,\ t_2)-\alpha_1\varphi_1(t_1,\ t_2)\Big)=\varphi_2(t_1,\ t_2).$$

Заметим, что мы полагали $\alpha_1 t_1^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}<R_1$, что эквивалентно условию $r_2>0\,(R_1>R_1^0)$. Когда $r_2=0$, то и $t_2=0$, причем $t_2\to 0$, когда $r_2\to 0$. Следовательно, можем положить $\varphi_2(t_1, 0)=0$ и $\varphi_1(t_1, 0)=\lim\limits_{t_2\to 0}\varphi_1(t_1,\ t_2)$ является обратной функцией к $t_1=r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)}$. Тем самым однозначная разрешимость системы (2.2) при достаточно больших R_i доказана. Отметим также, что $\varphi_i(t_1, t_2)>0$, если $t_i>0$ $(i=1,\ 2)$.

Заметим, что во втором случае, т. е. когда $\beta_1>0$, решение (2.3) существует, как только $R_1>R_1^0$, что эквивалентно неравенству $R>R_0$, где R_0 достаточно большое. Таким образом, мы определили функции $\varphi_i(t_1, t_2)$, $i=1,\ 2$, во всех точках первой четверть-плоскости переменных t_1, t_2 вне некоторой конечной замкнутой области $\bar{D}$. Доопределим функции $\varphi_i(t_1, t_2)$, $i=1,\ 2$, в точках области $\bar{D}$ произвольным образом, так, чтобы в целом они были положительными (при $t_i>0$), непрерывными и кусочно дифференцируемыми функциями. Непрерывность и кусочная дифференцируемость этих функций вне $\bar{D}$ следует из того, что они являются решением системы (2.2), в которой правые части обладают этими свойствами.

Установим теперь связь между (с. с. т.) $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ при с. у. п. $\big(\rho_1(R_1),\ \rho_2(R_2)\big)$ и коэфициентами разложения (2.1).

Теорема 3. *Чтобы положительные числа σ_1, σ_2 составляли с. с. т. при с. с. у. п. $\big(\rho_1(R_1),\ \rho_2(R_2)\big)$ $\big(\lim\rho_i(R_i)=\rho_i>0, i=1,\ 2\big)$ функции $f(z_1, z_2)$ представленной в виде ряда* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\sqrt[k_1+k_2]{|c_{k_1k_2}|\,\varphi_1^{k_1}(k_1,\ k_2)\,\varphi_2^{k_2}(k_1,\ k_2)\left(\frac{1}{e\sigma_1\rho_1}\right)^{\frac{k_1}{\rho_1}}\left(\frac{1}{e\sigma_2\rho_2}\right)^{\frac{k_2}{\rho_2}}}=1. \qquad (2.6)$$

Здесь $\varphi_i(t_1, t_2)$ $(i=1,\ 2)$, — решение системы (2.2), $0^0=1$.

Равенство (2.6) является обобщением известного соотношения для целой функции одной переменной при данном уточненном порядке (см. § 13 из [3]), а при $\rho_i(R_i)\equiv\rho_i$, $i=1,\ 2$, оно совпадает с равенством (5.52) из [2].

Доказательство. Прежде всего докажем, что

$$\lim_{t_i\to\infty}\frac{\varphi_i(\lambda_1 t_1,\ \lambda_2 t_2)}{\varphi_i(t_1,\ t_2)}=\lambda_i^{\frac{1}{\rho_i}},\quad \lambda_i>0,\ t_i>c=\mathrm{const},\qquad i=1,\ 2. \qquad (2.7)$$

Действительно, из (2.2) при $t_i > c$ получим $\ln t_i = \rho_i(R_i)\ln r_i$, следовательно,

$$\ln\frac{\varphi_1(\lambda_1 t_1,\ \lambda_2 t_2)}{\varphi_1(t_1,\ t_2)} = \int\limits_{(t_1,\ t_2)}^{(\lambda_1 t_1,\ \lambda_2 t_2)} d\ln\varphi_1(t_1,\ t_2) =$$

$$= \int\limits_{(t_1,\ t_2)}^{(\lambda_1 t_1,\ \lambda_2 t_2)} \left[\frac{\partial}{\partial\ln t_1}\ln\varphi_1(t_1,\ t_2)\,d\ln t_1 + \frac{\partial}{\partial\ln t_2}\ln\varphi_1(t_1,\ t_2)\,d\ln t_2\right] =$$

$$= \int\limits_{(t_1,\ t_2)}^{(\lambda_1 t_1,\ \lambda_2 t_2)} \frac{1}{I}\,\{[\rho_2(R_2)+\beta_2 r_2\rho_2'(R_2)\ln r_2]\,d\ln t_1 -$$

$$-\beta_1 r_2\rho_1'(R_1)\ln r_1\,d\ln t_2\}, \tag{2.8}$$

где

$$I = \rho_1(R_1)\rho_2(R_2) + \rho_1(R_1)\beta_2 r_2\rho_2'(R_2)\ln r_2 +$$

$$+\alpha_1\rho_2(R_2)r_1\rho_1'(R_1)\ln r_1 + (\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\,r_1 r_2\rho_1'(R_1)\,\rho_2'(R_2)\ln r_1\ln r_2,$$

$$r_i = \varphi_i(t_1,\ t_2),\quad R_i = \alpha_i\varphi_1(t_1,\ t_2) + \beta_i\varphi_2(t_1,\ t_2),\qquad i=1,\ 2.$$

Чтобы получить равенство (2.7) при $i=1$, используем соотношения (t_1 и r_1 стремятся одновременно к бесконечности):

$$\lim_{r_1\to\infty}\frac{\rho_2(R_2)+\beta_2 r_2\rho_2'(R_2)\ln r_2}{I} = \frac{1}{\rho_1},$$

$$\lim_{r_1\to\infty}\frac{\beta_1 r_2\rho_1'(R_1)\ln r_1}{I} = 0$$

и оценим в первой части (2.8) интеграл по прямолинейным отрезкам, соединяющим точки $(t_1,\ t_2)$ с $(\lambda_1 t_1,\ t_2)$ и $(\lambda_1 t_1,\ t_2)$ с $(\lambda_1 t_1,\ \lambda_2 t_2)$. Точно так же доказывается равенство (2.7) при $i=2$.

Пусть теперь $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ — с. с. т. при с. с. у. п. $\big(\rho_1(R_1),\ \rho_2(R_2)\big)$ и $\sigma_1' > \sigma_1$, $\sigma_2' > \sigma_2$. Тогда в силу неравенства Коши из равенства (1.8) при $R_i \geqslant R_i^0$, $i=1,\ 2$, находим

$$\ln|c_{k_1 k_2}| < \sigma_1' r_1^{\rho_1(R_1)} + \sigma_2' r_2^{\rho_2(R_2)} - k_1\ln r_1 - k_2\ln r_2 \tag{2.9}$$

($k_1 \geqslant c$, $k_2 \geqslant c$, если $\beta_1=\alpha_2=0$ и $k_1+k_2>c$, если $\beta_1+\alpha_2>0$).

Положив r_1 и r_2 равными решению системы уравнений $\big($при этом c выбирается настолько большим, чтобы мы могли воспользоваться формулой (2.3)$\big)$:

$$\begin{cases} k_1 = \sigma_1'\rho_1 r_1^{\rho_1(R_1)},\\ k_2 = \sigma_2'\rho_2 r_2^{\rho_2(R_2)}, \end{cases}$$

из (2.9) получим

$$\ln|c_{k_1 k_2}| < \frac{k_1}{\rho_1} + \frac{k_2}{\rho_2} - k_1\ln\varphi_1\left(\frac{k_1}{\rho_1\sigma_1'},\ \frac{k_2}{\rho_2\sigma_2'}\right) - k_2\ln\varphi_2,$$

откуда

$$\ln[\varphi_1^{k_1}(k_1,\ k_2)\,\varphi_2^{k_2}(k_1,\ k_2)\,|c_{k_1 k_2}|] < \frac{k_1}{\rho_1} + \frac{k_2}{\rho_2} +$$

$$+k_1\ln\frac{\varphi_1(k_1,\ k_2)}{\varphi_1\left(\dfrac{k_1}{\rho_1\sigma_1'},\ \dfrac{k_2}{\rho_2\sigma_2'}\right)} + k_2\ln\frac{\varphi_2(k_1,\ k_2)}{\varphi_2\left(\dfrac{k_1}{\rho_1\sigma_1'},\ \dfrac{k_2}{\rho_2\sigma_2'}\right)}.$$

Разделив последнее неравенство на k_1+k_2 и переходя к пределу при $k_1+k_2\to\infty$, в силу соотношений (2.7) получаем неравенство

$$\overline{\lim_{k_1+k_2\to\infty}} \sqrt[k_1+k_2]{\varphi_1^{k_1}(k_1,\ k_2)\,\varphi_2^{k_2}(k_1,\ k_2)\,|c_{k_1 k_2}|\,(e\rho_1\sigma_1')^{-\frac{k_1}{\rho_1}}(e\rho_2\sigma_2')^{-\frac{k_2}{\rho_2}}} \leqslant 1. \quad (2.10)$$

Если $\alpha_2+\beta_1>0$, то условие $k_1+k_2>c$ не ограничивает применимости формулы (2.10). Если же $R_1=\alpha_1 r_1$, $R_2=\beta_2 r_2$, то формулу (2.10) можно пока считать доказанной, если $k_1+k_2\to\infty$ так, что $k_1\geqslant c$ и $k_2\geqslant c$. Пусть теперь $k_2<c$ фиксировано, а $k_1\to\infty$, $k_1\geqslant c$. Тогда из (2.9) получаем

$$\ln|c_{k_1 k_2}|<\frac{k_1}{\rho_1}-k_1\ln\varphi_1\left(\frac{k_1}{\rho_1\sigma_1'}\right)+O(1);$$

здесь мы учли, что в рассматриваемом случае $\varphi_j=\varphi_j(t_j)$. Повторяя прежние рассуждения, мы доказываем неравенство (2.10), где вместо $k_1+k_2\to\infty$ стоит $k_1\to\infty$. Так как имеется конечное число k_2 таких, что $k_2<c$, то неравенство (2.10) доказано теперь при единственном условии, что $k_1\geqslant c$. В силу равноправия индексов k_1 и k_2 это последнее ограничение также может быть отброшено.

Так как числа σ_i' $(\sigma_i'>\sigma_i)$ — произвольные, мы можем положить в неравенстве (2.10) $\sigma_i'=\sigma_i$, $i=1,\ 2$. После этого покажем, что в (2.10) имеет место равенство. Для этого допустим противное, т. е.

$$\overline{\lim_{k_1+k_2\to\infty}} \sqrt[k_1+k_2]{|c_{k_1 k_2}|\,\varphi_1^{k_1}(k_1,\ k_2)\,\varphi_2^{k_2}(k_1,\ k_2)\,(e\sigma_1\rho_1)^{-\frac{k_1}{\rho_1}}(e\sigma_2\rho_2)^{-\frac{k_2}{\rho_2}}}<1.$$

Тогда при некоторых $0<\bar\sigma_1<\sigma_1$, $0<\bar\sigma_2<\sigma_2$ и достаточно больших k_1+k_2 можем записать

$$|c_{k_1 k_2}|\,\varphi_1^{k_1}(k_1,\ k_2)\,\varphi_2^{k_2}(k_1, k_2)<(e\bar\sigma_1\rho_1)^{\frac{k_1}{\rho_1}}(e\bar\sigma_2\rho_2)^{\frac{k_2}{\rho_2}}$$

В силу равенства (2.7) отсюда получаем неравенство

$$|c_{k_1 k_2}|\,r_1^{k_1}r_2^{k_2}<\frac{c\exp\left[(1+\varepsilon)\left(\frac{k_1}{\rho_1}+\frac{k_2}{\rho_2}\right)\right]r_1^{k_1}r_2^{k_2}}{\varphi_1^{k_1}\left(\frac{k_1}{\bar\sigma_1\rho_1},\ \frac{k_2}{\bar\sigma_2\rho_2}\right)\varphi_2^{k_2}\left(\frac{k_1}{\bar\sigma_1\rho_1},\ \frac{k_2}{\bar\sigma_2\rho_2}\right)},\quad \varepsilon>0, \quad (2.11)$$

справедливое при всех $k_1+k_2\geqslant K=\text{const}$, где c — некоторая постоянная, не зависящая от r_1, r_2 и k_1, k_2. Выберем τ_1, τ_2 так, чтобы $\bar\sigma_i+2\varepsilon<\tau_i<\sigma_i$, $i=1,2$ Тогда при $k_1+k_2>K_2$ неравенство (2.11) можно переписать так:

$$|c_{k_1 k_2}|\,r_1^{k_1}r_2^{k_2}<\frac{\exp\left(\frac{k_1}{\rho_1}+\frac{k_2}{\rho_2}\right)r_1^{k_1}r_2^{k_2}}{\varphi_1^{k_1}\left(\frac{k_1}{\tau_1\rho_1},\ \frac{k_2}{\tau_2\rho_2}\right)\varphi_2^{k_2}\left(\frac{k_1}{\tau_1\rho_1},\ \frac{k_2}{\tau_2\rho_2}\right)}. \quad (2.12)$$

Выберем R_0 настолько большим, чтобы при $R>R_0$ имело место неравенство

$$\tau_1\rho_1 r_1^{\rho_1(R_1)}\exp\left(\frac{\rho_1(R_1)}{\rho_1}-1\right)+\tau_2\rho_2 r_2^{\rho_2(R_2)}\exp\left(\frac{\rho_2(R_2)}{\rho_2}-1\right)\geqslant K_2+2 \quad (2.13)$$

и, кроме того, индексы ν_2 максимального члена

$$\mu(r_1,\ r_2)=\max_{k_1,\ k_2\geqslant 0}|c_{k_1 k_2}|\,r_1^{k_1}r_2^{k_2}=|c_{\nu_1\nu_2}|\,r_1^{\nu_1}r_2^{\nu_2}$$

ряда (2.1) удовлетворяли неравенству $\nu_1+\nu_2\geqslant K_2$. Тогда из (2.12) следует

$$\mu(r_1, r_2)<\frac{\exp\left(\frac{\nu_1}{\rho_1}+\frac{\nu_2}{\rho_2}\right)r_1^{\nu_1}r_2^{\nu_2}}{\varphi_1^{\nu_1}\left(\frac{\nu_1}{\tau_1\rho_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2\rho_2}\right)\varphi_2^{\nu_2}\left(\frac{\nu_1}{\tau_1\rho_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2\rho_2}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant \max_{x, y\geqslant 0}\frac{\exp\left(\frac{x}{\rho_1}+\frac{y}{\rho_2}\right)r_1^x r^y}{\varphi_1^x\left(\frac{x}{\tau_1\rho_1}, \frac{y}{\tau_2\rho_2}\right)\varphi_2^y\left(\frac{x}{\tau_1\rho_1}, \frac{y}{\tau_2\rho_2}\right)}=$$

$$=\max_{x\geqslant 0}\frac{r_1^x\exp\frac{x}{\rho_1}}{\left(\frac{x}{\tau_1\rho_1}\right)^{x/\rho_1(R_1)}}\max_{y\geqslant 0}\frac{r_2^y\exp\left(\frac{y}{\rho_2}\right)}{\left(\frac{y}{\tau_2\rho_2}\right)^{y/\rho_2(R_2)}}=$$

$$=\frac{r_1^{x^*}\exp\frac{x^*}{\rho_1}}{\left(\frac{x^*}{\tau_1\rho_1}\right)^{x^*/\rho_1(R_1)}}\frac{r_2^{y^*}\exp\frac{y^*}{\rho_2}}{\left(\frac{y^*}{\tau_2\rho_2}\right)^{y^*/\rho_2(R_2)}}=\mu^*(r_1, r_2), \tag{2.14}$$

где

$$x^*=\tau_1\rho_1 r_1^{\rho_1(R_1)}\exp\left(\frac{\rho_1(R_1)}{\rho_1}-1\right), \tag{2.15}$$

$$y^*=\tau_2\rho_2 r_2^{\rho_2(R_2)}\exp\left(\frac{\rho_2(R_2)}{\rho_2}-1\right). \tag{2.16}$$

При выводе оценки (2.14) мы воспользовались неравенством (2.12), учитывая при этом то обстоятельство, что в силу неравенства (2.13) имеет место $\nu_1+\nu_2\geqslant K_2$. Легко подсчитать, что

$$\mu^*(r_1, r_2)=\exp\left[\frac{\tau_1\rho_1}{\rho_1(R_1)}e^{\frac{\rho_1(R_1)}{\rho_1}-1}r_1^{\rho_1(R_1)}+\frac{\tau_2\rho_2}{\rho_2(R_2)}e^{\frac{\rho_2(R_2)}{\rho_2}-1}r_2^{\rho_2(R_2)}\right].$$

Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что $\tau_1(1+\varepsilon)<\sigma_1$, $\tau_2(1+\varepsilon)<\sigma_2$. Тогда, очевидно, можно выбрать настолько большое R' ($R'>R_0$), что при условии $R>R'$ выполняется неравенство

$$\mu(r_1, r_2)<\mu^*(r_1, r_2)\leqslant\exp\left[\tau_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)r_1^{\rho_1(R_1)}+\tau_2'\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)r_2^{\rho_2(R_2)}\right]. \tag{2.17}$$

Оценим теперь величину $M(r_1, r_2)$. Для этого положим

$$k_1^*=[2^{\rho_1(R_1)}ex^*],\quad k_2^*=[2^{\rho_2(R_2)}ey^*],$$

где x^* и y^* определены по (2.15) и (2.16). Очевидно, $k_1^*+k_2^*\geqslant K_2$ и можно воспользоваться неравенствами (2.12). При $k_1>k_1^*$ и $k_2>k_2^*$ получим

$$|c_{k_1 k_2}|r_1^{k_1}r_2^{k_2}<\frac{\exp\left(\frac{k_1}{\rho_1}+\frac{k_2}{\rho_2}\right)r_1^{k_1}r_2^{k_2}}{\left(\frac{k_1}{\tau_1\rho_1}\right)^{k_1/\rho_1(R_1)}\left(\frac{k_2}{\tau_2\rho_2}\right)^{k_2/\rho_2(R_2)}}\leqslant\left[e^{\frac{1}{\rho_1}}\left(\frac{\tau_1\rho_1}{k_1^*+1}\right)^{\frac{1}{\rho_1(R_1)}}\right]^{k_1}\times$$

$$\times\left[e^{\frac{1}{\rho_2}}\left(\frac{\tau_2\rho_2}{k_2^*+1}\right)^{\frac{1}{\rho_2(R_2)}}\right]^{k_2}r_1^{k_1}r_2^{k_2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1+k_2}.$$

Следовательно, для $M(r_1, r_2)$ справедлива следующая оценка:

$$M(r_1, r_2) \leqslant \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} |c_{k_1 k_2}| r_1^{k_1} r_2^{k_2} = \left\{ \sum_{k_1=0}^{k_1^*} \sum_{k_2=0}^{k^*} + \sum_{k_1=k_1^*+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_2^*} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=0}^{k_1^*} \sum_{k_2=k_2^*+1}^{\infty} + \sum_{k_1=k_1^*+1}^{\infty} \sum_{k_2=k_2^*+1}^{\infty} \right\} |c_{k_1 k_2}| r_1^{k_1} r_2^{k_2} \leqslant$$

$$\leqslant \mu(r_1, r_2) \left[(k_1^*+1)(k_2^*+1) + k_1^* + k_2^* + 2\right] + 1. \tag{2.18}$$

Поскольку k_1^* и k_2^* растут не быстрее, чем $r_1^{\rho_1+1}$ и соответственно $r_2^{\rho_2+1}$, то из (2.17) и (2.18) при $R \geqslant R^* \geqslant R' > R_0$ получим

$$M(r_1, r_2) < \exp\left[\tau_1(1+\varepsilon) r_1^{\rho_1(R_1)} + \tau_2(1+\varepsilon) r_2^{\rho_2(R_2)}\right].$$

Однако это противоречит тому, что (σ_1, σ_2) является с. с. т. при с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$, так как $\tau_1(1+\varepsilon) < \sigma_1$, $\tau_2(1+\varepsilon) < \sigma_2$. Тем самым теорема 3 доказана.

Следующая теорема является в некотором смысле обратной к теореме 1.

Теорема 4. *Какова бы ни была с. с. у. п.* $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$, *удовлетворяющая условиям* (1.21) *и*

$$\varliminf_{R_i \to \infty} r_i^{\rho_i(R_i)} (\ln r_i)^{-1} > 0, \qquad i = 1, 2, \tag{2.19}$$

существует целая функция $f(z_1, z_2)$, *для которой* $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ *является с. с. у. п.*

Замечание. Если $\rho_1(R_1) = \rho_1(\alpha_1 r_1)$ $\left(\text{если } \rho_2(R_2) = \rho_2(\beta_2 r_2)\right)$, то утверждение теоремы 4 верно и в том случае, когда (2.19) выполняется хотя бы для $i=1$ (хотя бы для $i=2$).

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1) Если $\lim\limits_{R_i \to \infty} \rho_i(R_i) = \rho_i > 0$, $i = 1, 2$, то утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 3.

2) Пусть $\rho_1(R_1) = \rho_1(\alpha_1 r_1) \to 0$, когда $r_1 \to \infty$. Тогда при выполнении условий (1.21) и (2.19) $(i=1)$ можно построить целую функцию $f(z_1)$, для которой $\rho_1(\alpha_1 r_1)$ является уточненным порядком. Действительно, если кроме условия (2.19) справедливо неравенство

$$\varliminf_{r_1 \to \infty} r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)} (\ln r_1)^{-1} < \infty,$$

то в качестве функции $f(z_1)$ можно взять произвольный многочлен положительной степени. Пусть теперь

$$\lim_{r_1 \to \infty} r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)} (\ln r_1)^{-1} = \infty. \tag{2.20}$$

Тогда $\rho_1(\alpha_1 r_1) \ln r_1 \to \infty$ при $r_1 \to \infty$ и, начиная с некоторого значения r_1, функция $\rho_1(\alpha_1 r_1) r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)}$ монотонно возрастает и стремится к бесконечности. Действительно, начиная с некоторого значения $r_1 = r_1^0$ имеет место неравенство

$$\frac{d}{dr_1}\left[\rho_1(\alpha_1 r_1) r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)}\right] = r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)-1} \rho_1^2(\alpha_1 r_1) \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1 \rho_1'(\alpha_1 r_1)}{\rho_1(\alpha_1 r_1)} r_1 \ln r_1 + \frac{\alpha_1 \rho_1'(\alpha_1 r_1) r_1 \ln r_1}{\rho_1(\alpha_1 r_1)} \frac{1}{\rho_1(\alpha_1 r_1) \ln r_1}\right] > 0,$$

так как выражение в квадратных скобках в силу (1.21) стремится к единице. Следовательно, мы можем построить целую функцию $f(z_1)$ нулевого порядка для которой $n(r_1, f)=[\rho_1(\alpha_1 r_1)\, r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)}]$, когда $r_1>r_1^0$, где $n(r_1, f)$ — число нулей функции $f(z_1)$ в круге $|z_1|<r_1$. Для функции $f(z_1)$ справедливо равенство (см. [12], стр. 19)

$$\ln M(r_1, f)=\int_0^{r_1}\frac{n(x)}{x}\,dx+\lambda(r_1)\,r_1\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(x)}{x^2}\,dx, \qquad 0<\lambda(r_1)<1.$$

Отсюда и из соотношений

$$\lim_{r_1\to\infty} r_1^{-\rho_1(\alpha_1 r_1)}\int_0^{r_1} x^{\rho_1(\alpha_1 x)-1}\rho_1(\alpha_1 x)\,dx=1,$$

$$\lim_{r_1\to\infty} r_1^{-\rho_1(\alpha_1 r_1)+1}\int_{r_1}^{\infty}\rho_1(\alpha_1 x)\,x^{\rho_1(\alpha_1 x)-2}\,dx=0$$

следует, что функция $\rho_1(\alpha_1 r_1)$ является уточненным порядком для целой функции $f(z_1)$. Очевидно, с. с. у. п. $\big(\rho_1(\alpha_1 r_1), \rho_2(R_2)\big)$ является с. с. у. п. функции $f(z_1)$, какова бы ни была функция $\rho_2(R_2)$.

3) Пусть $\beta_1>0$, $\rho_1(R_1)\to 0$, когда $R\to\infty$ и начиная с некоторого $r>r_0$ выполняется $\rho_1(r)\leqslant\rho_2(r)$. Очевидно, последнее имеет место, если $\rho_2(R_2)\to\to\rho_2>0$, когда $R_2\to\infty$. Как и в предыдущем случае, построим целую функцию $f(z_1)$ с уточненным порядком $\rho_1(\alpha_1 r_1)$. Тогда с. с. у. п. $\big(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\big)$, удовлетворяющая нашим условиям, будет с. с. у. п. этой функции $f(z_1)$. Действительно, учитывая, что $r_1^{\rho_1(R_1)}$ и $r_2^{\rho_2(R_2)-\rho_2}$ — медленно растущие функции (см. замечание к лемме 1), а также неравенство $\rho_1(r)\leqslant\rho_2(r)$ $(r>r_0)$, легко получить следующие неравенства $(0<c_1<\infty)$:

$$\ln M(r_1, r_2)\leqslant c_1 r_1^{\rho_1(R_1)},\quad r_1\geqslant r_2,\quad r_1>r_1^0,$$

$$\ln M(r_1, r_2)\leqslant c_1 r_2^{\rho_2(R_2)},\quad r_2\geqslant r_1,\quad r_2>r_2^0.$$

С другой стороны,

$$\overline{\lim_{r_1\to\infty}}\frac{\ln M(r_1, 0)}{r_1^{\rho_1(\alpha_1 r_1)}}>c_2.$$

Из этих неравенств вытекает существование конечного верхнего предела

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\ln M(r_1, r_2)}{r_1^{\rho_1(R_1)}+r_2^{\rho_2(R_2)}}=c_3,\quad c_2\leqslant c_3\leqslant c_1,$$

откуда следует наше утверждение.

4) Наконец, рассмотрим случай, когда $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $\lim\limits_{R_i\to\infty}\rho_i(R_i)=0$, $i=1, 2$, причем оба неравенства $\rho_1(r)>\rho_2(r)$ и $\rho_1(r)<\rho_2(r)$ имеют место на неограниченных множествах значений r. В силу теоремы 2 мы можем положить $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=\beta_2=1$, т. е. $R_1=R_2=R$. Построим функцию $\rho(R)$ следующим образом. Пусть $R^{(1)}\geqslant 1$ — наименьшее значение R, при котором $\rho_1(R^{(1)})=\rho_2(R^{(1)})$. На сегменте $[0, R^{(1)}]$ положим $\rho(R)=\rho_1(R^{(1)})$. Обозначим через $\rho_{i_1}(R)$ ту из функций $\rho_1(R)$, $\rho_2(R)$, значение которой в точке $2R^{(1)}$ не больше

значения второй $\Big($в случае равенства за функцию $\rho_{i_1}(R)$ выбираем любую из $\rho_1(R), \rho_2(R)\Big)$. Пусть $R^{(2)}$ – наименьшее значение $R \geqslant 2R^{(1)}$, при котором $\rho_1(R^{(2)}) = \rho_2(R^{(2)})$. На отрезке $R^{(1)} < R \leqslant R^{(2)}$ положим $\rho(R) = \rho_{i_1}(R)$. Далее, обозначим через $\rho_{i_2}(R)$ ту из функций $\rho_1(R)$, $\rho_2(R)$, значение которой в точке $2R^{(2)}$ не больше значения второй. Пусть $R^{(3)}$ – наименьшее значение $R \geqslant 2R^{(2)}$, при котором $\rho_1(R^{(3)}) = \rho_2(R^{(3)})$. На отрезке $R^{(2)} < R \leqslant R^{(3)}$ положим $\rho(R) = \rho_{i_2}(R)$. Повторяя этот процесс, построим функцию $\rho(R)$ на всей полуоси $R \geqslant 0$, которая обладает всеми свойствами уточненного порядка, причем $R^{\rho(R)} \sim \min(R^{\rho_1(R)}, R^{\rho_2(R)})$ при $R \to \infty$. Последнее следует из того, что $R^{\rho_i(R)}$, $i=1, 2$, медленно растущие функции ($\rho_i(R) \to 0$, когда $R \to \infty$, $i=1, 2$).

Построим теперь целую функцию $f(z_1)$ с уточненным порядком $\rho(r_1)$, такую, как в случае 2). Легко видеть, что с. с. у. п. $\Big(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\Big)$ является с. с. у. п. этой функции $f(z_1)$.

Очевидно, все случаи, допускаемые теоремой 4, приводятся к одному из четырех рассмотренных случаев. Тем самым теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает одно характеристическое свойство с. с. т. (σ_1, σ_2) при с. с. у. п. $\Big(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\Big)$. Она является обобщением теоремы Л. И. Ронкина [6] (см. также теорему 26.4 из [2]).

Теорема 5. *Системы положительных чисел* (σ_1, σ_2) *составляет с. с. т. при с. с. у.* $\Big(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\Big)$ $(\lim\limits_{R_i \to \infty} \rho_i(R_i) = \rho_i > 0,\ i=1, 2)$ *целой функции* $f(z_1, z_2)$ *тогда и только тогда, когда точки с координатами* $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2)$ *образуют кривую, являющуюся границей некоторой выпуклой квадрантообразной*) области* D.

Доказательство (ср. [2], стр. 391–393) будет опираться на теорему 3. Из формулы (2.6) легко получаем равенство

$$\overline{\lim_{k_1+k_2\to\infty}} \Psi(k_1, k_2, \ln\sigma_1, \ln\sigma_2) =$$
$$= \overline{\lim_{k_1+k_2\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}} \Big[\ln |c_{k_1 k_2}| + k_1 \ln\varphi_1(k_1, k_2) + k_2 \ln\varphi_2(k_1, k_2) -$$
$$- \frac{k_1}{\rho_1}\ln\sigma_1 - \frac{k_2}{\rho_2}\ln\sigma_2 - \frac{k_1}{\rho_1}\ln(e\rho_1) - \frac{k_2}{\rho_2}\ln(e\rho_2)\Big] = 0, \tag{2.21}$$

эквивалентное равенству (2.6). Через D обозначим множество точек (x, y) действительной плоскости, для координат которых справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{k_1+k_2\to\infty}} \Psi(k_1, k_2, x, y) < 0.$$

Из (2.21) легко видеть, что D является выпуклой квадрантообразной областью, причем все точки границы D и только они удовлетворяют равенству (2.21). Поэтому, если (σ_1, σ_2) является с. с. т. при с. с. у. п. $\Big(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\Big)$ функции $f(z_1, z_2)$, то $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2)$ принадлежит границе D и наоборот, если $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2)$ является граничной точкой области D, то (σ_1, σ_2) является с. с. т.

*) Область D квадрантообразна, если из того, что $(x, y) \in D$ следует, что $(x', y') \in D$, как только $x' \geqslant x$, $y' \geqslant y$.

при с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1),\ \rho_2(R_2)\right)$ функции $f(z_1, z_2)$. Тем самым необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть кривая L с координатами $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2)$ является границей некоторой выпуклой квадрантообразной области D в плоскости переменных x, y. Так как кривая L выпукла, очевидно, существует прямая, проходящая через произвольную точку L и не пересекающая область D. Рассмотрим функцию

$$\omega(\Theta_1, \Theta_2) = \inf_{(x,\ y) \in \bar{D}} \left(x\cos\Theta_1 + y\cos\Theta_2\right), 0 \leqslant \Theta_i \leqslant \frac{\pi}{2},\quad i = 1,2,$$

где Θ_1, Θ_2 – углы, образованные некоторым лучем с осями координат. Тогда область D можно представить как пересечение областей $x\cos\Theta_1 + y\cos\Theta_2 > \omega(\Theta_1, \Theta_2)$. Очевидно, кривая L полностью определяется функцией $\omega(\Theta_1, \Theta_2)$ при $\Theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $i=1, 2$. Рассмотрим функцию

$$f(z_1,\ z_2) = \sum_{k_1,\ k_2=0}^{\infty}$$

где

$$c_{k_1 k_2} = \frac{\exp\left[\omega\left(\Theta_1^{(k_1)},\ \Theta_2^{(k_2)}\right)\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}\right]}{\left[\frac{\varphi_1^{\rho_1}(k_1,\ k_2)}{e\rho_1}\right]^{\frac{k_1}{\rho_1}\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}}\left[\frac{\varphi_2^{\rho_2}(k_1,\ k_2)}{e\rho_2}\right]^{\frac{k_2}{\rho_2}\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}}},$$

$$\Theta_i^{(k_i)} = \arccos\frac{k_i}{\rho_i\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}}\qquad i = 1,\ 2.$$

Так как $\omega(\Theta_1, \Theta_2)$ – ограниченная сверху функция, легко видеть, что так определенная функция $f(z_1, z_2)$ – целая.

Из определения функций $\omega(\Theta_1, \Theta_2)$ и $f(z_1, z_2)$ следует, что для каждой точки $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2) \in L$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}}\left[\ln|c_{k_1 k_2}| + k_1\ln\varphi_1(k_1,\ k_2) + \right.$$

$$\left. + k_2\ln\varphi_2(k_1,\ k_2) - \frac{k_1}{\rho_1}\ln(e\sigma_1\rho_1) - \frac{k_2}{\rho_2}\ln(e\sigma_2\rho_2)\right] =$$

$$= \varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\left[\omega\left(\Theta_1^{(k)},\ \Theta_2^{(k)}\right) - \frac{k_1\ln\sigma_1}{\rho_1\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{k_2\ln\sigma_2}{\rho_2\sqrt{\left(\frac{k_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}}\right] = \varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\left\{\omega\left(\Theta_1^{(k_1)},\ \Theta_2^{(k_2)}\right) - \left[(\ln\sigma_1)\cos\left(\Theta_1^{(k_1)}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\ln\sigma_2)\cos\left(\Theta_2^{(k_2)}\right)\right]\right\} \leqslant 0. \tag{2.22}$$

Далее, из определения функции $\omega(\Theta_1, \Theta_2)$ следует, что для каждой точки $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2) \in L$ найдется такое направление (Θ_1, Θ_2), что $(\ln\sigma_1)\cos\Theta_1 + (\ln\sigma_2)\cos\Theta_2 = \omega(\Theta_1, \Theta_2)$. Кроме того, для любой пары (Θ_1, Θ_2) существует последовательность $\left(\Theta_1^{(k_1)}, \Theta_2^{(k_2)}\right)$, такая, что $\Theta_1^{(k_1)} \to \Theta_1$, $\Theta_2^{(k_2)} \to \Theta_2$ и $\exp\omega\left(\Theta_1^{(k)}, \Theta_2^{(k)}\right) \to \exp\omega(\Theta_1, \Theta_2)$, где мы считаем, что $\exp(-\infty) = 0$.

Тогда на указанной последовательности имеет место равенство

$$\lim_{k_1+k_2\to\infty} \{ \omega(\Theta_1^{(k)}, \Theta_2^{(k)}) - [(\ln\sigma_1)\cos(\Theta_1^{(k)}) + (\ln\sigma_2)\cos(\Theta_2^{(k)})] \} = 0.$$

Отсюда и из неравенства (2.22) следует, что для произвольной точки $(\ln\sigma_1, \ln\sigma_2)\in L$ выполняется соотношение (2.21), а следовательно, и (2.6). Поэтому (σ_1, σ_2) является с. с. т. при с. с. у. п. $\left(\rho_1(R_1), \rho_2(R_2)\right)$ для построенной функции $f(z_1, z_2)$. Теорема 5 доказана.

§ 3. Об обобщении понятия индикатора роста целых функций

Для целых функций одной комплексной переменной более тонкой характеристикой, чем тип, является индикатор роста. Индикатор хакрактеризует рост функции на отдельных лучах. Разные авторы по разному переносили понятие индикатора на целые или субгармонические функции многих переменных. С одной стороны, следует отметить работы Планшереля и Г. Пойа, Лелона, Л. И. Ронкина (см. [2]), В. С. Азарина [14], В. К. Иванова [15], Ю. Пари [16], Л. С. Маергойза [17] и др., где индикатор рассматривается как некоторая функция угловых координат. С другой стороны, В. К. Иванов [18], [19] применил совершенно другой подход к обобщению индикатора роста. Мы приведем здесь определение несколько более общее, чем это дается в работах В. К. Иванова, а также М. Ш. Ставского [20], Н. И. Кобелевой [21] и Л. И. Ронкина [22]. Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция с с. с. у. п. $\left(\rho_1(r_1), \rho_2(r_2)\right)$. Обозначим через $T(\varphi)=T(\varphi_1, \varphi_2)$*) множество точек (ν_1, ν_2) действительной плоскости, для которых существует постоянная $A=A(\varphi_1, \varphi_2, \nu_1, \nu_2)$ такая, что при всех неотрицательных r_1, r_2 выполняется неравенство

$$|f(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})| < A\exp[\nu_1 r_1^{\rho_1(r_1)} + \nu_2 r_2^{\rho_2(r_2)}]. \tag{3.1}$$

Граница области $\bar{T}(\varphi)$ является обобщением понятия индикатора целой функции одной переменной на случай двух переменных.

Легко видеть, что при любых фиксированных φ_1, φ_2 область $\bar{T}(\varphi)$ выпукла и квадрантообразна.

Для индикатора целой функции одной переменной характеристическим свойством индикатора является его тригонометрическая выпуклость. Она заключается в следующем. Если функция $f(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ $\left(\rho(r)\to\rho>0\right)$ имеет (обобщенный) индикатор $h(\varphi)$ (см. [3]), то функция

$$k(\varphi) = \frac{1}{r^\rho}\operatorname{Re}[(a-bi)z^\rho] = a\cos\rho\varphi + b\sin\rho\varphi,$$

где a и b — определенные действительные числа, мажорирует индикатор $h(\varphi)$ в угле $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, т. е. $k(\varphi_1)=h(\varphi_1)$, $k(\varphi_2)=h(\varphi_2)$ и $h(\varphi)\leqslant k(\varphi)$ при $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, где $\varphi_2-\varphi_1<\frac{\pi}{\rho}$.

Некоторые аналогии этого свойства были получены и для функций многих переменных В. К. Ивановым [15] и Л. С. Маергойзом [17] (см. также работу В. С. Азарина [14]). Мы докажем некоторый аналог тригонометрической выпуклости для границы области $\bar{T}(\varphi)$.

*) Подобные множества в литературе принято называть областями, хотя они не являются областями в топологическом смысле.

Для этого введем следующее обозначение. Через $K(\varphi)=K(\varphi_1, \varphi_2)=K(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_i^{(j)}, h_i^{(j)})$ обозначим множество точек действительной плоскости (ν_1, ν_2), удовлетворяющих условию $\nu_1 \geqslant k_1(\varphi_1)$, $\nu_2 \geqslant k_2(\varphi_2)$, где $k_i(\varphi_i)$ определяются равенствами

$$k_i(\varphi_i)=\frac{h_i^{(1)} \sin \rho_i (\varphi_i^{(2)}-\varphi_i)+h_i^{(2)} \sin \rho_i (\varphi_i-\varphi_i^{(1)})}{\sin \rho_i (\varphi_i^{(2)}-\varphi_i^{(1)})},$$

где $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$ — некоторые постоянные ($i=1, 2$).

Справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть* $f(z_1, z_2)$ *— целая функция с с. с. у. п.* $\big(\rho_1(r_1), \rho_2(r_2)\big)$ $\big(\rho_i(r_i)\to\rho_i>0,\ i=1, 2\big)$. *Если точка с координатами* $(h_1^{(i)}, h_2^{(j)})$ *принадлежит* $T(\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(j)})$ *при фиксированных* $(\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(j)})$, $0 \leqslant \varphi_i^{(2)}-\varphi_i^{(1)} < \frac{\pi}{\rho_i}$, $i, j=1, 2$, *то при всех* (φ_1, φ_2), $\varphi_i^{(1)} \leqslant \varphi_i \leqslant \varphi_i^{(2)}$, $i=1, 2$, *имеет место включение* $\bar{K}(\varphi) \subset \bar{T}(\varphi)$, *где* $T(\varphi)$ *и* $K(\varphi)$ *определены, как выше.*

В работе [1] в формулировке этой теоремы имеется неточность.

Доказательству предпошлем следующую лемму, являющуюся аналогом классического принципа Фрагмена-Линделефа для функции двух переменных.

Лемма 2. *Пусть функция* $f(z_1, z_2)$ *голоморфна в бицилиндре* $\bar{D}: \{|\arg z_i-\Theta_i| \leqslant \frac{\pi}{2\lambda_i},\ i=1, 2\}$ *и система чисел* (ρ_1, ρ_2) *с* $\rho_i<\lambda_i$, $i=1, 2$, *является с. с. п. данной функции. Если в конечных точках остова границы области* D *функция* $f(z_1, z_2)$ *ограничена постоянной* M *то всюду в области* D *имеет место неравенство* $|f(z_1, z_2)| \leqslant M$.

При этом с. с. п. (ρ_1, ρ_2) функции $f(z_1, z_2)$, голоморфной в области D, определяется так же, как и для целых функций, причем через $M(r_1, r_2)$ обозначается максимум модуля функции $f(z_1, z_2)$ в замкнутой области $\bar{D} \cap G(r_1, r_2)$, где $G(r_1, r_2)=\{|z_1| \leqslant r_1, |z_2| \leqslant r_2\}$.

Если $\lambda_i>\frac{1}{2}$, $i=1, 2$, то доказательство можно провести по тому же плану, как это делается в книге Б. Я. Левина [3] (см. доказательство аналогичной теоремы в работе В. К Иванова [23]).

Если одно из чисел λ_1, λ_2 не больше, чем $\frac{1}{2}$, то из ограниченности функции $f(z_1, z_2)$ на остове границы области D следует, что функция $f(z_1, z_2)$ не зависит от соответствующей переменной. Действительно, предположим для определенности, что $\lambda_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда из определения с. с. п. следует, что при любом фиксированном z_2^0, удовлетворяющем равенству $|\arg z_2^0-\Theta_2|=\frac{\pi}{2\lambda_2}$, функция $f(z_1, z_2^0)$, как функция переменной z_1, имеет порядок не больший, чем ρ_1. Следовательно, из ограниченности функции $f(z_1, z_2^0)$ на луче $\arg z_1=\Theta_1+\pi$ следует, что она тождественно равна постоянной, поскольку $\rho_1<\frac{1}{2}$. Так как множество $N=\left\{|\arg z_2-\Theta_2|=\frac{\pi}{2\lambda_2}\right\}$ не является аналитическим множеством, то $f(z_1, z_2)=f(z_2)$ и мы легко убеждаемся в справедливости леммы и в рассматриваемом случае. Если $\lambda_i \leqslant \frac{1}{2}$, $i=1, 2$, то $f(z_1, z_2)=\mathrm{const}$. Лемма доказана.

Далее воспользуемся следующей леммой из [3].

Лемма 3. *Пусть* $\rho(r)$ *— заданный уточненный порядок* ($\rho>0$) *и* $0<\Theta_2-\Theta_1<\min\left(\frac{\pi}{\rho}, 2\pi\right)$. *Тогда для любых вещественных чисел* a *и* b *можно построить функцию* $W(z)$, *голоморфную в* $\Theta_1\leqslant\arg z\leqslant\Theta_2$, *не имеющую корней внутри этого угла и такую, что при* $\Theta_1\leqslant\Theta\leqslant\Theta_2$ *равномерно*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|W(re^{i\Theta})|}{r^{\rho(r)}}=a\cos\rho\Theta+b\sin\rho\Theta.$$

Пусть, согласно лемме 3, $f_i(z_i)$ — голоморфная функция, не имеющая корней в угле $\varphi_i^{(1)}\leqslant\arg z_i\leqslant\varphi_i^{(2)}$ и такая, что при $\varphi_i^{(1)}\leqslant\varphi_i\leqslant\varphi_i^{(2)}$ равномерно

$$\lim_{r_i\to\infty}\frac{\ln|f_i(r_ie^{i\varphi_i})|}{r_i^{\rho_i(r_i)}}=a_{i\delta}\cos\rho_i\varphi_i+b_{i\delta}\sin\rho_i\varphi_i=k_{i\delta}(\varphi_i)\qquad(i=1,\ 2),$$

где $\{a_{i\delta},\ b_{i\delta}\}$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} a\cos\rho_i\varphi_i^{(1)}+b\sin\rho_i\varphi_i^{(1)}=h_i^{(1)}+\delta,\\ a\cos\rho_i\varphi_i^{(2)}+b\sin\rho_i\varphi_i^{(2)}=h_i^{(2)}+\delta,\end{cases}$$

где

$$(h_1^{(j)}+\delta,\ h_2^{(j)}+\delta)\in T(\varphi_1^{(j)},\ \varphi_2^{(j)}),\qquad \delta>0,\ \ ,\ j=1,\ 2.$$

Существование решения следует из условия $0\leqslant\varphi_i^{(2)}-\varphi_i^{(1)}<\frac{\pi}{\rho_i}$, так как определитель системы равен $\sin\rho_i(\varphi_i^{(2)}-\varphi_i^{(1)})$, $i=1,\ 2$. Легко проверить, что функцию $k_{i\delta}(\varphi_i)$ можно представить в виде

$$k_{i\delta}(\varphi_i)=\frac{(h_i^{(1)}+\delta)\sin\rho_i(\varphi_i^{(2)}-\varphi_i)+(h_i^{(2)}+\delta)\sin\rho_i(\varphi_i-\varphi_i^{(1)})}{\sin\rho_i(\varphi_i^{(2)}-\varphi_i^{(1)})}\qquad(i=1,\ 2).$$

Отсюда легко видеть, что $k_{i\delta}(\varphi_i^{(j)})=h_i^{(j)}+\delta$; $i, j=1, 2$, и функция $f(z_1,\ z_2)\times[f_1(z_1)f_2(z_2)]^{-1}$, голоморфная в бицилиндре $\bar{D}=\{\varphi_i^{(1)}\leqslant\varphi_i\leqslant\varphi_i^{(2)},\ i=1,\ 2\}$, ограничена на остове границы области $\bar{D}$. Тогда по лемме 2 она ограничена всюду в $\bar{D}$, следовательно, в $\bar{D}$ имеем

$$\ln|f(r_1e^{i\varphi_1},\ r_2e^{i\varphi_2})|<c+\ln|f_1(r_1e^{i\varphi_1})f_2(r_2e^{i\varphi_2})|<$$
$$<c+(1+\varepsilon)\left[k_{1\delta}(\varphi_1)r_1^{\rho_1(r_1)}+k_{2\delta}(\varphi_2)r_2^{\rho_2(r_2)}\right],\quad c>0,\ \varepsilon>0.$$

Последнее означает, что $\left(k_{1\delta}(\varphi_1)(1+\varepsilon),\ k_{2\delta}(\varphi_2)(1+\varepsilon)\right)\in T(\varphi_1,\ \varphi_2)$. В силу произвольности δ и ε отсюда получаем утверждение теоремы 6.

§ 4. Связь между ростом целой функции и распределением особенностей ассоциированной с ней функции

Известная теорема Г. Пойа (см. [3], стр. 114) утверждает, что сопряженная диаграмма произвольной целой функции конечной степени есть зеркальное отражение в вещественной оси ее индикаторной диаграммы. В 1930—1932 гг. эта теорема была обобщена М. Ф. Субботиным [24] и В. Бернштейном [25], [26] на целые функции нормального типа порядка ρ, $0<\rho<\infty$, причем у них вместо индикатора фигурирует функция $\max\left(0,\ h(\varphi)\right)$. В 1955 г. А. Е. Аветисян [27] и Л. Ф. Лохин [28] повторно нашли этот же результат. Обобщение теоремы Г Пойа на функции многих переменных конечной степени было достигнуто В. К. Ивановым [18], [19] и М. Ш. Ставским [20], а на функции с с. с. т. (σ_1, σ_2) при с. с. п. (ρ_1,ρ_2), где $\rho_i\geqslant\frac{1}{2}$, $0<\sigma_i<\infty$, $i=1,\ 2$, — Л. И. Ронкиным [22] (см. также работу Н. И. Кобелевой [21]).

Б. Бернштейн [25], [26] и Ж. Валирон [29] рассматривали также обобщение этой теоремы для целой функции одной переменной с уточненным порядком $\rho(r)$. Мы приведем здесь обобщение результатов В. Бернштейна [26] на случай целой функции двух комплексных переменных с с. с. у. п. $\left(\rho_1(r_1),\ \rho_2(r_2)\right)$.

Сформулируем, следуя работе [26], некоторые известные результаты, которые дальше будут нами использованы.

Скажем, что два уточненных порядка $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ эквивалентны, если $\lim\limits_{r\to\infty}[\rho_1(r)-\rho_2(r)]\ln r=0$.

Каков бы ни был уточненный порядок $\rho(r)$ $\left(\rho(r)\to\rho>0\right)$, существует эквивалентный ему уточненный порядок $\rho_0(r)$, такой, что действительная функция $W(r)=r^{\rho_0(r)}$ допускает аналитическое продолжение $W(z)$, обладающее следующими свойствами:

A) Функция $W(z)$ голоморфна в угле $S:|\arg z|<\min\left(\frac{\pi}{\rho},\ \pi\right)$ и производная $W'(z)$ не обращается в нуль в секторе $S_\varepsilon:|\arg z|\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\min\left(\frac{\pi}{\rho},\ \pi\right)$, $|z|\geqslant r_0$, где r_0 — достаточно большая постоянная.

B) Когда $z\to\infty$ внутри угла S имеют место асимптотические соотношения

$$W(re^{i\varphi})\sim r^{\rho(r)}e^{i\rho\varphi},$$

$$W'(z)\sim\frac{\rho}{z}W(z).$$

C) Функция $\chi(u)$ обратная к функции $u=W(z)$, голоморфна в секторе $|\arg u|<\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $|u|>r_0(\varepsilon)$, где $r_0(\varepsilon)$ — достаточно большая постоянная.

Функция $\omega(r)=\ln\chi(r)(\ln r)^{-1}$ является уточненным порядком, причем $\omega(r)\to 1/\rho$, когда $r\to\infty$.

Пусть

$$f(z_1,\ z_2)=\sum_{k_1,\ k_2=0}^{\infty}c_{k_1 k_2}z_1^{k_1}z_2^{k_2} \tag{4.1}$$

— целая функция с с. с. у. п.$\left(\rho_1(r_1),\ \rho_2(r_2)\right)$, где $\lim\limits_{r_i\to\infty}\rho_i(r_i)=\rho_i>0, i=1,2$. Согласно вышесказанному, обозначим через $W_i(z_i)$ аналитическую при $|\arg z_i|<$ $<\min\left(\frac{\pi}{\rho_i},\ \pi\right)$ функцию, такую, что $W_i(t)>0$ при $t>0$,

$$W_i(r_i e^{i\rho_i})\sim e^{i\rho_i\varphi_i}r_i^{\rho_i(r_i)}$$

при

$$r_i\to\infty,\quad \omega_i(u_i)=\ln\chi_i(r_i)(\ln r_i)^{-1},$$

где $\chi_i(u_i)$ — функция, обратная к $W_i(u_i)$ при $u_i>c=\text{const}$ и равная некоторой положительной постоянной при $u_i\leqslant c$ $(i=1,\ 2)$. Пусть a_i $(a_i\geqslant a_i^0)$ — произвольная постоянная, a_i^0 — постоянная зависящая только от ρ_i (r_i) $(i=1,\ 2)$. Далее, обозначим

$$\gamma_i(x)=\Gamma[(x+a_i)\omega_i(x+a_i)],$$

$$E_i(z_i)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_i^k}{\gamma_i(k)},$$

$$h_{E_i}(\varphi_i)=\varlimsup_{r_i\to\infty}\frac{\ln^+|E_i(r_i e^{i\varphi_i})|}{r_i^{\rho_i(r_i)}},\qquad i=1,\ 2, \tag{4.2}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

В. Бернштейн [26] доказал, что $E_i(z_i)$ — целая функция переменной z_i с уточненным порядком $\rho_i(r_i)$, причем имеют место равенства

$$h_{E_i}(\varphi_i)=\cos\rho_i\varphi_i,\ \text{если}\ |\varphi_i|\leqslant\frac{\pi}{2\rho_i}, \tag{4.3}$$

$$h_{E_i}(\varphi_i)=0,\ \text{если}\ \frac{\pi}{2\rho_i}\leqslant|\varphi_i|\leqslant\pi, \qquad i=1,\ 2. \tag{4.4}$$

С целой функцией $f(z_1, z_2)$, представленной в виде ряда (4.1), ассоциируем две функции

$$F_1(z_1, z_2)=\sum_{k_1,\,k_2=0}^{\infty}\frac{c_{k_1k_2}\gamma(k_1)\gamma(k_2)}{z_1^{k_1+1}z_2^{k_2+1}}, \tag{4.5}$$

$$F_2(z_1, z_2)=\sum_{k_1,\,k_2=0}^{\infty}\frac{c_{k_1k_2}\Delta_1(k_1)\Delta_2(k_2)}{z_1^{k_1+1}z_2^{k_2+1}}, \tag{4.6}$$

где

$$\Delta_i(x)=\int_0^{\infty} r_i^x\exp[-W_i(r_i)]\,dr_i.$$

Докажем, что функции $F_i(z_1, z_2)$ голоморфны в бицилиндре $D:\{|z_1|>\sigma_1^{1/\rho_1},\ |z_2|>\sigma_2^{1/\rho_2}\}$, [где (σ_1, σ_2) — с. с. т. функции $f(z_1, z_2)$ при с. с. у. п. $(\rho_1(r_1), \rho_2(r_2))$]. Действительно, легко показать (см. [26]), что при $k_i\to\infty$ имеют место асимптотические соотношения

$$\gamma_i(k_i)\sim\Delta_i(k_i)\sim\chi_i^{k_i}(k_i)\,(e\rho_i)^{-k_i/\rho_i}, \qquad i=1,\ 2.$$

Следовательно, в силу теоремы 3 справедливы равенства

$$\varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\sqrt[k_1+k_2]{|c_{k_1k_2}|\,\chi_1^{k_1}(k_1)\,\chi_2^{k_2}(k_2)\,(e\sigma_1\rho_1)^{-\frac{k_1}{\rho_1}}(e\sigma_2\rho_2)^{-\frac{k_2}{\rho_2}}}=$$

$$=\varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\sqrt[k_1+k_2]{|c_{k_1k_2}|\,\gamma_1(k_1)\,\gamma_2(k_2)\,\sigma_1^{-\frac{k_1}{\rho_1}}\sigma_2^{-\frac{k_2}{\rho_2}}}=$$

$$=\varlimsup_{k_1+k_2\to\infty}\sqrt[k_1+k_2]{|c_{k_1k_2}|\,\Delta_1(k_1)\,\Delta_2(k_2)\,\sigma_1^{-\frac{k_1}{\rho_1}}\sigma_2^{-\frac{k_2}{\rho_2}}}=1. \tag{4.7}$$

Отсюда в силу известных формул для радиусов сходимости степенных рядов (см. [2], стр. 61) следует наше утверждение. Более того, кривая, образованная точками $(\sigma_1^{1/\rho_1}, \sigma_2^{1/\rho_2})$, где (σ_1, σ_2) — с.с.т. при с.с.у.п. $(\rho_1(r_1), \rho_2(r_2))$ функции $f(z_1, z_2)$, является кривой сопряженных радиусов сходимости рядов (4.5) и(4.6).

Условимся понимать под внешностью замкнутой жордановой кривой область расширенной комплексной плоскости, ограниченную этой кривой, которая содержит внутри себя бесконечно удаленную точку. Из равенств (4.1) и (4.5) легко получить следующее интегральное представление для функции $f(z_1, z_2)$:

$$f(z_1, z_2)=\frac{-1}{4\pi^2}\int_{l_1}\int_{l_2}F_1(\zeta_1, \zeta_2)\,E_1(z_1\zeta_1)\,E_2(z_2\zeta_2)\,d\zeta_1\,d\zeta_2, \tag{4.8}$$

где l_1 и l_2 — замкнутые кусочногладкие жордановы кривые соответственно в z_1- и z_2-плоскостях, такие, что функция $F_1(z_1, z_2)$ голоморфна в точках (z_1, z_2), где z_i лежат на кривой l_i или вне ее $(i=1, 2)$.

С другой стороны, докажем, что в некоторой области пространства теории функций, содержащей точку (∞, ∞), имеет место равенство

$$F_2(z_1, z_2)=\frac{1}{z_1 z_2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-W_1(t_1)-W_2(t_2)} f\left(\frac{t_1}{z_1}, \frac{t_2}{z_2}\right) dt_1, dt_2. \tag{4.9}$$

Для доказательства заметим следующее простое обстоятельство. Пусть ряд $S=\sum\limits_{k_1, k_2=0}^{\infty} a_{k_1 k_2}$ абсолютно сходится, функции $b_{k_1 k_2}(x, y)$ $\left(0\leqslant b_{k_1 k_2}(x, y)\leqslant 1\right)$ заданы при всех $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и $k_1\geqslant 0$, $k_2\geqslant 0$; $b_{k_1 k_2}(x, y)\to 1$, когда $x\to\infty$, $y\to\infty$ при любых $k_1\geqslant 0$, $k_2\geqslant 0$. Тогда ряд $S(x, y)=\Sigma a_{k_1 k_2} b_{k_1 k_2}(x, y)$ абсолютно сходится при любом $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и имеет место равенство $S=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} S(x, y)$.

Фиксируем теперь произвольную точку (z_1, z_2) $(z_i\neq 0,\ i=1,2)$, в которой ряд (4.6) абсолютно сходится. Функция

$$b_{k_1 k_2}(x, y)=\frac{1}{\Delta_1(k_1)\Delta_2(k_2)}\int_0^x\int_0^y e^{-W_1(t_1)-W_2(t_2)} t_1^{k_1} t_2^{k_2} dt_1\, dt_2,$$

очевидно, удовлетворяет вышеприведенным условиям. В силу равномерной сходимости ряда (4.1) в ограниченной области пространства можем записать равенство

$$S(z_1, \quad x, y)=\sum_{k_1, k_2=0}^{\infty}\frac{c_{k_1 k_2}\Delta_1(k_1)\Delta_2(k_2)}{z_1^{k_1+1} z_2^{k_2+1}} b_{k_1 k_2}(x, y)=$$

$$=\frac{1}{z_1 z_2}\int_0^x\int_0^y e^{-W_1(t_1)-W_2(t_2)} f\left(\frac{t_1}{z_1}, \frac{t_2}{z_2}\right) dt_1\, dt_2.$$

Переходя к пределу при $x\to\infty$, $y\to\infty$ в последнем равенстве, получим искомую формулу (4.9). Таким образом, равенство (4.9) имеет место во всех точках, в которых ряд (4.6) абсолютно сходится. Но тогда оно верно в любой содержащей точку (∞, ∞) области, где интеграл в правой части (4.9) равномерно сходится, и следовательно, представляет аналитическую функцию.

В дальнейшем используем следующую теорему, доказанную для круговых полицилиндров В. К. Ивановым [19], а в общем случае Л. И. Ронкиным [22].*)

Теорема 7 (теорема В. К. Иванова — Л. И. Ронкина). Пусть $g(z_1, z_2)$ — *аналитическая функция в бицилиндре* $D=\{z_i\in D_i,\ i=1, 2\}$, *где* D_i — *область в плоскости переменной* z_i, $i=1, 2$. *Пусть, далее, граничная точка* (z_1^0, z_2^0) *бицилиндра* D *такова, что имеют место условия*: 1) (z_1^0, z_2^0) *является особой точкой функции* $g(z_1, z_2)$, 2) $z_i^0\in\partial D_i$, $z_j^0\in D_j$, $i\neq j$. *Тогда все точки многообразия* $D_0=\{z_i=z_i^0,\ z_j\in \overline{D_j},\ i\neq j\}$ *являются особыми точками функции* $g(z_1, z_2)$.

*) Доказательство теоремы 7, приведенное в [22], ошибочно. Однако Л. И. Ронкину в своей докторской диссертации удалось устранить этот недостаток.

Используя интегральные представления (4.8) и (4.9), а также теорему 7, легко установить связь между ростом целой функции $f(z_1, z_2)$ и распределением особенностей функций $F_1(z_1, z_2)$ и $F_2(z_1, z_2)$.

Введем множество $C_i(\varphi) = C_i(\varphi_1, \varphi_2)$ точек (ν_1, ν_2) действительной плоскости $(\nu_1 > 0, \nu_2 > 0)$, для которых функция $F_i(z_1, z_2) = F_i(r_1 e^{i\Theta_1}, r_2 e^{i\Theta_2})$ аналитична внутри множества

$$\left\{ r_j^{\rho_j} \cos \rho_j (\Theta_j - \varphi_j) > \nu_j, \ |\Theta_j - \varphi_j| \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2\rho_j}, \pi\right), \qquad j = 1, 2 \right\}.$$

Через $T^+(\varphi)$ обозначим пересечение области $T(\varphi)$, определенной в предыдущем параграфе, с первым квадрантом плоскости переменных ν_1, ν_2. Справедлива теорема.

Теорема 8. *Для всякой целой функции $f(z_1, z_2)$, имеющей с. с. у. п. $\left(\rho_1, (r_1), \rho_2(r_2)\right)$, имеет место включение*

$$\bar{C}_1(-\varphi) \subset \bar{T}^+(\varphi) \subset \bar{C}_2(-\varphi). \tag{4.10}$$

Доказательство. Положив $z_i = r_i e^{i\varphi_i}$, формулу (4.9) можно привести к виду

$$F_2(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) =$$
$$= e^{-i} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-W_1(t_1 r_1) - W_2(t_2 r_2)} f(t_2 e^{-i\varphi_1}, t_2 e^{-i\varphi_2})\, dt_1\, dt_2. \tag{4.11}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-W_1(t_1 z_1) - W_2(t_2 z_2)} f(t_1 e^{-i} \quad t_2 e^{-i\varphi_2})\, dt_1\, dt_2 \tag{4.12}$$

при комплексных z_1, z_2. Так как при $t_i \to \infty$

$$W_i(t_i z_i) \sim e^{i\rho_i \omega_i} r_i^{\rho_i} W_i(t_i) \quad (z_i = r_i e^{i\omega_i}), \qquad i = 1, 2,$$

и при $(\nu_1, \nu_2) \in T^+(-\varphi_1, -\varphi_2)$

$$|f(t_1 e^{-i\varphi_1}, t_2 e^{-i\varphi_2})| < A \exp\{\nu_1 W_1(t_1) + \nu_2 W_2(t_2)\},$$

то, как легко видеть, интеграл (4.12) равномерно сходится, как только

$$r_i^{\rho_i} \cos \rho_i \omega_i > \nu_i, \ |\omega_i \rho_i| < \frac{\pi}{2}, \qquad i = 1, 2.$$

Положим теперь в (4.11) вместо r_i величины $z_i = r_i e^{i\omega_i} = r_i e^{i(\Theta_i - \varphi_i)}$, $i = 1, 2$. Тогда интеграл в правой части полученной формулы равномерно сходится и представляет голоморфную функцию внутри множества

$$\left\{ r_j^{\rho_j} \cos \rho_j (\Theta_j - \varphi_j) > \nu_j, \ |\Theta_j - \varphi_j| \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2\rho_j}, \pi\right), \qquad j = 1, 2 \right\}.$$

По теореме единственности эта функция совпадает с $F_2(z_1, z_2)$. Отсюда следует, что $(\nu_1, \nu_2) \in C_2(\varphi_1, \varphi_2)$ и поэтому $\bar{T}^+(-\varphi) \subset \bar{C}_2(\varphi)$.

Докажем теперь первое включение в (4.10). Обозначим через $l_i(R, \varepsilon)$ замкнутый контур, образованный дугой l_i' окружности $|z_i| = R$ $\left(\text{при } \rho_i \geqslant \frac{1}{2}\right)$ и дугой l_i'' кривой

$$\operatorname{Re}(z_i e^{-i\varphi_i})^{\rho_i} = \nu_i + \varepsilon, \ |\arg z_i - \varphi_i| \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2\rho_i}, \pi\right), \qquad i = 1, 2.$$

Тогда из теоремы 7 следует следующая лемма.

Лемма 4 (см. [22]). *Если* $(\nu_1, \nu_2) \in C_1(\varphi)$, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $R(\varepsilon)$, *что функция* $F_1(z_1, z_2)$ *будет аналитической при условии, что* z_i *лежат на контуре* $l_i\left(R(\varepsilon),\ \varepsilon\right)$ *или вне его.*

Из этой леммы следует, что в (4.8) в качестве контуров l_i можно взять контуры $l_i\left(R(\varepsilon),\ \varepsilon\right)$, $i=1, 2$. Тогда из (4.8) следует оценка

$$|f(z_1, z_2)| < C \max_{\zeta_1 \in l_1\left(R(\varepsilon), \varepsilon\right)} |E_1(z_1\zeta_1)| \max_{\zeta_2 \in l_2\left(R(\varepsilon), \varepsilon\right)} |E_2(z_2\zeta_2)|. \tag{4.13}$$

В силу (4.2) и (4.3) имеем $(z_i = r_i e^{i\varphi_i},\ i=1, 2)$:

$$\begin{aligned} \max_{\zeta_i \in l_i''} |E_i(z_i\zeta_i)| &< c_1 \exp\left\{[\cos\rho_i(\varphi_i + \arg\zeta_i) + \delta]\, |z_i\zeta_i|^{\rho_i(|z_i\zeta_i|)}\right\} \leqslant \\ &\leqslant c_2 \exp\left\{[\cos\rho_i(\varphi_i + \arg\zeta_i) + 2\delta]\, |\zeta_i|^{\rho_i} r_i^{\rho_i(r_i)}\right\} \leqslant \\ &\leqslant c_2 \exp\left\{\nu_i + \varepsilon + 2R\delta\right) r_i^{\rho_i(r_i)} \qquad (i=1, 2),\ c_1,\ c_2 > 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\delta > 0$ — произвольно малая постоянная. Далее, из (4.2) и (4.4) при произвольном $\delta > 0$ аналогично получим

$$\max_{\zeta_i \in l'_i} |E_i(z_i\zeta_i)| < c_3 \exp\left(\delta\, |z_i\zeta_i|^{\rho_i(|z_i\zeta_i|)}\right) \leqslant c_3 \exp\left(2\delta R^{\rho_i} r_i^{\rho_i(r_i)}\right),\ C_3 > 0. \tag{4.15}$$

Учитывая неравенства (4.14) и (4.15), из (4.13) легко получим искомое включение $\bar{C}_1(-\varphi) \subset \bar{T}^+(\varphi)$. Теорема 8 доказана.

Естественно возникает вопрос о том, нельзя ли выбрать ассоциированную функцию так, чтобы вместо включений (4.10) мы имели равенство. Этот вопрос в общем случае остается открытым, так же, как и для функций одной переменной. В некоторых частных случаях этот вопрос решается положительно. Так, например, если $f(z_1, z_2)$ имеет с.с.т. (σ_1, σ_2) при с.с.п. (ρ_1, ρ_2) $(0 < \sigma_i,\ \rho_i < \infty,\ i=1,2)$ (ρ_i — точные порядки!), то в качестве ассоциированной функции выбирают функцию (см., например, [22]):

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 = 0}^{\infty} \frac{c_{k_1 k_2}\, \Gamma(1 + k_1/\rho_1)\, \Gamma(1 + k_2/\rho_2)}{z_1^{k_1+1} z_2^{k_2+1}}, \tag{4.16}$$

которая совпадает с $F_1(z_1, z_2)$ при $W_i(z_i) = z_i^{\rho_i}, \omega_i(u_i) \equiv \frac{1}{\rho_i}$, $a_i = \rho_i$, $i=1, 2$, и совпадает с $F_2(z_1, z_2)$ при $W_i(z_i) = z_i^{\rho_i} - (\rho_i - 1)\ln z_i - \ln\rho_i$, $i=1,2$.

Обозначая через $C(\varphi)$ множество точек (ν_1, ν_2) $(\nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0)$, для которых $F(z_1, z_2)$ является аналитической функцией внутри множества

$$\left\{ r_i^{\rho_i} \cos\rho_i(\Theta_i - \varphi_i) > \nu_i,\ |\Theta_i - \varphi_i| \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2\rho_i},\ \pi\right), \qquad i=1,\ 2 \right\},$$

легко получить теорему.

Теорема 9. *Для всякой целой функции* $f(z_1, z_2)$, *имеющей с.с.т.* (σ_1, σ_2) *при с. с. п.* (ρ_1, ρ_2) $(0 < \rho_i < \infty,\ 0 < \sigma_i < \infty,\ i=1, 2)$ *области* $\bar{C}(-\varphi)$ и $\bar{T}^+(\varphi)$*) *совпадают.*

Заметим, что при $\rho_1 = \rho_2 = 1$ в определении множества $C(\varphi)$ требование положительности ν_1, ν_2 можно снять и получить равенство $\bar{C}(-\varphi) = \bar{T}(\varphi)$ (см. [19]).

*) Определение области $T(\varphi)$ для функции $f(z_1, z_2)$ с с. с. т. (σ_1, σ_2) при с. с. п. (ρ_1, ρ_2) изменяется очевидным образом: в равенстве (3.1) вместо $\rho_i(r_i)$ надо положить ρ_i, $i=1, 2$.

Накладывая некоторые ограничения на с. с. у. п. $\left(\rho_1(r_1),\ \rho_2(r_2)\right)$ функции $f(z_1, z_2)$, можно доказать одно из равенств $\bar{C}_1(\varphi)=\bar{T}^+(-\varphi)$ или $\bar{C}_2(\varphi)=\bar{T}^+(-\varphi)$. Например, первое из этих равенств имеет место, когда

$$\Omega_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\gamma_j(x)\,z^{-x-1}\,dx \qquad (a>-2)$$

является положительной функцией при $z>c=\text{const}$ $(j=1,\ 2)$ или, когда выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\gamma_j^*(n)}{\gamma_j(n)}}=1,\ \text{где}\ \gamma_j^*(x)=\int\limits_0^\infty|\Omega_j(t)|\,t^x\,dt, \qquad j=1,\ 2.$$

Мы не останавливаемся на доказательстве этих утверждений, оно повторяет рассуждения В. Бернштейна ([26], стр. 385—391). Следуя В. Бернштейну [26], можно указать также другие случаи, когда имеет место одно из равенств $\bar{C}_1(\varphi)=\bar{T}^+(-\varphi)$ или $\bar{C}_2(\varphi)=\bar{T}^+(-\varphi)$.

В заключение выражаю искреннюю признательность А. А. Гольдбергу и Ш. И. Стрелицу за ценные замечания.

Ужгородский Государственный
университет

Поступило в редакцию
14.IX.1967

Литература

1. Ф. И. Гече, О характеристиках роста целых функций многих комплексных переменных, ДАН СССР, **164**, № 3 (1965), 487—490.
2. Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.
3. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.
4. Л. И. Ронкин, О типах целой функции двух комплексных переменных, Матем. сб. **39** (1956), 253—266.
5. Л. И. Ронкин, Об одной характеристике роста целых функций многих переменных, Труды Харьковск. матем. общ-ва, сер. 4, **27** (1961), 59—65.
6. Л. И. Ронкин, О сопряженных порядках и типах целых функций многих переменных Укр. Матем. журнал, **16**, № 3 (1964), 408—413.
7. М. М. Джрбашян, К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Известия АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, **8** (1955), 1—23.
8. А. А. Гольдберг, Элементарные замечания о фурмулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных, Доклады АН Арм. ССР, **29**, № 4 (1959), 145—151.
9. А. А. Гольдберг, О формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных, Доклады и сообщ. УжГУ, сер. физ.-матем. наук, № 4 (1961), 101—103.
10. Л. С. Маергойз, К вопросу о связях между различными определениями порядков целых функций многих переменных, Сибирский матем. журнал, **7**, № 6 (1966), 1268—1292.
11. S. M. Shah, On proximate orders of integral functions, Bull. Americ. Math. Soc., **52**, N 4 (1946), 326—328.
12. G. Valiron, Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance reguliere, Ann. de la faculte des sci. de l'univ. de Toulouse, **5** (1914), 17—254.
13. Г. А. Фридман, Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов ее степенных разложений, Канд. диссертация, Москва, 1951.
14. В. С. Азарин, Об индикаторе функции субгармонической в многомерном пространстве, Матем. сб., **58** (100), вып. 1 (1962), 87—94.

15. В. К. Иванов, Об индикатрисе роста целой функции двух комплексных перем Известия высш. учебн. завед., матем., № 2 (1961), 24–31.
16. J. Paris, Croissance des fonctions de plusieurs variables et domaines d'holomorphie associécs, Bull. cl. sci. Acad. royale Belgique, 5-e serie, 48, N 1 (1962), 29–36.
17. Л. С. Маергойз, Об одном свойстве индикатрисы роста целой функции многих переменных, Известия высш. учебн. завед., матем., № 6 (1964), 104–115.
18. В. К. Иванов, Связь между ростом целой функции многих переменных и распределением особенностей ассоциированной с ней функции, Матем. сб., 43 (85), вып. 3 (1957), 367–378.
19. В. К. Иванов, Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов, Матем. сб., 47 (89), вып. 1 (1959), 1–16.
20. М. Ш. Ставский, Связь между ростом целой функции нескольких комплексных переменных и множеством особых точек ассоциированной с ней функции, Исслед. по совр. пробл. теории функций компл. перем., М., 1961, 286–293.
21. Н. И. Кобелева, Связь между ростом целой функции двух комплексных переменных и распределением особенностей ассоциированной с ней функции, Известия высш. учеб. завед., матем., № 3 (1962), 59–66.
22. Л. И. Ронкин, Об одном свойстве расположения особенностей на границе полицилиндра и применение его к целым функциям многих переменных, ДАН СССР, 153, № 2 (1963), 278–281.
23. В. К. Иванов, Об одной краевой задаче, связанной с аналитическими функциями двух комплексных переменных, Известия высш. учеб. завед., матем., № 6 (1960), 103–113.
24. M. Subotin, Sur les propriètès-limites du module des fonctions entières d'ordre fini Math. Ann., 104 (1931), 377–386.
25. V. Bernstein, Sur une generalisation de la methode de sommation exponentielle de M. Borel, C. r. Acad. sci., Paris, 194 (1932), 1887–1889, 2247.
26. V. Bernstein, Sulla crescenza delle transcendenti intere d'ordine finito, Memorielle d. Reale Accad. Italia, cl. sci. fis. matem. e natur., 4 (1933), 339–401.
27. А. Е. Аветисян, Об обобщении одной теоремы Г Полиа, ДАН СССР, 105, № 5 (1955), 885–888.
28. И. Ф. Лохин, О функциях, ассоциированных с целыми функциями конечного порядка, Ученые зап. Горьковск. унив-та, сер. физ.-матем. наук, 23 (1955), 20–23.
29. G. Valiron, Methodes de sommation et directions de Borel, Annali della R. scuola normale superiore di Pisa; sci. fis. e matem., ser. II, 2 (1933), 355–380.
30. A. G. Azpeitia, El orden precisado en las funciones enteras, Revista Matem. Hisp.—Americ., 14, N 1–6 (1954), 3–25, 83–103, 179–199, 221–234.

DAUGELIO KOMPLEKSINIŲ KINTAMŲJŲ SVEIKŲJŲ FUNKCIJŲ AUGIMO PATIKSLINTŲ CHARAKTERISTIKŲ KLAUSIMU

F GEČĖ

(*Reziumė*)

Straipsnyje autorius pilnai išdėsto savo anksčiau anonsuotus rezultatus [1].

ÜBER PRÄZISIERTE CHARAKTERISTIKEN DES ANWACHSENS EINER GANZEN FUNKTION MEHRERER KOMPLEXER VARIABLEN

F GETSCHE

(*Zusammenfassung*)

Der Artikel anthält die vollständige Darstellung der Ergebnisse des Verfassers, die in [1] annonciert wurden.