УДК–519.21

О МАРКОВСКОМ СВОЙСТВЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

1. Многие задачи, связанные с марковскими процессами, допускают эффективное решение, благодаря широко развитым аналитическим методам, систематическое развитие которых начато в известной работе А. Н. Колмогорова [1]. Поэтому важно иметь эффективные критерии для проверки того, обладает ли данный случайный процесс марковским свойством. Например, в ряде важных случаев задачи статистического последовательного анализа или управления случайных процессов по неполным данным можно редуцировать к соответствующим задачам полностью наблюдаемых достаточных статистик (см. [2]). Если же рассматриваемый набор достаточных статистик является марковским процессом, то таким образом первоначальные задачи сводятся к эффективно решаемым задачам.

Марковское свойство сравнительно легко проверяется, когда известно, что рассматриваемый случайный процесс является решением стохастического уравнения К. Ито, т.е. когда траектории этого процесса являются определенным образом построенными функционалами от винеровского процесса и пуассоновских случайных мер (см. [3–6]). Отсюда ясно, что для проверки того, обладает ли данный случайный процесс марковским свойством, достаточно указать эффективно проверяемые условия, при которых этот процесс является решением определенного стохастического уравнения К. Ито. Такие условия для одномерных непрерывных процессов получены Дж. Л. Дубом ([4], теорема 3.3 гл. VI).

В настоящей работе аналогичные условия даются в случае многомерных непрерывных случайных процессов, а также для некоторого класса процессов, траектории которых могут иметь разрывы первого рода. При этом мы существенно будем использовать результаты работы [7] о мартингалах, интегрируемых с квадратом (см. также [4], [8–9]).

2. Приведем некоторые необходимые обозначения и определения. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – основное вероятностное пространство, причем σ-алгебру $\mathscr{F}$ будем полагать пополненной по мере $\mathbf{P}$. Предположим, что имеется возрастающее семейство полных относительно меры $\mathbf{P}$ σ-алгебр $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$, $t \in [t_0, T]$.

$$\mathscr{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon} = \mathscr{F}_{t+}$$

Случайный процесс $X(t)$, $t \in [t_0, T]$, принимающий значения в некотором измеримом пространстве, будем называть согласованным с системой $\mathscr{F}_t$, если при каждом t случайная величина $X(t)$ является $\mathscr{F}_t$-измеримой.

Обозначим $\mathfrak{M}^{(m)}$-класс всех непрерывных справа интегрируемых с квадратом мартингалов относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, принимающих значения в m-мерном эвклидовом пространстве $(R_m, \mathcal{B}_m)$, т.е. класс случайных процессов $X(t)=(X_1(t), \ldots, X_m(t))$, $t\in[t_0, T]$, согласованных с $\mathcal{F}_t$, $\mathbf{M}\,|X(t)|^2<\infty$ и $\mathbf{M}(X(t)\,|\mathcal{F}_s)=X(s)$ с вероятностью 1 (п.в.) для всех $t_0\leqslant s<t\leqslant T$; $\mathcal{B}_m$ — σ-алгебра борелевских подмножеств R_m. Очевидно, что если $X(t)=(X_1(t), \ldots, X_m(t))\in\mathfrak{M}^{(m)}$, то $X_j(t)\in\mathfrak{M}^{(1)}$, $j=1, \quad m$. Подкласс $\mathfrak{M}^{(m)}$ непрерывных п. в. мартингалов будет обозначать $\mathfrak{M}_c^{(m)}$.

Далее, обозначим $\mathfrak{A}^+$ множество всех естественно возрастающих процессов $A(t)$, $t\in[t_0, \mathrm{T}]$, таких, что $A(t)$ согласован с $\mathcal{F}_t$ и $\mathbf{M}A(T)<\infty$ (определение естественно возрастающих процессов см. в [10]). Мы только отметим, что, в частности, процесс $A(t)\in\mathfrak{A}^+$, если он согласован с $\mathcal{F}_t$, $\mathbf{M}A(T)<\infty$, с вероятностью 1 $A(t)$, является непрерывной возрастающей функцией t и $A(0)=0$.

Наконец, пусть $\mathfrak{A}=\{A \quad A(t)=A_1(t)-A_2(t),\ A_i(t)\in\mathfrak{A}^+, i=1,2\}$ и $\mathfrak{A}_c=\{A \quad A\in\mathfrak{A}$ и $A(t)$ непрерывный по t п.в.$\}$.

Из результатов работ [7], [10—11] следует, что для любых $X, Y\in\mathfrak{M}^{(1)}$ существует единственный с точностью до эквивалентности процесс $\langle X, Y\rangle\in\mathfrak{A}$, такой, что

$$\mathbf{M}\Big[\big(X(t)-X(s)\big)\big(Y(t)-Y(s)\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big]=\mathbf{M}\Big[\big(\langle X, Y\rangle_t-\langle X, Y\rangle_s\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$

п.в. для всех $t_0\leqslant s<t\leqslant T$.

Для каждого $X\in\mathfrak{M}^{(1)}$ обозначим $L^{(1)}(\langle X\rangle)$ класс функций $\Phi(t)=\Phi(t, \omega)$, согласованных с $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{B}[t_0, T]\times\mathcal{F}_T$ — измеримых, где $\mathcal{B}[t_0, T]$ обозначена σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $[t_0, T]$, и таких, что

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{T}\Phi^2(s)\, d\langle X\rangle_s\right)<\infty; \quad \langle X\rangle=\langle X, X\rangle.$$

Следуя [7] (см. также [8—9]), для любого $X\in\mathfrak{M}^{(1)}$ и $\Phi\in L^{(1)}(\langle X\rangle)$ интеграл

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(s)\, dX(s)$$

можно определить как единственный мартингал $Y\in\mathfrak{M}^{(1)}$, такой, что

$$\langle Y, Z\rangle_t=\int_{t_0}^{t}\Phi(s)\, d\langle X, Z\rangle_s$$

п. в. для всех $Z\in\mathfrak{M}^{(1)}$. Отсюда, в частности, легко следует, что если

$$Y_1(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi_1(s)\, dX_1(s)$$

$$Y_2(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi_2(s)\, dX_2(s), \quad \Phi_i\in L^{(1)}(\langle X_i\rangle), \quad i=1, 2,$$

то с вероятностью 1

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle = \int_{t_0}^{t} \Phi_1(s)\, \Phi_2(s)\, d\langle X_1, X_2\rangle_s. \tag{1}$$

Пусть $X=(X_1, \quad X_m)\in\mathfrak{M}^{(m)}$. Класс матриц $\Phi=\|\Phi_{ij}\|_1^m$ таких, что $\Phi_{ij}\in L^{(1)}(\langle X_j\rangle)$, $i, j=1, \quad m$, обозначим $L^{(m)}(\langle X\rangle)$, а интеграл Y матрицы Φ по мартингалу X определяем равенством:

$$V(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(s)\,dX(s)=\Big(\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\Phi_{1k}(s\, dX_k(s), \qquad \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\Phi_{mk}(s)\,dX_k(s)\Big).$$

Тогда из (1) следует, что с вероятностью 1

$$\langle Y_k, Y_l\rangle = \sum_{i,j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\Phi_{ki}(s)\,\Phi_{lj}(s)\,d\langle X_i, X_j\rangle_s. \tag{2}$$

3. Пусть $X\in\mathfrak{M}_c^{(m)}$. Предположим, что существует симметрическая неотрицательно определенная матрица $\Psi(t)=\|\Psi_{ij}\|_1^m$ такая, что функции $\Psi_{ij}(t)$, $i, j=1, \ldots, m$, согласованы с $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{B}[t_0, T]\times\mathcal{F}_T$– измеримы и с вероятностью 1

$$\langle X_i, X_j\rangle_t=\int_{t_0}^{t}\Psi_{ij}(s)\,ds. \tag{3}$$

Существует ортогональная матрица (см. [12]) $U(t)=\|u_{ij}(t)\|_1^m$ такая, что $U(t)\,\Psi(t)\,U^{-1}(t)=\Lambda(t)$, где $\Lambda(t)=\|\lambda_{ij}(t)\|_1^m$ – диагональная, $\lambda_{ij}(t)=\lambda_i(t)\,\delta_{ij}$, $\lambda_1(t)\geqslant\lambda_2(t)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m(t)\geqslant 0$; δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим $b_k(t)=\Big(\lambda_k^{\frac{1}{2}}(t)\,u_{k1}(t), \ldots, \lambda_k^{\frac{1}{2}}(t)\,u_{km}(t)\Big)$, $k=1, \quad, m$, $\Lambda_l(t)=\|\lambda_{ij}^{(l)}(t)\|$, $l=1, 2$, – диагональные матрицы, $\lambda_{ij}^{(1)}(t)=\lambda_i^{-\frac{1}{2}}(t)\,\delta_{ij}$ при $\lambda_i(t)>0$ и $=0$ при

$$\lambda_i(t)=0,\quad \lambda_{ij}^{(2)}=\lambda_i^{\frac{1}{2}}(t)\,\delta_{ij}.$$

Предположим далее, что почти для всех (t, ω) по мере $\mu\times\mathrm{P}$ ((t, ω) п.в.), где μ – мера Лебега на $\mathcal{B}[t_0, T]$, матрица $\Psi(t)$ имеет ранг r, $1\leqslant r\leqslant m$. При этих предположениях верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Существует r-мерный винеровский процесс $w^{(r)}(t)=(w_1(t), \ldots, w_r(t))$, согласованный с $\mathcal{F}_t$, такой, что $w^{(r)}(t)-w^{(r)}(s)$ не зависит от $\mathcal{F}_s$, $t_0\leqslant s<t\leqslant T$, и с вероятностью* 1

$$X(t)=X(t_0)+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}b_k(s)\,dw_k(s).$$

Доказательство. Из ортогональности матрицы $U(t)$ имеем, что

$$\sum_{k=1}^{m}u_{ik}(t)\,u_{jk}(t)=\delta_{ij} \tag{4}$$

при всех $i, j=1, \quad.., m$. В частности, $u_{ij}^2(t)\leqslant 1$. Отсюда следует, что $U\in L^{(m)}(\langle X\rangle)$, так как

$$\mathbf{M}\Big[\int_{t_0}^{T}u_{ij}^2(s)\,d\langle X_j\rangle_s\Big]\leqslant\mathbf{M}\Big[\int_{t_0}^{T}\Psi_{ij}(s)\,ds\Big]<\infty.$$

Положим

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t} U(s)\,dX(s).$$

Из (2) и (3) находим, что с вероятностью 1

$$\langle Y_k,\ Y_l\rangle_t=\sum_{i,\,j=1}^{m}\int_{t_0}^{t} u_{ki}(t)\,u_{lj}(t)\,\psi_{ij}(s)\,ds.$$

Но,

$$\Psi(t)=U^{-1}(t)\,\Lambda(t)\,U(t)$$

$$\Psi_{ij}(t)=\sum_{p=1}^{m} u_{pi}(t)\,u_{pj}(t)\,\lambda_p(t).$$

Тогда

$$\langle Y_k,\ Y_l\rangle_t=\int_{t_0}^{t}\Big[\sum_{p=1}^{m}\lambda_p(s)\Big(\sum_{i=1}^{m}u_{ki}(s)\,u_{pi}(s)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}u_{lj}(s)\,u_{pj}(s)\Big)\Big]ds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\Big(\sum_{p=1}^{m}\delta_{kp}\,\delta_{lp}\,\lambda_p(s)\Big)ds=\delta_{kl}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)\,ds. \tag{5}$$

Очевидно, что $\Lambda_1\in L^{(m)}(\langle Y\rangle)$. Пусть

$$w(t)=\int_{t_0}^{t}\Lambda_1(s)\,dY(s).$$

Из (5) и предположений леммы имеем, что с вероятностью 1

$$\langle w_i,\ w_j\rangle_t=\begin{cases}\delta_{ij}(t-t_0) & \text{при } 1\leqslant i,\ j\leqslant r,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

По известной теореме П. Леви (см. [13], [4], [7]) процесс $w^{(r)}(t)=\big(w_1(t),\ldots,w_r(t)\big)$ является винеровским процессом. Далее, поскольку в силу инвариантности следа матрицы при ортогональных преобразованиях

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(t)=\sum_{k=1}^{m}\Psi_{kk}(t),$$

$$\mathbf{M}\Big(\int_{t_0}^{T}\lambda_k(s)\,ds\Big)<\infty$$

для всех $k=1,\ \ \ \ \ m$. Значит, $\Lambda_2\in L^{(m)}(\langle w\rangle)$, и непосредственно проверяется, что

$$\int_{t_0}^{t}\Lambda_2(s)\,dw(s)=Y(t)$$

п.в. Наконец, $U^{-1}\in L^{(m)}(\langle Y\rangle)$ и с вероятностью 1

$$\int_{t_0}^{t}U^{-1}(s)dY(s)=X(t)-X(t_0).$$

С другой стороны,

$$\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s)\,dY(s)=\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} b_k(s)\,dw_k(s).$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Замечание 1. Пусть $r_1=\max\{k:\lambda_k(t,\omega)>0(t,\omega)$ п. в.$\}$ и $r_2=\min\{k:\lambda_k(t,\omega)=0(t,\omega)$ п.в.$\}$. Очевидно, всегда $0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant m$. В лемме 1 рассматривался случай, когда, $r_1=r_2=r\geqslant 1$. Если же $r_1<r_2$, то утверждение леммы остается в силе с $r=r_2$, если к основному ω-пространству присоединить r_2-r_1-мерный винеровский процесс (см. [4]).

4. Далее мы будем рассматривать случайный процесс $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_m(t))$, $t\in[t_0,T]$, почти все траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. Предположим также, что $\tilde{\mathscr{F}}_t$ — σ-алгебры, порожденные случайными величинами $x(s)$, $t_0\leqslant s\leqslant t$, пополненные по мере $\mathbf{P}$, а $\mathscr{F}_t=\tilde{\mathscr{F}}_{t+0}$.

Предположим сначала, что $x(t)$, $t\in[t_0,T]$ — непрерывный с вероятностью 1 процесс. Пусть существуют функция $a(t,x)=\big(a_1(t,x),\ldots,a_m(t,x)\big)$ и симметрическая неотрицательно определенная матрица $A(t,x)=\|a_{ij}(t,x)\|_1^m$, такие, что $a_k(t,x)$, $a_{ij}(t,x)$, $i,j=1,\ldots,m$, $B[t_0,T]\times B_m$ — измеримы и процесс

$$\tilde{x}(t)=x(t)-\int_{t_0}^{t} a\big(s,x(s)\big)\,ds$$

является интегрируемым с квадратом мартингалом относительно σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, причем с вероятностью 1

$$\langle\tilde{x}_i,\tilde{x}_j\rangle_t=\int_{t_0}^{t} a_{ij}\big(s,x(s)\big)\,ds.$$

Выберим ортогональную матрицу $U(t,x)=\|u_{ij}(t,x)\|_1^m$ так, что $U(t,x)\times A(t,x)\,U^{-1}(t,x)=\Lambda(t,x)=\|\lambda_{ij}(t,x)\|_1^m$, где $\lambda_{ij}(t,x)=\delta_{ij}\lambda_i(t,x)$, $\lambda_1(t,x)\geqslant\lambda_2(t,x)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m(t,x)\geqslant 0$, $u_{ij}(t,x)$, $\lambda_i(t,x)$, $\mathscr{B}[t_0,T]\times\mathscr{B}_m$ — измеримы. Обозначим $b_k(t,x)=\big(\lambda_k^{1/2}(t,x)\,u_{k1}(t,x),\cdots,\lambda_k^{1/2}(t,x)\,u_{km}(t,x)\big)$, $k=1,\cdots,m$.

Теорема 1. *Пусть матрица $A(t,x)$ имеет ранг r, независящий от t и x. Тогда при вышеделанных предположениях существует r-мерный винеровский процесс $w(t)=\big(w_1(t),\ldots,w_r(t)\big)$, такой, что $x(t)$ является решением стохастического уравнения К. Ито*

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} a\big(s,x(s)\big)\,ds+\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} b_k\big(s,x(s)\big)\,dw_k(s). \tag{6}$$

Доказательство. По лемме 1 существует r-мерный винеровский процесс $w(t)$, такой, что с вероятностью 1

$$\tilde{x}(t)=\tilde{x}(t_0)+\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} b_k\big(s,x(s)\big)\,dw_k(s).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы, поскольку

$$\tilde{x}(t)=\tilde{x}(t_0)-\int_{t_0}^{t} a\Big(s,\ x(s)\Big)\,ds, \text{ а } \tilde{x}(t_0)=x(t_0).$$

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и уравнение* (6) *имеет лишь единственное непрерывное решение, то процесс* $x(t)$, $t\in[t_0, T]$ *обладает марковским свойством, т. е. с вероятностью* 1

$$\mathbf{P}\,\{x(t)\in\Gamma\mid\mathcal{F}_s\}=\mathbf{P}\,\{x(t)\in\Gamma\mid x(s)\}$$

для всех $t_0\leqslant s<t\leqslant T$ *и* $\Gamma\in\mathcal{B}_m$. (По поводу условий единственности уравнения (6) см., например, [5], [14].)

Замечание 2. Если ранг матрицы $A(t, x)$ зависит от t и x, то утверждение теоремы 1 остается верным после присоединения к основному ω — пространству винеровского процесса соответствующей размерности (см. замечание 1).

5. Рассмотрим теперь случай, когда траектории процесса $x(t)$, $t\in[t_0, T]$ непрерывны справа и имеют пределы слева.

Обозначим

$$p(t,\ \Gamma)=\sum_{t_0\leqslant s\leqslant t}\chi_\Gamma\Big(x(s)-x(s-0)\Big)$$

для всех $\Gamma\in\mathcal{B}_m\cap U_\varepsilon$, где $\chi_\Gamma(x)$ — характеристическая функция множества Γ, $x(s-0)=\lim\limits_{\delta\downarrow 0}x(s-\delta)$, $U_\varepsilon=\{x\ \mid |x|\geqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$.

Предположим, что существует функция $\Pi(t,\ x,\ \Gamma)$, $\mathcal{B}[t_0,\ T]\times\mathcal{B}_m$-измеримая при фиксированном Γ, являющаяся мерой на $\mathcal{B}_m$ при любых $(t,\ x)$, такая, что для всех

$$\varepsilon>0 \text{ и } \Gamma\in\mathcal{B}_m\cap U_\varepsilon\mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{T}\Pi\Big(s,\ x(s),\ U_\varepsilon\Big)\,ds\right]<\infty,$$

$$q(t,\ \Gamma)=p(t,\ \Gamma)-\int_{t_0}^{t}\Pi\Big(s,\ x(s),\ \Gamma\Big)\,ds\in\mathfrak{M}^{(1)}$$

причем с вероятностью 1

$$\langle q(t,\ \Gamma)\rangle=\int_{t_0}^{t}\Pi\Big(s,\ x(s),\ \Gamma\Big)\,ds.$$

Поскольку для любых

$$X,\ Y\in\mathfrak{M}^{(1)}\ \langle X,\ Y\rangle=\frac{1}{4}\,\big(\langle X+Y,\ X+Y\rangle-\langle X-Y,\ X-Y\rangle\big)$$

п. в., то для $\Gamma_1,\ \Gamma_2\in\mathcal{B}_m\cap U_\varepsilon$ имеем, что п. в.

$$\langle q(t,\ \Gamma_1),\ q(t,\ \Gamma_2)\rangle=\langle q(t,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2)\rangle=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\Pi\Big(s,\ x(s),\ \Gamma_1\cap\Gamma_2\Big)\,ds. \tag{7}$$

Пусть $f(t, u)=f(t, u, \omega) - B[t_0, T] \times \mathscr{B}_m \times \mathscr{F}_T$ — измеримая функция, для каждого фиксированного u согласованная с $\mathscr{F}_t$,

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{T} f^2(s, u)\, ds\right) < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{T}\left(\int_{R_m} f^2(s, u)\, \Pi\left(s, x(s), du\right)\right) ds\right] < \infty .$$

Класс таких функций обозначим $F_Q^{(1)}$.

Пусть

$$F_Q^{(m)} = \{ f : f = (f_1, \ldots, f_m), \quad f_k \in F_Q^{(1)}, \quad k = 1, \ldots, m\}.$$

Незначительной модификацией рассуждений в [7] (см. также [3], [5]), используя (7), для всех $f \in F_Q^{(1)}$, можно определить интеграл $Q_f(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u)\, q\,(ds, du)$ как единственный с точностью до эквивалентности мартингал $Q_f \in \mathfrak{M}^{(1)}$ такой, что:

1) если

$$f(s, u) = \Phi(s)\, \chi_\Gamma(u), \quad \Phi \in L^{(1)}\left(\langle q(\cdot, \Gamma)\rangle\right),$$

$$\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \qquad Q_f(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)\, q\,(ds, \Gamma);$$

2) если $f_1, f_2 \in F_Q^{(1)}$ и a_1, a_2 — действительные числа, то

$$Q_{a_1 f_1 + a_2 f_2} = a_1 Q_{f_1} + a_2 Q_{f_2};$$

3) $$\mathbf{M}\, Q_f^2(t) = \mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{t}\left(\int_{R_m} f^2(s, u)\, \Pi\left(s, x(s), du\right)\right) ds\right]$$

Отметим, что в [7] предполагается, что $x(t)$ — процесс Ханта, и основную роль при построении интеграла Q_f играет система Леви, введенная С. Ватанабе [15]. В нашем случае аналогичную роль играет пара $(\Pi(t, x, \Gamma), t)$.

Для $\mathscr{B}[t_0, T] \times \mathscr{B}_m \times \mathscr{F}_T$ — измеримых функций $g(t, u) = g(t, u, \omega)$, при каждом фиксированном u и согласованных с $\mathscr{F}_t$, интеграл

$$P_g(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{R_m}^{t} g(s, u)\, p\,(ds, du)$$

определяем как сумму

$$\sum_{\substack{t_0 \leqslant s \leqslant t \\ |x(s) - x(s-0)| > 0}} g\left(s, x(s) - x(s-0)\right),$$

предполагая, что эти суммы сходятся п. в.

Пусть $g = (g_1, \ldots, g_N)$ — набор таких функций,

$$f = (f_1, \ldots, f_N) \in F_Q^{(N)} \quad \text{и} \quad f_i g_i = 0, \quad i = 1, \qquad N.$$

Обозначим

$$H_i(t) = X_i(t) + A_i(t) + Q_{f_i}(t) + P_{g_i}(t),$$

где

$$X_i \in \mathfrak{M}_c^{(1)}, \quad A_i \in \mathfrak{A}_c, \quad i = 1, \ldots, N, \quad H(t) = \left(H_1(t), \ldots, H_N(t)\right)'.$$

Далее нам понадобится следующая важная формула, являющаяся обобщенной формулой К. Ито [16] (см. [6–9], [17]).

Лемма 2. *Пусть* $F(x_1, \ldots, x_N)$ – *дважды непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что либо* $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, *либо* f_i, $i=1, \ldots, N$, *ограничены. Тогда верна формула*:

$$F\big(H(t)\big)-F\big(H(t_0)\big)=\sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(H(s)\big)\,dX_i(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{R_m}\Big[F\big(H(s)+f(s, u)\big)-F\big(H(s)\big)\Big]\,q(ds, du)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\Big\{\int_{R_m}\Big[F\big(H(s)+f(s, u)\big)-F\big(H(s)\big)-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}f_i(s, u)\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(H(s)\big)\Big]\Pi\big(s, x(s), du\big)\Big\}ds+$$

$$+P_G(t)+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(H(s)\big)\,dA_i(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\big(H(s)\big)\,d\langle X_i, X_j\rangle_s, \tag{8}$$

где

$$G(s, u)=F\big(H(s)+g(s, u)\big)-F\big(H(s)\big).$$

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 5.1 в [7] (см. также [9], [17]), и мы его опускаем.

Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{T}\left(\int_{|u|\leqslant\varepsilon}|u|^2\,\Pi\big(s, x(s), du\big)\right)ds\right]=0. \tag{9}$$

Обозначим $g_i(u)=u_i$ при $|u|>1$, и $=0$ при $|u|\leqslant 1$, $f_i(u)=u_i-g_i(u)$, $i=1, \ldots, m$, $g=(g_1, \ldots, g_m)$, $f=(f_1, \ldots, f_m)$.

Поскольку процесс $x(t)$ не имеет разрывов второго рода, то интегралы $P_{g_i}(t)$ определены. В силу условия (9) $f\in F_Q^{(m)}$. Пусть $P_g(t)=\big(P_{g_1}(t), \ldots, P_{g_m}(t)\big)$, $Q_f(t)=\big(Q_{f_1}(t), \ldots, Q_{f_m}(t)\big)$, $Q_f^{\varepsilon}(t)=\big(Q_{f_1\chi_{u_\varepsilon}}(t), \quad Q_{f_m\chi_{u_\varepsilon}}(t)\big)$, где χ_{u_ε} – характеристическая функция множества U_ε. Обозначим $x_\varepsilon(t)=x(t)-P_g(t)-$ $-Q_f^{\varepsilon}(t)$.

Покажем, что можно выбрать такую последовательность $\varepsilon_k\downarrow 0$ $k\to\infty$, что $x_{\varepsilon_k}(t)\to x_0(t)=x(t)-P_g(t)-Q_f(t)$ с вероятностью 1 равномерно относительно $t\in[t_0, T]$. Так как $x_\varepsilon(t)$ не имеет разрывов, превосходящих по модулю ε, то отсюда будет следовать, что $x_0(t)$ с вероятностью 1 непрерывен.

Лемма 3. *Можно выбрать последовательность* $\varepsilon_k \downarrow 0$ *при* $k \to \infty$ *так, что* $Q_f^{\varepsilon_k}(t) \to Q_f(t)$ *с вероятностью* 1 *равномерно по* $t \in [t_0, T]$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{M}\,|Q_f^{\varepsilon}(t) - Q_f(t)|^2 \leqslant \mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{T}\left(\int_{|u| \leqslant \varepsilon} |u|^2\, \Pi\big(s,\, x(s),\, du\big)\right) ds\right] \to 0$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, то $Q_f^{\varepsilon}(t) \to Q_f(t)$ в среднем квадратическом. Пусть $\{\delta_n\}$ — любая монотонно сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда при $p \geqslant q$

$$Q_f^{\delta_p}(t) - Q_f^{q}(t) = \int^{t} \int_{\delta_p \leqslant |u| < \delta_q} uq\,(ds,\, du)$$

и по известному неравенству для мартингалов (см. [4])

$$\lim_{p,\, q \to \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |Q_f^{\delta_p}(t) - Q_f^{\delta_q}(t)| > \delta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{q \to \infty} \frac{1}{\delta^2}\, \mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{T}\left(\int_{|u| \leqslant \delta_q} |u|^2\, \Pi\big(s,\, x(s),\, du\big)\right) ds\right] = 0$$

для каждого $\delta > 0$.

Пусть $\{n_k\}$ — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел, такая, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\left|Q_f^{\delta_p}(t) - Q_f^{\delta_q}(t)\right| > \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}$$

при всех $p,\ q \geqslant n_k$. Обозначим

$$A_k = \left\{\omega\colon \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\left|Q_f^{\delta_{n_k}}(t) - Q_f^{\delta_{n_k+1}}(t)\right| > \frac{1}{2^k}\right\},$$

$$B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Если $\omega \bar{\in} B_k$, то для всех $i,\ j \geqslant k\ (i < j)$

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\left|Q_f^{\delta_{n_i}}(t) - Q_f^{\delta_{n_j}}(t)\right| \leqslant \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\left|Q_f^{\delta_{n_i}}(t) - Q_f^{\delta_{n_{i+1}}}(t)\right| + \cdots +$$

$$+ \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T}\left|Q_f^{\delta_{n_{j-1}}}(t) - Q_f^{\delta_{n_j}}(t)\right| \leqslant \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{2^{j-1}} \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$$

Значит, при $\omega \bar{\in} B_k$ последовательность $Q_f^{\delta_{n_j}}(t)$ сходится равномерно по t. Имеем, что

$$\mathbf{P}\{B_k\} \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \mathbf{P}\{A_k\} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

Равномерная сходимость по t, очевидно, имеет место при всех

$$\omega \in \Omega \diagdown \bigcup_{k=l}^{\infty} B_k$$

для любого l. Поэтому рассходимость возможна лишь при

$$\omega \in \Omega \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} \left(\Omega \setminus \bigcup_{k=l}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} B_k.$$

Но

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} B_k\right\} = \lim_{l\to\infty} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=l}^{\infty} B_k\right\} \leqslant \lim_{l\to\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

Итак, если выбрать $\varepsilon_k = \delta_{n_k}$, то сходимость $Q_f^{\varepsilon_k}(t)$ к пределу будет с вероятностью 1 равномерной по $t \in [t_0, T]$. Лемма 3 доказана.

6. Пусть $\Pi(t, x, \Gamma) = \Pi(t, \Gamma)$ для всех $x \in R_m$

и
$$\int_{t_0}^{T} \left(\int_{|u| \leqslant 1} |u|^2 \, \Pi(s, du)\right) ds < \infty.$$

На кольце $\mathbf{B}$ борелевских множеств $B \in \mathscr{B}[t_0, T] \times \mathscr{B}_m$,

$$\int_B \Pi(s, du)\, ds < \infty,$$

зададим меру $p(B)$ равенством

$$p([t_1, t_2] \times \Gamma) = p(t_2, \Gamma) - p(t_1, \Gamma), \quad [t_1, t_2] \times \Gamma \in \mathbf{B}.$$

Теорема 2. *Мера $p(B)$ является пуассоновской, т.е. $p(B)$ имеет пуассоновское распределение вероятностей с параметром $\int_B \Pi(s, du)\, ds$ и на непересекающихся множествах из $\mathbf{B}$ принимает независимые значения.*

Кроме того, если существует

$$X = (X_1, \ldots, X_r) \in \mathfrak{M}_c^{(r)}, \quad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

такой, что

$$\langle X_i, X_j \rangle_t = \int_{t_0}^{t} b_{ij}(s)\, ds, \quad i, j = 1,$$

то мера p и X независимы, а процесс X является гауссовским процессом с независимыми приращениями.

Доказательство. Пусть

$$\tilde{X}(t) = \Big(X_1(t), \ldots, X_r(t), \underbrace{0, \ldots, 0}_{r \text{ раз}}\Big) \quad \text{и} \quad Y(t) = \tilde{X}(t) + P_g(t) + Q_f(t).$$

Достаточно доказать, что процесс $Y(t)$, $t \in [t_0, T]$ является процессом с независимыми приращениями. Утверждения теоремы тогда будут следовать из известных свойств таких процессов (см., например, [18]). Эти свойства можно было доказать и непосредственно, используя формулу (8).

Покажем, что для любых $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ $Y(t_2) - Y(t_1)$ не зависит от $\mathscr{F}_{t_1}$. Воспользуемся формулой (8), положив

$$N = m, \quad H(t) = Y(t), \quad F(x) = e^{i(z, x)}, \quad x, z \in R_m, \quad (x, z) = \sum_{i=1}^{m} x_i z_i.$$

Имеем при $t \geqslant t_1$, что

$$e^{i(z,\,Y(t))}-e^{i(z,\,Y(t_1))}=\sum_{k=1}^{r} iz_k \int_{t_1}^{t} e^{i(z,\,Y(s))}\,dX_k(s)+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\int_{|u|\leqslant 1}\left[e^{i(z,\,Y(s)+u)}-e^{i(z,\,Y(s))}\right]q(ds,\,du)+$$

$$+\int^{t}\left\{\int_{|u|\leqslant 1}\left[e^{i(z,\,Y(s)+u)}-e^{i(z,\,Y(s))}-\sum_{k=1}^{m} iz_k u_k\, e^{i(z,\,Y(s))}\right]\Pi(s,\,du)\right\}ds+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\int_{|u|>1}\left[e^{i(z,\,Y(s)+u)}-e^{i(z,\,Y(s))}\right]p(ds,\,du)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{r} z_k z_l \int_{t_1}^{t} e^{i(z,\,Y(s))}\,b_{kl}(s)\,ds.$$

Отсюда легко видно, что

$$e^{i(z,\,Y(t)-Y(t_1))}-1=\left(Z(t)-Z(t_1)\right)e^{-i(z,\,Y(t_1))}+$$

$$+\int_{t_1}^{t} e^{i(z,\,Y(s)-Y(t_1))}\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{r} z_k z_l b_{kl}(s)+\int_{|u|\leqslant 1}(e^{i(z,\,u)}-1-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m} iz_k u_k)\,\Pi(s,\,du)+\int_{|u|>1}(e^{i(z,\,u)}-1)\,\Pi(s,\,du)\right]ds, \tag{10}$$

где

$$Z(t)=Z_1(t)+iZ_2(t), \quad \text{а} \quad Z_1,\ Z_2\in\mathfrak{M}^{(1)}.$$

Поскольку тогда с вероятностью 1

$$\mathrm{M}\left[\left(Z(t)-Z(t_1)\right)e^{-i(z,\,Y(t_1))}\,\middle|\,\mathscr{F}_{t_1}\right]=0,$$

то обозначив

$$\varphi_{z,\,A}(t)=\int_{A} e^{i(z,\,Y(t)-Y(t_1))}\,dP$$

для любого $A\in\mathscr{F}_{t_1}$ из (10) получим, что $\varphi_{z,\,A}(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\varphi_{z,\,A}(t)=\mathbf{P}\{A\}+\int_{t_1}^{t}\varphi_{z,\,A}(s)\,\psi(z,\,s)\,ds,$$

где

$$\psi(z,\,s)=-\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{r} z_k z_l b_{kl}(s)+\int_{|u|\leqslant 1}\left(e^{i(z,\,u)}-1-\right.$$

$$\left.-i\sum_{k=1}^{m} z_k u_k\right)\Pi(s,\,du)+\int_{|u|>1} e^{i(z,\,u)}-1)\,\Pi(s,\,du).$$

Отсюда находим, что

$$\varphi_{z,A}(t) = \mathbf{P}\{A\} \exp\left\{\int_{t_1}^{t} \psi(z, t)\, ds\right\}.$$

Итак, мы получили, что

$$\mathbf{M}\left[e^{i\left(z,\ Y(t)-Y(t_1)\right)} \Big| \mathscr{F}_{t_1}\right] = \exp\left\{\int_{t_1}^{t} \psi(s, z)\, ds\right\}.$$

Теорема 2 доказана.

7. Предположим теперь, что существуют функция

$$a(t, x) = \left(a_1(t, x), \ldots, a_m(t, x)\right)$$

и симметрическая неотрицательно определенная матрица $A(t, x)$, такие, что функции $a_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, \ldots, m$, измеримы по совокупности переменных

$$(t, x) \quad \text{и} \quad \tilde{x}(t) = x_0(t) - \int_{t_0}^{t} a(s, x(s))\, ds$$

являются интегрируемым с квадратом мартингалом, таким, что

$$\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle_t = \int_{t_0}^{t} a_{ij}\left(s, x(s)\right) ds.$$

Как следует из леммы 1, если матрица $A(t, x)$ имеет постоянный ранг r, то существует r-мерный винеровский процесс

$$w(t) = \left(w_1(t), \ldots, w_r(t)\right)$$

такой, что в обозначениях теоремы 1

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_0) + \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{t} b_k\left(s, x(s)\right) dw_k(s).$$

Заметим, что $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, и если $\Pi(t, x, \Gamma) = \Pi(t, \Gamma)$, то по теореме 2 мера $p(B)$ не зависит от $w(t)$.

Теорема 3. *При этих предположениях процесс $x(t)$ является решением стохастического уравнения К. Ито*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a\left(s, x(s)\right) ds + \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{t} b_k\left(s, x(s)\right) dw_k(s) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int_{|u| \leq 1} u\, q(ds, du) + \int_{t_0}^{t} \int_{|u|>1} u\, p(ds, du). \tag{11}$$

Доказательство следует из сделанных выше замечаний и теоремы 2.

Следствие 2. *Если уравнение* (11) *имеет единственное непрерывное справа решение, то процесс $x(t)$, $t \in [t_0, T]$ будет марковским процессом.* (Об условиях единственности решения уравнения (11) см., например, [3], [5], [17].)

Следствие 3. *Если выполнены условия теоремы* 3, *а* $a(t, x)$ *и* $A(t, x)$ *не зависят от* x, *то процесс* $x(t)$, $t \in [t_0, T]$ *будет процессом с независимыми приращениями.*

Замечание 3. Если ранг матрицы $A(t, x)$ зависит от t и x, то заключения теоремы и следствий останутся в силе после присоединения к основному w-пространству винеровского процесса соответствующей размерности.

Замечание 4. Вместо предположений, используемых в теоремах 1—3, можно было бы указать условия на локальное поведение траекторий изучаемого процесса, аналогичные тем, которые даются Дж. Л. Дубом ([4], теорема 3.3 гл. VI).

Замечание 5. Интуитивно ясно, что при предположениях теоремы 3, за исключением того, что $\Pi(t, x, \Gamma)$ не зависит от x, при естественных ограничениях на $a(t, x)$, $A(t, x)$ и $\Pi(t, x, \Gamma)$ процесс $x(t)$, $t \in [t_0\ T]$ должен обладать марковским свойством, но для доказательства этого утверждения, по-видимому, понадобятся другие соображения, нежели используемые здесь.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
17. IV. 1968

Литература

1. А. Н. Колмогоров, Аналитические методы в теории вероятностей, УМН,5 (1938),5—41.
2. А. Н. Ширяев, Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов, Trans. IV Prague Conference on information theory..., Prague, 1967, 131—203.
3 K. Itô, On stochastic differential equations, Mem. Am. Math. Soc., 4 (1951), 51—89.
4. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
5. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд. КГУ, Киев, 1961.
6. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
7 H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209—245.
8. А. В. Скороход, О локальном строении непрерывных марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен., XI, 3 (1966), 381—423.
9. А. В. Скороход, Однородные марковские процессы без разрывов второго рода, Теория вероятн. и ее примен., XII, 2(1967), 258—278.
10. P. A. Meyer, Decompositions of supermartingales; The uniqueness theorem, Ill. J. Math., 7 (1963), 1—17.
11. P. A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Ill. J. Math., 6 (1962), 193—205.
12. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., «Наука», 1966.
13. P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948.
14. И. В. Гирсанов, О стохастическом интегральном уравнении Ито, ДАН СССР, 138, 1(1961), 18—21.
15. S. Watanabe, On discontinuous additive functionales and Lévy measure of Markov processes, Japan J. Math., 36 (1964), 53—70.
16. K. Itô, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J., 3 (1951), 55—65.
17. И. И. Гихман, А. Я. Дороговцев, Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, Укр. матем. ж., XVII, 6(1965), 3—21.
18. А. В. Скороход, Случайные процессы с независимыми приращениями, «Наука», М., 1964.

APIE ATSITIKTINIŲ PROCESŲ MARKOVO SAVYBĘ

B. GRIGELIONIS

(*Reziumė*)

Darbe gautos sąlygos, kai atsitiktinis procesas, neturintis antros rūšies trūkių, yra apibrėžtos K. Ito stochastinės lygties sprendinys.

ON MARKOV PROPERTY OF STOCHASTIC PROCESSES

B. GRIGELIONIS

(*Summary*)

In the paper conditions, when right continuous stochastic process is a solution of defined stochastic equation of K. Itô, are given.