1968

УДК – 517.944

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

И. В. КИСЕЛЮС

В этой статье исследуются решения дифференциального уравнения вида

$$\sum_{j=1}^{m} F_j(z_1, \qquad z_m)\, z_j \frac{\partial u}{\partial z_j} + \varphi(z_1, \qquad z_m)\, u = 0, \tag{1}$$

где F_j $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $j=1, 2, \qquad m$ и φ $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ аналитические функции в полицилиндре $|z_1| < R$, $|z_2| < R$, $\qquad |z_m| < R$.

В работах [1]. [2] и [3] рассматриваются решения типа

$$u = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, \qquad z_m), \tag{2}$$

с постоянными λ_1, λ_2, $\qquad \lambda_m$ и аналитической функцией $f(z_1, \qquad z_m)$, уравнения (1), при условии, что форма

$$\sum_{j=1}^{m} F_j(0, 0, \qquad 0)\, \eta_j \neq 0$$

для всех неотрицательных η_1, η_2, $\qquad \eta_m$; $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m = 1$.

В настоящей статье мы укажем необходимые и достаточные условия существования решений типа (2) некоторых уравнений первого порядка вида (1) в случае, когда условие (3) не выполняется, в предположении, что F_j $(0, 0, \qquad 0)$ являются иррациональными числами.

Для дальнейших исследований нам понадобятся две теоремы, в теории чисел.

Теорема Лиувилля. *Если Θ – действительное алгебраическое число степени $n \geqslant 2$, то для любой пары целых чисел имеет место неравенство*

$$\left| \Theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}, \tag{4}$$

где C положительная постоянная, не зависящая от p и q.

Теорема Рота. *Пусть Θ – алгебраическое число степени $n \geqslant 2$ и $\delta > 0$ как угодно мало. Тогда существует только конечное число пар целых чисел p, $q > 0$, таких, что*

$$\left| \Theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

(см. [4], стр. 128).

Непосредственно из теоремы Рота следует, что для любых целых p и q имеет место неравенство

$$\left|\Theta-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^{2+\delta}}, \tag{5}$$

где $C>0$ некоторая постоянная, не зависящая от p и q.

Для дальнейших исследований нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — алгебраические числа и $i_1, \qquad i_m$ целые неотрицательные числа $(i_1+i_2+\ldots+i_m \geqslant 1)$; если $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m \neq 0$, то имеет место неравенство*

$$|i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+ \qquad +i_m\alpha_m| > \frac{C}{(i_1+i_2+\ldots+i_m)^n},$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от $i_1, i_2, \qquad$, а $n>0$ целое число.

Доказательство. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_s \neq 0$; $s \leqslant m$ (в противном случае можно менять порядок индексов чисел $i_1, i_2, \qquad i_m$). Выражение $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+ +\ldots+i_s\alpha_s$ представим в виде $\alpha_s\left(i_1\frac{\alpha_1}{\alpha_s}+i_2\frac{\alpha_2}{\alpha_s}+\ldots+i_{s-1}\frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}+i_s\right)$. Алгебраические числа $\frac{\alpha_j}{\alpha_s}$ являются нулями некоторых полиномов

$$P_j(x)=\sum_{k=0}^{n_j} a_{n_j-k}x^{n_j-k} \tag{6}$$

Пусть t_j — некоторый параметр. Положим $t_jx=y$. Тогда

$$Q_j(y)=P_j\left(\frac{1}{t_j}y\right)=P_j(x)=\sum_{k=0}^{n_j}\frac{a_{n_j-k}}{t_j^k}y^{n_j-k}, \tag{7}$$

и уравнение $Q_j(y)=0$ имеет корень $y=t_j\frac{\alpha_j}{\alpha_s}$ Обозначим

$$t_j\frac{\alpha_j}{\alpha_s}=\beta_j, \quad j=1, 2, \ldots, s-1.$$

Через β_{jk}, $k=1, 2, \ldots, n_j$ обозначим все корни уравнения $Q_j(y)=0$, причем мы считаем $\beta_{j1}=\beta_j$.

Образуем теперь полином

$$\Pi_1(y)=\prod_{i_1=1}^{n_1}\prod_{i_2=1}^{n_2}[y-(\beta_{1i_1}+\beta_{2i_2})]=\sum_{k=0}^{n=n_1n_2}A_k^{(1)}y^{n-k}, \tag{8}$$

нулем которого является также и число $\beta_{11}+\beta_{21}=\beta_1+\beta_2$. Выражение (8), как легко видеть, является симметрическим полиномом от $\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1n_1}$ и $\beta_{21}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{2n_2}$. Следовательно, коэффициенты $A_k^{(1)}$ в (8) являются многочленами с рациональными коэффициентами от коэффициентов полиномов $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ (см. [5], стр. 217, 225). Так как коэффициенты $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ являются степенями одночленов от $\frac{1}{t_1}$ и $\frac{1}{t_2}$ (см. (7)) то коэффициенты полинома $\Pi_1(y)$ в (8) оказывается полиномами от t_1 и t_2 с рациональными коэффициентами. Обозначим нули полинома (8) через $\gamma_{i_1i_2}=\beta_{1i_1}+\beta_{2i_2}$; $i_1=1, 2, \ldots, n_1$, $i_2=1, 2, \ldots; n_2$.

Из полиномов $\Pi_1(y)$ и $Q_3(y)$, по предыдущему, образуем новый полином

$$\Pi_2(x)=\prod_{i_1=1}^{n_1}\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}[y-(\gamma_{i_1i_2}+\beta_{3i_3})]=\sum_{k=0}^{n=n_1n_2n_3}A_k^{(2)}y^{n-k}.$$

Положим $\gamma_{i_1i_2}+\beta_{3i_3}=\gamma_{i_1i_2i_3}$, $i_1=1,\ 2,\qquad n_1$, $i_2=1,\ 2,\qquad n_2$, $i_3=1,\ 2,\qquad n_3$. Очевидно $\gamma_{111}=\beta_1+\beta_2+\beta_3$. Те же рассуждения, которые мы провели в случае полинома $\Pi_1(y)$ и теперь показывают, что коэффициенты $A_k^{(2)}$ являются полиномами от $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$ и $\frac{1}{t_3}$ с рациональными коэффициентами.

Продолжая процесс $s-2$ раза, мы приходим к полиному

$$Q(y)=\prod_{j=1}^{s-1}\prod_{i_j=1}^{n_j}(y-\gamma_{i_1i_2\ldots i_{s-1}})=\sum_{k=1}^{n=n_1n_2\ldots n_{s-1}}A_k^{(s-2)}y^{n-k},$$

где

$$\gamma_{i_1i_2\ldots i_{s-1}}=\sum_{k=1}^{s-1}\beta_k i_k,\quad \gamma_{11\ldots1}=\beta_{11}+\beta_{21}+\ldots+\beta_{s-11}=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{s-1},$$

т. е сумма $t_1\frac{\alpha_1}{\alpha_s}+t_2\frac{\alpha_2}{\alpha_s}+\ldots+t_{s-1}\frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}$ является корнем уравнения $Q(y)=0$, причем, как и раньше, коэффициенты $A_k^{(s-2)}$ являются полиномами от $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$, $\qquad\frac{1}{t_{s-1}}$ с рациональными коэффициентами:

$$A_k^{(s-2)}=A_k^{(s-2)}\left(\frac{1}{t_1},\ \frac{1}{t_2},\ \ldots\frac{1}{t_{s-1}}\right)=$$

$$=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{s-1}=0}^{\nu_k}\tilde{B}_{k_1k_2\ldots k_{s-1}}\left(\frac{1}{t_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{t_2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{1}{t_{s-1}}\right)^{k_{s-1}}\qquad(\nu_k\leqslant n).$$

Ниже будем рассматривать уравнение

$$Q(y)=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(s-2)}y^{n-k}=0.\tag{9}$$

Очевидно, что умножая (9) на некоторый одночлен $Ct_1^{p_1}t_2^{p_2}\ldots t_{s-1}^{p_{s-1}}$ с подходящими натуральными p_1, p_2, $\ldots$, p_{s-1} и C, нетрудно добиться того, чтобы вместо уравнения (9), с коэффициентами $A_k^{(s-2)}$, являющимися полиномами от $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$, $\qquad\frac{1}{t_{s-1}}$, получилось эквивалентное уравнению (9), уравнение

$$Q^*(y)=\sum_{k=0}^{n}D_k y^{n-k}=0,\tag{10}$$

с коэффициентами D_k, являющимися полиномами от t_1, t_2, $\ldots$, t_{s-1} с целыми коэффициентами

$$D_k=\sum_{\ldots+k_{s-1}=0}^{\nu_n}B_{k_1k_2\ldots k_{s-1}}t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_{s-1}^{k_{s-1}}\tag{11}$$

(здесь $B_{k_1k_2\ldots k_{s-1}}$ — целые числа).

Положим теперь в (10) $t_k = i_k$, $k=1, 2, \ldots, s-1$, где i_k – целые положительные числа. В таком случае уравнение (10) преобразуется в эквивалентное уравнение, коэффициентами которого, в соответствии с (11), являются полиномы от $i_1, i_2, \quad i_{s-1}$ с целыми коэффициентами, не зависящими от $i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}$. При этом в (11) не все $D_k = 0$, так как уравнению (10) удовлетворяет только конечное число корней $\gamma_{i_1 i_2 \ldots}$

Итак, имеем

$$Q^*(y) = \sum_{k=0}^{n} D_k(i_1, i_2, \quad i_{s-1})\, y^{n-k} = 0,$$

где $D_k(i_1, i_2, \quad i_{s-1})$ – полиномы с целыми коэффициентами. Теперь, разлагая $Q^*(y)$ по степеням $y+i_s$, получаем

$$Q^*(y) = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_k(i_1, \quad i_s)(y+i_s)^k + \bar{Q}_0(i_1, \quad i_s) = 0. \tag{12}$$

Оценим сверху $|\bar{Q}_k(i_1, i_2, \quad i_s)|$, при $k=1, 2,$

$$|\bar{Q}_k(i_1, i_2, \quad i_s)| \leqslant \sum_{j_1+j_2 \ldots j_s = 0}^{n} |A^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_s}|\, i_1^{j_1} i_2^{j_2} \ldots i_s^{j_s} <$$

$$< C_1(i_1+i_2+ \quad +i_s)^n, \tag{13}$$

где $A^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ целые числа, а C_1 постоянная, не зависящая от $i_1, i_2,$

Теперь оценим $|\bar{Q}_0(i_1, i_2, \quad i_s)|$ снизу. Сначала допустим, $\bar{Q}_0(i_1, i_2, \quad i_s) \neq 0$ и, поскольку это число целое, то

$$|\bar{Q}_0(i_1, i_2, \quad i_s)| \geqslant 1. \tag{14}$$

Полагая в (12) $y = \gamma_{11\ldots}$ приходим к неравенству

$$|\bar{Q}_0(i_1, i_2, \quad i_s)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\bar{Q}_j(i_1, i_2, \quad i_s)|\, |\gamma_{11\cdots 1} + i_s|^j. \tag{15}$$

Если же $\bar{Q}_0 = \bar{Q}_1 = \ldots = \bar{Q}_p = 0$, то из (12) получаем

$$\sum_{j=p+1}^{n} \bar{Q}_j(i_1, \quad i_s)\,(\gamma_{11\cdots 1}+i_s) =$$

$$= (\gamma_{11\cdots 1}+i_s)^{p+1} \sum_{j=0}^{n-p-1} \bar{Q}_{j+p+1}(i_1, i_2, \quad i_s)\,(\gamma_{11\cdots 1}+i_s)^j = 0,$$

и оценка (14) имеет место для $\bar{Q}_{p+1}(i_1, i_2, \quad i_s)$.

Учитывая (13) и (14), из (15) получаем

$$1 < C_1(i_1+i_2+ \quad +i_s)^n \sum_{j=1}^{n} |\gamma_{11\cdots 1}+i_s|^j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma_{11\cdots 1}+i_s|^j > \frac{1}{C_1(i_1+i_2+\ldots+i_s)^n}. \tag{16}$$

Из последнего неравенства видно, что хотя бы одно слагаемое, скажем $|\gamma_{11\cdots 1}+i_s|^k$, удовлетворяет соотношению (16). Значит

$$|\gamma_{11\cdots 1}+i_s|^k > \frac{1}{nC_1(i_1+i_2+\ldots+i_s)^n}$$

Так как $k \geqslant 1$, то тем более

$$|\gamma_{11\ldots 1} + i_s| > \frac{1}{nC_1(i_1+i_2+\ldots+i_s)^n},$$

$$|i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + \quad + i_s\alpha_s| > \frac{|\alpha_s|}{nC_1(i_1+i_2+\ldots+i_s)^n}.$$

Поскольку, согласно допущению в начале доказательства $i_{s+1}=i_{s+2}= =\ldots=i_m=0$, $s\leqslant m$, то также

$$|i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+ \quad +i_m\alpha_m| > \frac{C}{(i_1+i_2+ \quad +i_m)^n}, \tag{17}$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от i_1, i_2,

Лемма доказана.

1. Имеет место следующая

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение*

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\alpha_j+\sum_{k=1}^{m}a_k^{(j)}z_k\right)z_j\frac{\partial u}{\partial z_j}\right]+\left(c_0+\sum_{k=1}^{m}c_kz_k\right)u=0, \tag{1.1}$$

где α_j — числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, а $a_k^{(j)}$, c_k и *c_0 — любые числа, имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида*

$$u=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m}f(z_1, \quad z_m), \tag{1.2}$$

где $f(z_1, z_2, \quad z_m)$ аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат, а λ_1, λ_2, λ_m комплексные числа, удовлетворяющие уравнению $\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_m\lambda_m+c_0=0$.

Доказательство. Решения уравнения ищем в виде

$$u=z_1^{\lambda_1} \quad \ldots z_m^{\lambda_m}e^{v(z_1, z_2, \ldots,}$$

где $v(z_1, z_2, \quad z_m)$ новая искомая функция. Подставляя в уравнение (1.1), приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\alpha_j+\sum_{k=1}^{m}a_k^{(j)}z_k\right)z_j\frac{\partial v}{\partial z_j}+\sum_{k=1}^{m}(\lambda_ja_k^{(j)}+C_k)z_k+\alpha_j\lambda_j\right]+c_0=0.$$

Поскольку в коэффициентах при производных слагаемые нулевой степени отсутствуют (каждая функция умножается на z_j), то сразу следует

$$\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_m\lambda_m+c_0=0.$$

Решения этого уравнения — числа $\lambda_1\lambda_2$, являются показателями степеней в (1.2).

Теперь, вводя обозначение

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_ja_k^{(j)}+c_k=Q_k,$$

приходим к уравнению

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_jz_j\frac{\partial v}{\partial z_j}+\sum_{k=1}^{m}a_k^{(j)}z_k\cdot z_j\frac{\partial v}{\partial z_j}\right)+\sum_{k=1}^{m}Q_kz_k=0. \tag{1.3}$$

Решения уравнения (1.3) ищем в виде

$$v = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=1}^{\infty} s_{p_1p_2}\ldots \tag{1.4}$$

где $s_{p_1p_2\ldots p_m}$ – еще неопределенные коэффициенты. Подставляя это выражение в (1.3), приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=1}^{\infty} p_j\alpha_j \cdot s_{p_1p_2\ldots p_m} z_1^{p_1} z_2^{p_2}\ldots z_m^{p_m} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_k^{(j)} z_k \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=1} p_j \cdot s_{p_1p_2\ldots p_m} z_1^{p_1} z_2^{p_2}\ldots z_m^{p_m} + \sum_{k=1}^{m} Q_k z_k = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях $z_1^{p_1} z_2^{p_2}\ldots z_m^{p_m}$, когда p_1+p_2+ $+\ldots+p_m=1,\ 2,$ к нулю, получаем систему линейных уравнений:

$$\alpha_1 s_{10\cdots0} = -Q_1,$$

$$\alpha_2 s_{01\cdots0} = -Q_2,$$

$$\cdots_1 = -Q_m,$$

$$(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m) s_{p_1p_2\ldots p_m} = \tag{1.5}$$

$$= -\{[(p_1-1)\,a_1^{(1)}+p_2a_1^{(2)}+\ldots+p_ma_1^{(m)}]\, s_{p_1-1\,p_2\ldots p_m}+$$

$$+[p_1a_2^{(1)}+(p_2-1)\,a_2^{(2)}+\ldots+p_ma_2^{(m)}]\, s_{p_1p_2-1\ldots p_m}+$$

$$+[p_1a_m^{(1)}+p_2a_m^{(2)}+\ldots+(p_m-1)\,a_m^{(m)}]\, s_{p_1p_2\ldots p_m-1}\},$$

$$(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m)\, s_{p_1p_2\ldots p_m} =$$

$$= \sum_{\ldots+i_j+\ldots+i_m=1} \left[\sum_{k=1}^{m} (p_k-i_j)\, a_j^{(k)} \cdot s_{p_1-i_1 \qquad \ldots p_m-i_m}\right].$$

В силу того, что α_1, α_2, α_m числа линейно независимы над полем рациональных чисел, а p_1, p_2, $\ldots$, p_m целые неотрицательные числа (p_1+p_2+ $+\ldots+p_m\geqslant 1$), выражение $p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m$ в нуль не обращается. Таким образом, все коэффициенты ряда (1.4) $s_{p_1p_2\ldots p_m}$ являются вполне определенными числами, которые находим из системы (1.5).

$$\cdots_0 = -\frac{Q_1}{\alpha_1}, \qquad \cdots_0 = -\frac{Q_2}{\alpha_2}, \qquad \cdots_1 = -\frac{Q_m}{\alpha_m},$$

$$\cdots_{p_m} = -\frac{\sum\limits_{i_1+\ldots+i_j+\ldots+i_m=1} \left[\sum\limits_{k=1}^{m} (p_k-i_j)\, a_j^{(k)}\, s_{p_1-i_1p_2-i_2\ldots p_m-i_m}\right]}{p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m} \tag{1.6}$$

Теперь докажем равномерную сходимость ряда (1.4) в некоторой окрестности начала координат.

Пусть $A=\max\{|a_k^{(j)}|, |Q_k|\}$, когда j, $k=1, 2, \quad m$. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\alpha_1 x_{10\ldots 0}=A,$$
$$\alpha_2 x_{01\ldots 0}=A,$$

$$\alpha_m x_{00\ldots 1}=A,$$

$$(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m)\, x_{p_1p_2\ldots p_m}=$$
$$=\sum_{\ldots+i_j+\ldots\quad =1}\left[\sum_{k=1}^{m}(p_k-i_j)\, A\cdot x_{p_1-i_1\quad\ldots p_m-i_m}\right]=$$
$$=A\left(\sum_{k=1}^{m}p_k-1\right)\quad\sum_{\ldots+i_j+\ldots}$$

Имеем

$$x_{p_1p_2\ldots p_m}=\frac{A\left(\sum\limits_{k=1}^{m}p_k-1\right)}{p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=1}x_{p_1-i_1} \tag{1.7}$$

Решения $x_{p_1p_2\ldots p_m}$ найдем по методу математической индукции. Предположим

$$x_{p_1p_2\ldots p_m}=\frac{(p_1+p_2+\ldots+p_m-1)!\,A^{p_1+p_2+\ldots+p_m}}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!\,\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_m^{p_m}}. \tag{1.8}$$

При $p_1=1$, $p_2=0$, $p_3=0$, $\ldots$, $p_m=0$ предположение верно. Допустим, что равенство (1.8) имеет место для всех $x_{p_1p_2\quad p_m}$, когда $p_1\leqslant n_1$, $p_2\leqslant n_2$, $\ldots$, $p_m\leqslant\leqslant n_m$. На основании этого допущения покажем, что (1.8) имеет место и для $x_{n_1+1\,n_2\ldots n_m}$.

Действительно, из (1.7) получаем

$$\ldots{}_{n_m}\frac{A\,[(n_1+1)+n_2+\ldots+n_m-1]}{(n_1+1)\,\alpha_1+n_2\alpha_2+\ldots+n_m\alpha_m}\,[x_{(n_1+1)-1\,n_2\ldots n_m}+$$
$$+x_{n_1+1\,n_2-1\ldots n_m}+\ldots+x_{n_1+1\,n_2\ldots n_m-1}]=\frac{A\,(n_1+n_2+\ldots+n_m)}{(n_1+1)\,\alpha_1+n_2\alpha_2+\ldots+n_m\alpha_m}\times$$
$$\times\left[\frac{\big((n_1+1-1)+n_2+\ldots+n_m-1\big)!\,A^{(n_1+1-1)+n_2+\ldots+n_m}}{(n_1+1-1)!\,n_2!\,n_m!\,\alpha_1^{n_1+1-1}\,\alpha_2^{n_2}\ldots\alpha_m^{n_m}}+\right.$$
$$+\frac{\big((n_1+1)+(n_2-1)+\ldots+n_m-1\big)!\,A^{(n_1+1)+(n_2-1)+\ldots+n_m}}{(n_1+1)!\,(n_2-1)!\ldots n_m!\,\alpha_1^{n_1+1}\,\alpha_2^{n_2-1}\ldots\alpha_m^{n_m}}+\quad+$$
$$\left.+\frac{\big((n_1+1)+n_2+\ldots+(n_m-1)-1\big)!\,A^{n_1+1+n_2+\ldots+(n_m-1)}}{(n_1+1)!\,n_2!\ldots(n_m-1)!\,\alpha_1^{n_1+1}\,\alpha_2^{n_2}\ldots\alpha_m^{n_m-1}}\right]=$$
$$=\frac{\big((n_1+1)+n_2+\ldots+n_m-1\big)!\,A^{(n_1+1)+n_2+\ldots+n_m}}{(n_1+1)!\,n_2!\ldots n_m!\,\alpha_1^{n_1+1}\,\alpha_2^{n_2}\ldots\alpha_m^{n_m}}.$$

Сопоставляя соотношения (1.6) и (1.7) замечаем, что

$$|s_{p_1p_2\ldots p_m}|\leqslant|x_{p_1p_2\ldots p_m}|.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=1}^{\infty} \qquad \ldots_{p_m} | \, |z_1|^{p_1} \, |z_2|^{p_2} \ldots |z_m|^{p_m}$$

мажорируется рядом

$$\sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=1}^{\infty} |x_{p_1p_2\ldots p_m}| \, |z_1|^{p_1} \, |z_2 \quad \ldots |z_m|^{p_m}, \tag{1.9}$$

который, как легко убедиться, сходится в некоторой окрестности начала координат. Пусть $\alpha = \min\{\alpha_j\}$ при $j=1,\ 2, \qquad m$. Обозначим $p_1+p_2+\ldots+p_m=\nu$,

$$\sum_{\ldots+p_m=\nu} |x_{p_1p_2\ldots p_m}| \, |z_1|^{p_1} \, |z_2|^{p_2} \ldots |z_m|^{p_m} = \sigma_\nu, \qquad \frac{A}{\alpha} = B.$$

Имеем

$$|x_{p_1p_2\ldots p_m}| \leqslant \frac{\nu! \, B^\nu}{\nu P_1! \, P_2! \ldots P_m!}.$$

Таким образом

$$\sigma_\nu \leqslant \frac{B^\nu}{\nu} \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=\nu} \frac{\nu! \, |z_1|^{p_1} \, |z_2|^{p_2} \ldots |z_m|^{p_m}}{P_1! \, P_2! \ldots P_m!} =$$

$$= \frac{1}{\nu} \, [B(|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_m|)]^\nu.$$

Следовательно

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \, [B(|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_m|)]^\nu.$$

Последний ряд сходится, когда $|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_m| < \frac{1}{B}$. И тем более сходится при $|z_j| < \frac{1}{mB}$, $j=1,\ 2, \qquad m$.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы легко усмотреть, что мажоранта (1.9) не может быть улучшена, так как при $a_k^{(j)}=A$, $c_k=-A$, $c_0=\lambda=\mu=0$ решением уравнения (1.3) является функция

$$v(z_1, \qquad \ldots, z_m) =$$

$$= \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p_1+p_2+\ldots+p_m} (p_1+p_2+\ldots+p_m-1)! \, A^{p_1+p_2\ldots+p_m}}{p_1! \, p_2! \ldots p_m! \, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_m^{p_m}} \times$$

$$\times z_1^{p_1} z_2^{p_2} \ldots z_m^{p_m}.$$

2. Теорема 2. *Дифференциальное уравнение*

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j z_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = \varphi(z_1, \ z_2, \qquad z_m) \, u, \tag{2.1}$$

где функция

$$\varphi(z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_m) = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=0}^{\infty} c_{p_1p_2\ldots p_m} z_1^{p_1} z_2^{p_2} \ldots \tag{2.2}$$

причем ряд в (2.2) сходится в полицилиндре $|z_1| < R$, $|z_2| < R$, $|z_m| < R$, *а* α_j, $j=1, 2,$ m *— алгебраические числа, имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида*

$$u = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, \quad z_m),$$

где $\lambda_1, \lambda_2,$ λ_m *— комплексные числа, а* $f(z_1, z_2, \quad z_m)$ *— аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат, тогда и только тогда, когда в ряду* (2.2) *все коэффициенты с индексами* $p_1 p_2 \quad p_m$, *для которых*

$$p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_m \alpha_m = 0,$$

равны нулю: $c_{p_1 p_2 \ldots p_m} = 0$.

Доказательство. **Достаточность.** Составим систему обыкновенных дифференциальных характеристических уравнений, соответствующую уравнению (2.1)

$$\frac{dz_1}{\alpha_1 z_1} = \frac{dz_2}{\alpha_2 z_2} = \ldots = \frac{dz_m}{\alpha_m z_m} = -\frac{du}{\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, u}.$$

Интегрируя первые $m-1$ уравнения получаем

$$z_2 = C_2 z_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad z_3 = C_3 z_1^{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}} \quad \ldots, \ z_m = C_m z_1^{\frac{\alpha_m}{\alpha_1}} \tag{2.3}$$

Далее имеем

$$\frac{dz_1}{\alpha_1 z_1} = \frac{du}{\sum\limits_{\ldots + i_m = 0}^{\infty}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, с учетом (2.3) получаем

$$u = C z_1^{\frac{c_{00\ldots 0}}{\alpha_1}} \exp\Bigg[\sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i}^{\infty} \frac{c_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{i_1 \alpha_1 + i_2 \alpha_2 + \ldots + i_m \alpha_m} \times$$

$$\times z_1^{i_1} \left(C_2 z_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{i_2} \ldots \left(C_m z_1^{\frac{\alpha_m}{\alpha_1}}\right)^{i_m}$$

$$u = C z_1^{\frac{c_{00\ldots 0}}{\alpha_1}} \exp\Bigg[\sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_m = 0}^{\infty} \frac{c_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{i_1 \alpha_1 + i_2 \alpha_2 + \ldots + i_m \alpha_m} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_m^{i_m} \Bigg]. \tag{2.4}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2,$ λ_m — комплексные числа, удовлетворяющие соотношению

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m = C_{00\ldots}$$

Подставляя в (2.4) выражение $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m$ вместо $c_{00\ldots 0}$, имеем

$$z_1^{\frac{c_{00\ldots 0}}{\alpha_1}} = z_1^{\frac{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m}{\alpha_1}} = \frac{z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m}}{C_2^{\lambda_2} C_3^{\lambda_3} \ldots C_m^{\lambda_m}}.$$

Теперь, обозначая выражение

$$\frac{C}{C_2^{\lambda_2}\ldots C_m^{\lambda_m}}\exp\left[\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=1}^{\infty}\frac{c_{i_1i_2\ldots i_m}}{i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots z_m^{i_m}\right]$$

через $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, получаем искомого вида решения

$$u=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m}f(z_1, z_2, \ldots, z_m).$$

Коэффициенты ряда, написанного в квадратных скобках (2.4), являются вполне определенными числами. Те члены, для которых $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m=0$ отсутствуют, так как по условию теоремы $c_{i_1i_2\ldots i_m}=0$.

Ряд в (2.4) сходится равномерно в полицилиндре $|z_1|<R$, $|z_2|<R$, $\ldots$, $|z_m|<R$, и поэтому $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ является аналитической функцией. Действительно, по неравенству Коши, когда $0<R_1<R$,

$$|c_{i_1i_2\ldots i_m}|\leqslant\frac{M}{R_1^{i_1+i_2+\ldots+i_m}},$$

где $M=\max|\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m)|$ в полицилиндре $|z_1|\leqslant R_1$, $|z_2|\leqslant R_1$, $|z_m|\leqslant R_1$.

Оценим снизу знаменатели ряда в (2.4). Случай, когда α_1, α_2, α_m положительные числа, рассмотрен в [2]. Мы положим, что эти числа разных знаков.

Сначала рассмотрим случай двух переменных. Обозначая отношение $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ через $-\Theta$, приходим к соотношению,

$$|i_1\alpha_1+i_2\alpha_2|=i_2|\alpha_1|\left|\frac{i_1}{i_2}-\Theta\right|,$$

правую часть которого оценим, пользуясь теоремой Лиувилля или теоремой Рота, в зависимости от того, будет ли степень алгебраического числа Θ равна двум или больше двух.

Теперь пусть $m>2$. Если выражение $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m$ является алгебраическим числом первой степени, то предварительно помножив уравнение (2.1) на подходящее целое число, будем иметь:

$$|i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m|\geqslant 1.$$

Если же выражение $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m$ — алгебраическое число степени выше первого, то применяем оценку (17). Итак, всегда

$$|i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m|>\frac{C}{(i_1+i_2+\ldots+i_m)^n},$$

где $C>0$ — постоянная, независящая от i_1, i_2,

Таким образом, коэффициенты ряда

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=1}^{\infty}\frac{c_{i_1i_2\ldots i_m}}{i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots \tag{2.5}$$

удовлетворяют оценке

$$\left|\frac{c_{i_1i_2\ldots i_m}}{i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m}\right|<\frac{M}{C}\frac{(i_1+i_2+\ldots+i_m)^n}{R_1^{i_1+i_2+\ldots+i_m}}=C_1\frac{(i_1+i_2+\ldots+i_m)^n}{R_1^{i_1+i_2+\ldots+i_m}}.$$

Следовательно, ряд (2.5) мажорируется рядом

$$C_1 \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=1}^{\infty} \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_m)^n}{R_1^{i_1+i_2+\ldots+i_m}} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_m^{i_m},$$

который сходится при $|z_1|<R$, $|z_2|<R$, ..., $|z_m|<R$.

Необходимость. Для простоты рассмотрим случай, когда число независимых переменных $m=2$, хотя приведенное доказательство будет иметь место и для любого m. Итак, докажем, что для существования аналитического решения уравнения (2.1), при $m=2$, условие что $c_{i_1 i_2}=0$, когда $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2=0$, является необходимым.

Пусть дифференциальное уравнение

$$\alpha_1 z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} + \alpha_2 z_2 \frac{\partial u}{\partial z_2} = \varphi(z_1, z_2) u \tag{2.6}$$

имеет решение $u=z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} f(z_1, z_2)$, где $f(z_1, z_2)$ аналитическая функция, имеющая вид:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{p_1+p_2=0}^{\infty} s_{p_1 p_2} z_1^{p_1} z_2^{p_2},$$

в некоторой окрестности начала координат. Подсчитаем каким при этом условиям должна удовлетворить функция $\varphi(z_1, z_2)$, из уравнения (2.6), аналитическая в бицилиндре $|z_1|<R$, $|z_2|<R$, которую запишем в виде

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{i_1+i_2=0}^{\infty} c_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2}.$$

Подставляя в уравнение (2.6), приходим к соотношению, которое должно выполняться тождественно:

$$\sum_{i_1+i_2=0}^{\infty} \Big[\Big(\alpha_1(\lambda_1+i_1)+\alpha_2(\lambda_2+i_2)\Big) s_{i_1 i_2} - \\ - \sum_{p_1=0}^{i_1} \sum_{p_2=0}^{i_2} c_{i_1-p_1,\, i_2-p_2} s_{p_1 p_2} \Big] z_1^{\lambda_1+p_1} z_2^{\lambda_2+p_2} = 0.$$

При $i_1+i_2=0$ получаем определяющее уравнение

$$(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2-c_{00}) s_{00}=0$$

и при $s_{00}=1$ имеем $\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2=c_{00}$.

Учитывая это, при $i_1+i_2=1, 2, \ldots$ приходим к системе линейных уравнений:

$$c_{10}=\alpha_1 s_{10},$$
$$c_{01}=\alpha_2 s_{01},$$
$$s_{01}c_{10}+s_{10}c_{01}+c_{11}=(\alpha_1+\alpha_2)s_{11},$$

. . . .

. . . .

$$s_{i_1-1\, i_2} c_{10} + s_{i_1-2\, i_2} c_{20} + \ldots + s_{0 i_2} c_{i_1 0} + s_{i_1\, i_2-1} c_{01} + \\ + s_{i_1-1\, i_2-1} c_{11} + \ldots + s_{0\, i_2-1} c_{i_1 1} + \ldots + s_{i_1 0} c_{0 i_2} + \\ + s_{i_1-1\, 0} c_{1 i_2} + \ldots + s_{10} c_{i_1-1\, i_2} = (i_1\alpha_1+i_2\alpha_2) s_{i_1 i_2},$$

. . . .

Из этой системы коэффициенты $c_{i_1 i_2}$ определяются по правилу Крамера в виде отношения двух определителей:

$$c_{i_1 i_2} = \frac{\Delta_{i_1 i_2}}{\Delta}.$$

Δ является определителем треугольной матрицы, с диагональными элементами равными единице. Значит $\Delta = 1$.

Теперь напишем $\Delta_{i_1 i_2}$, который получается из Δ, заменой столбца с $c_{i_1 i_2}$, столбцом свободных членов.

$$\Delta_{i_1 i_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\ 0 & \alpha_1 s_{10} \\ s_{10} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\ 0 & 2\alpha_1 s_{20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots\ 0 & \alpha_2 s_{01} \\ s_{01} & 0 & \dots & s_{10} & 1 & 0 & \dots\ 0 & (\alpha_1 + \alpha_2) s_{11} \\ s_{11} & s_{01} & \dots & s_{20} & s_{10} & 1 & \dots\ 0 & (2\alpha_1 + \alpha_2) s_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i_1-1\, i_2} & s_{i_1-2\, i_2} & \dots & s_{i_1\, i_2-1} & s_{i_1-1\, i_2-1} & s_{i_1-2\, i_2-1} & \dots\ s_{10} & (i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2) s_{i_1 i_2} \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Нетрудно убедиться, что этот определитель имеет множитель $i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2$. Чтобы это показать, определитель (2.9) представим как сумму σ, слагаемые которой являются произведениями элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца.

Заметим, что элемент s_{pq} определителя (2.9), стоящий ниже диагонали, имеет следующие индексы:

$$\begin{aligned} p &= p_2 - p_1, \\ q &= q_2 - q_1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Числа p_1 и q_1 взяты из множителя $p_1\alpha_1 + q_1\alpha_2$, стоящего против диагонального элемента столбца, в котором находится s_{pq}, а p_2 и q_2 взяты из $p_2\alpha_1 + q_2\alpha_2$, который находится в той же самой строке, что и s_{pq}.

Каждое отличное от нуля слагаемое суммы σ состоит из $mn + m + n$ множителей (порядок определителя). Эти множители состоят из следующих элементов:

а) одного элемента последнего столбца,

б) из элементов стоящих под диагональю,

в) диагональных элементов, которые равны единице.

Напишем некоторое слагаемое суммы σ. Согласно сказанному, оно имеет вид:

$$(p_1\alpha_1 + q_1\alpha_2)\, s_{p_1 q_1} \cdot s_{p_2 q_2} s_{p_3 q_3} \dots s_{p_k q_k} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}_{mn+m+n-k \text{ раз}},$$

где, в силу (2.10), $p_1 + p_2 + \dots + p_k = i_1$, $q_1 + q_2 + \dots + q_k = i_2$. Поскольку элементами последнего столбца определителя (2.9) могут быть любые из элементов $s_{p_1 q_1}$, $s_{p_2 q_2}$, $\dots$, $s_{p_k q_k}$, то имеются слагаемые

$$(p_2\alpha_1 + q_2\alpha_2)\, s_{p_2 q_2} \cdot s_{p_1 q_1} s_{p_3 q_3} \dots s_{p_k q_k},$$

$$(p_3\alpha_1 + q_3\alpha_2)\, s_{p_3 q_3} \cdot s_{p_1 q_1} s_{p_2 q_2} \dots s_{p_k q_k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(p_k\alpha_1 + q_k\alpha_2)\, s_{p_k q_k} \cdot s_{p_1 q_1} s_{p_2 q_2} \dots s_{p_{k-1} q_{k-1}}.$$

Все эти слагаемые имеют одинаковый знак, так как в них входит одинаковое число диагональных элементов.

Сумма произведений (2.11) и (2.12) является слагаемым суммы σ и имеет вид:

$$[(p_1+p_2+\ldots+p_k)\alpha_1+(q_1+q_2+\ldots+q_k)\alpha_2]\, s_{p_1q_1}s_{p_2q_2}\ldots s_{p_kq_k}=$$

$$=(i_1\alpha_1+i_2\alpha_2)\, s_{p_1q_1}s_{p_2q_2}\ldots s_{p_kq_k}=(i_1\alpha_1+i_2\alpha_2)\, A_k.$$

Отсюда видно, что σ можно вновь записать в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет множитель $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2$. Тогда, согласно (2.8), имеем

$$c_{i_1i_2}=(i_1\alpha_1+i_2\alpha_2)\, A,$$

где A сумма всех множителей вида A_k.

Таким образом, если $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2=0$, то и $c_{i_1i_2}=0$.

Точно таким же путем устанавливается необходимость условия $c_{i_1i_2\ldots i_m}=0$, когда $i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ldots+i_m\alpha_m=0$, и в общем случае, однако, из-за громоздкости записей, здесь доказательства приводить не будем.

3. Требование в теореме 2, чтобы числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ были алгебраическими числами, является существенным. Изтестно, что трантцендентные числа удовлетворяют неравенство

$$\left|\Theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{C}{q^n}$$

для любых n и $C>0$. Классическим примером служит число

$$\Theta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}=0{,}1100010\ldots$$

Однако теорема 2 остается справедливой и при любых иррациональных числах $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$, если $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ является полиномом, так как в этом случае ряд в (2.5) имеет конечное число слагаемых. Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Дифференциальное уравнение*

$$\sum_{j=1}^{m}\Theta_j z_j\frac{\partial u}{\partial z_j}=P(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, u,$$

где полином

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=0}^{N} c_{i_1i_2\ldots i_m} z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots z_m^{i_m}, \tag{3.1}$$

а $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ *действительные числа, имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида*

$$u=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \ldots, z_m), \tag{3.2}$$

тогда и только тогда, когда в полиноме (3.1) *все коэффициенты* $c_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, *для которых*

$$\Theta_1 i_1 + \Theta_2 i_2 + \ldots + \Theta_m i_m = 0,$$

равны нулю: $c_{i_1 i_2 \ldots i_m} = 0$.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *комплексные числа, удовлетворяющие условию*

$$\Theta_1 \lambda_1 + \Theta_2 \lambda_2 + \ldots + \Theta_m \lambda_m = c_{00 \ldots 0},$$

а $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат. В частности, решения вида* (3.2) *существуют при любом полиноме* $P(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, *если* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ *линейно независимые над полем рациональных чисел.*

Считаю своим приятным долгом поблагодарить доктора физико-математических наук Ш. И. Стрелица за ценные советы по поводу данной статьи.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
7.XII.1967

Литература

1. Ш. И. Стрелиц, Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат. сб., 60, № 2 (1963).
2. И. В. Киселюс, Аналитические решения одного класса линейных уравнений в частных производных, Лит. мат. сб., V, 1, 85–96 (1965).
3. И. В. Киселюс, Система решений одного класса линейных уравнений с частными производными, Лит. мат. сб., VI, 3, 365–380 (1966).
4. Дж. В. С. Касселс, Введение в теорию диофантовых приближений, М., 1961.
5. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, М.-Л., 1952.

VIENOS PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ KLASĖS ANALIZINIAI SPRENDINIAI

J. KISIELIUS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjami diferencialinių lygčių

$$\sum_{j=1}^{m} F_j(z_1, z_2, \ldots, z_m) z_j \frac{\partial u}{\partial z_j} + \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m) u = 0$$

analiziniai sprendiniai pavidalo

$$u = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

kur $\lambda_j = \text{const}$, $F_j(0, 0, \ldots, 0)$ – iracionaliniai skaičiai, o $F_j(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $\varphi(z_1, z_2, \ldots z_m)$ ir $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – analizinės funkcijos.

ANALYTISCHE LOSUNGEN EINER KLASSE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ERSTEN ORDNUNG

J. KISIELIUS

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Artikel untersuchen wir die analytischen Losungen

$$u=z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \dots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \dots, z_m)$$

der partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{j=1}^{m} F_j(z_1, z_2, \dots, z_m)\, z_j \frac{\partial u}{\partial z_j} + \varphi(z_1, z_2, \dots, z_m)\, u = 0$$

wo $\lambda_j=\mathrm{const}$, $F_j(0, 0, \dots, 0)$ irrationale Zahlen, $F_j(z_1, z_2, \dots, z_m)$, $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_m)$ und $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ analytische Funktionen sind.