1968

УДК–519.21

# ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ, КОГДА НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ КРАМЕРА

А. В. НАГАЕВ

## Часть I

### § 1. Постановка задачи и результаты

Пусть случайные величины $\xi_j$, $j=1, 2, \ldots$, независимы и имеют общее решетчатое распределение

$$P\{\xi_j=k\}=p_k\geqslant 0, \qquad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \sum p_k=1. \tag{1.1}$$

Положим

$$\zeta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$$

и

$$P_n(k)=P\{\zeta_n=k\}.$$

Мы не слишком потеряем в общности приводимых ниже результатов, если потребуем, чтобы $M\xi_j=0$. Кроме этого будем считать, что справедлива локальная предельная теорема с оценкой остаточного члена

$$\sup_k \left| P_n(k)-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{k^2}{2n\sigma^2}}\right| < \frac{C}{n}. \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma^2=M\xi_j^2$, $C$ не зависит от $n$. Для справедливости соотношения (1.2) достаточно двух условий: чтобы максимальный шаг распределения был равен единице и чтобы существовал абсолютный момент третьего порядка (см., например, [2]). Цель предлагаемой статьи-исследовать поведение вероятности $P_n(k)$ при всех $k>\sqrt{n}$. При такой постановке задачи приходится предполагать правильность изменения чисел $p_k$ при больших значениях $k$. В работе автора [3] приводится решение этой задачи в предположении, что

$$p_k\sim e^{-k^\alpha}, \qquad 1<\alpha<3, \qquad k\to\infty. \tag{1.3}$$

Легко усмотреть, что соотношение (1.3) обеспечивает выполнение так называемого условия Крамера (см. [1] стр. 169, условие А). Здесь же мы предположим, что

$$p_k\sim e^{-|k|^{1-\varepsilon}}, \qquad |k|\to\infty, \qquad 0<\varepsilon<1. \tag{1.4}$$

Естественно, при этом предположении условие Крамера не выполняется. Прежде чем формулировать результаты, условимся о некоторых обозначениях, которых мы будем в дальнейшем придерживаться. Буквой $\rho$ будем обозначать величину, сколь угодно медленно растущую до бесконечности вместе с $n$, а буквой $\omega$ – величину, убывающую быстрее любой отрицательной степени $n$. Пусть далее $r_m$ обладает тем свойством, что

$$n \sum_{l=r_m}^{\infty} l^m e^{-l^{1-\varepsilon}} = o(1). \tag{1.5}$$

При изучении поведения $P_n(k)$ необходимо различать пять случаев. Каждый из этих случаев описывается следующим образом. Сначала формулируется теорема, а затем приводится замечание. В замечаниях поясняется статистическая природа больших уклонений в каждом случае.

1°. Случай $\sqrt{n} < k < (c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \sigma^{\frac{1}{2\varepsilon}}$, $c_\varepsilon = (1+\varepsilon)(2\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$, $\delta > 0$ – достаточно малое фиксированное число.

**Теорема 1.** *В наших условиях при* $n \to \infty$, $\sqrt{n} < k < (c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \sigma^{\frac{1}{2\varepsilon}}$

$$P_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{k^2}{2n\sigma^2} + \frac{k^3}{n^2} \lambda^{[t]}\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left(1 + o(1)\right).$$

Здесь $\lambda^{[t]}(z)$ первые $t$ членов ряда Крамера (см. [1] стр. 169), $t = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$. В частности, при $\varepsilon > \frac{1}{2}$, $\lambda^{[t]}(z) = 0$.

**Замечание 1.** В условиях теоремы 1

$$\frac{P\{\zeta_n = k\}}{P\{\zeta_n = k;\ |\xi_j| < r_2,\ j = \overline{1, n}\}} \to 1,$$

если $\varepsilon > \frac{1}{2}$, и

$$\frac{P\{\zeta_n = k\}}{P\{\zeta_n = k;\ |\xi_j| < r_m,\ j = \overline{1, n}\}} \to 1,$$

если $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, где $m$ – наименьшее целое число такое, что

$$n\left(\frac{k}{n}\right)^{m+1} = o(1).$$

(см. условие (1.5)).

2°. Случай $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon + \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < \frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$.

**Теорема 2.** *В наших условиях при* $n \to \infty$, $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon + \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < \frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$

$$P_n(k) = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2\varepsilon(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha)^{1+\varepsilon}}}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2 k^2}{2\sigma^2(n-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^3 k^3}{(n-1)^2} \lambda^{[t]}\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right) - (1-\alpha)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon}\right\}\left(1 + o(1)\right), \tag{1.6}$$

*где $\alpha$ — наименьший положительный корень уравнения*

$$\sigma^2\frac{(n-1)}{k^{1+\varepsilon}}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{\varepsilon}}{1-\varepsilon},\quad \varepsilon>\frac{1}{2};$$

*и уравнения*

$$\sigma^2\frac{n-1}{k^{1+\varepsilon}}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\left(1-\sigma^2\sum_{j=0}^{t_k}(j+3)\lambda_j\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right)^{j-2}\right),\qquad \varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$$

*$\lambda_j$ — коэффициенты ряда Крамера $\lambda(z)$, $t_k$ — наименьшее целое число, при котором $nk^{-t\varepsilon}=o(1)$.*

Особенно простой вид приобретает соотношение (1.6) при $\varepsilon>\frac{1}{2}$ и $\rho n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<\frac{1}{\rho}n^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$. В этом случае

$$P_n(k)=n\exp\left\{-\frac{\alpha^2k^2}{2\sigma^2(n-1)}-(1-\alpha)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}\right\}. \tag{1.6}$$

**Замечание** 2. Можно показать, что в условиях теоремы 2

$$\frac{P\{\zeta_n=k\}}{nP\{\zeta_n=k;\ |\xi_j|<r_2,\ j=\overline{1,\ n-1};\ |\xi_n-(1-\alpha)k|<\rho\sqrt{n}\}}\to 1,$$

если $\varepsilon>\frac{1}{2}$, и

$$\frac{P\{\zeta_n=k\}}{nP\{\zeta_n=k;\ |\xi_j|<r_m,\ j=\overline{1,\ n-1};\ |\xi_n-(1-\alpha)k|<\rho\sqrt{n}\}}\to 1,$$

если $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, где $m$ наименьшее целое число такое, что

$$nk^{-m\varepsilon}=o(1).$$

3°. Случай $k>\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$.

**Теорема** 3. *В наших условиях при $n\to\infty$, $k>\rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}}$*

$$P\{\zeta_n=k\}=ne^{-k^{1-\varepsilon}}\left(1+o(1)\right).$$

**Замечание** 3. Нетрудно показать, что в условиях теоремы 3

$$\frac{P\{\zeta_n=k\}}{nP\{\zeta_n=k;\ |\xi_j|<r_2,\ j=\overline{1;\ n-1};\ |\xi_n-k|<\rho\sqrt{n}\}}\to 1.$$

4°. Случай $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon+\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$.

**Теорема** 4. *В наших условиях при $n\to\infty$, $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<$ $<\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon+\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$*

$$P_n(k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\exp\left\{-\frac{k^2}{2n\sigma^2}+\frac{k^3}{n^2}\lambda^{[t]}\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left(1+o(1)\right)+$$
$$+\frac{n}{\sqrt{1-\dfrac{\sigma^2\varepsilon(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha)^{1+\varepsilon}}}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2k^2}{2\sigma^2(n-1)}+\frac{\alpha^3k^3}{(n-1)^2}\lambda^{[t]}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right)-(1-\alpha)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}\right\}\left(1+o(1)\right), \tag{1.7}$$

*где $\alpha$ по-прежнему наименьший положительный корень уравнения*

$$\sigma^2 \frac{n-1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{\alpha(1-\alpha)^{\varepsilon}}{1-\varepsilon},$$

*если* $\varepsilon > \frac{1}{2}$, *и уравнения*

$$\sigma^2 \frac{n-1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{\alpha(1-\alpha)^{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\left[1 - \sigma^2 \sum_{j=0}^{t} (j+3)\lambda_j \left(\frac{\alpha k}{n-1}\right)^{j-2}\right],$$

*если* $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, $t = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$.

Особенно простой вид приобретает соотношение (1.7), если $\varepsilon > \frac{1}{2}$. В этом случае

$$P_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{k^2}{2n\sigma^2}}\Big(1 + o(1)\Big) +$$

$$+ \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2\varepsilon(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha)^{1+\varepsilon}}}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2 k^2}{2\sigma^2(n-1)} - (1-\alpha)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon}\right\}\Big((1 + o(1)\Big). \quad (1.7')$$

**Замечание 4.** Этот случай является промежуточным между случаями 1° и 2°. В этом случае можно утверждать лишь, что

$$\frac{P\{\zeta_n = k\}}{nP\{\zeta_n = k; |\xi_j| < r_m,\ j = \overline{1,\ n-1};\ |\xi_n - (1-\alpha)k| < \rho\sqrt{n}\} + P\{\zeta_n = k;\ |\xi_j| < r_m;\ j = \overline{1,\ n}\}} \to 1,$$

где $m = 2$ при $\varepsilon > \frac{1}{2}$, а при $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$

$$m = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1.$$

5°. Случай $\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho} < k < \rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}}$.

**Теорема 5.** В наших условиях при $n \to \infty$, $\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho} < k < n^{\frac{1}{2\varepsilon}}\rho$

$$P_n(k) = \frac{ne^{-k^{1-\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\sigma u k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)\sqrt{n-1} - \frac{u^2}{2}} \mathrm{du}\Big(1 + o(1)\Big) +$$

$$+ \frac{ne^{-k^{1-\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma u k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)\sqrt{n-1} - \frac{1}{2}\left(u - \frac{k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}}{\sigma}\right)^2} \mathrm{du}.$$

**Замечание 5.** В этом случае картина та же, что и в случае 3°.

Несколько слов о порядке изложения. Во втором параграфе приводится ряд вспомогательных утверждений. Третий параграф посвящен доказательству теорем 3 и 5. В четвертом параграфе содержится доказательство теорем 1 и 4, и, наконец, в пятом – доказательство теоремы 2. Кроме того, в работе не содержится доказательств утверждений, приведенных в замечаниях 1–5. Читатель сможет без особого труда убедиться в их справедливости, внимательно просмотрев доказательства соответствующих теорем. Одно замечание технического характера. Всюду буквой $c$ обозначается достаточно малая положительная постоянная, необязательно всюду одна и та же, независящая от $n$. В то же время буквы $C$ обозначается достаточно большая положительная постоянная, также необязательно всюду одна и так же независящая от $n$. При нашем соглашении, например, $c^2=c$, $2C=C$, и т.д.

## § 2. Некоторые вспомогательные утверждения

Положим

$$P_{n1}=P\{\zeta_n=k;\ \xi_i<k,\ \overline{i=1,\ n-1};\ \xi_n\geqslant k\}.$$

**Лемма 1.** *Если* $k\geqslant \rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}}$, *то*

$$P_{n1}=\frac{1}{2}\,e^{-k^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big).$$

Доказательство. Действительно

$$P_{n1}=\sum_{l\leqslant 0} P\{\bar\zeta_{n-1}=l\}\,e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big), \tag{2.1}$$

где $\bar\zeta_n=\bar\xi_1+\dots+\bar\xi_n$, $\bar\xi_i$ независимы, и

$$P\{\bar\xi_i=l\}=P\{\xi_i=l/\xi_i<k\}.$$

Легко видеть, что

$$\bar m=M\bar\xi_i=\omega,\quad D\bar\xi_i=\bar\sigma^2=\sigma^2+\omega,\quad M|\bar\xi_i|^3=M|\xi_i|^3+\omega. \tag{2,2}$$

Выберем $k_1$ таким образом, чтобы $k_1k^{-\varepsilon}\to 0$, но $\frac{k_1}{\sqrt{n}}\to\infty$. Тогда

$$\sum_{l\leqslant 0} P\{\bar\zeta_{n-1}=l\}\,e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}}=\sum_{0\geqslant l>-k_1}+\sum_{l\leqslant -k_1}=$$

$$=e^{-k^{1-\varepsilon}}P\{0\geqslant\bar\zeta_{n-1}>-k_1\}\Big(1+o(1)\Big)+O\Big(e^{-k^{1-\varepsilon}}P\{|\bar\zeta_{n-1}|>k_1\}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\,e^{-k^{1-\varepsilon}}\times\Big(1+o(1)\Big).$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Если* $\sqrt{n}\leqslant k\leqslant \frac{n}{\rho}^{\frac{1}{2\varepsilon}}$, *то*

$$P_{n1}=\frac{k^{\varepsilon}}{\sigma(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi n}}\,e^{-k^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big).$$

Доказательство. Положим $k_2=[k^{\frac{\varepsilon}{2}}n^{\frac{1}{4}}]$. Тогда $k_2k^{-\varepsilon}\sim(k^{-\varepsilon}\sqrt{n})^{\frac{1}{2}}\to\infty$, а при $k\geqslant\sqrt{n}$

$$k_2k^{-\varepsilon-1}\sim k^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}n^{\frac{1}{4}}\to 0.$$

Далее, как и при доказательстве леммы 1,

$$\sum_{l\leqslant 0} P\{\zeta_{n-1}=l\}\,e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}}=\sum_{-k_2<l\leqslant 0}+\sum_{l\leqslant -k_2}. \tag{2.3}$$

В силу выбора $k_2$, используя локальную предельную теорему, получаем

$$\sum_{-k_2<l\leqslant 0} = \frac{e^{-k^{1-\varepsilon}}}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \sum_{-k_2<l\leqslant 0} e^{lk^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)}\Big(1+o(1)\Big) = \frac{k^{\varepsilon}e^{-k^{1-\varepsilon}}}{\sigma(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi n}} \times$$

$$\times\Big(1+o(1)\Big), \tag{2.4}$$

а

$$\sum_{l\leqslant -k_2} = o\left(e^{-k^{1-\varepsilon}}e^{-k_2 k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)}\right) = o\left(\frac{k^{\varepsilon}}{\sqrt{n}}e^{-k^{1-\varepsilon}}\right). \tag{2.5}$$

Соотношения (2.1), (2.3)–(2.5) доказывают лемму.

**Лемма 3.** *Если*

$$\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho} < k < \rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}},$$

*то*

$$P_{n1} = \frac{e^{-k^{1-\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\sigma u k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)\sqrt{n-1}-\frac{u^2}{2}}\,du\,\Big(1+o(1)\Big).$$

Доказательство. Выберем $k_3$ таким образом, чтобы $k_3 k^{-1-\varepsilon}\to 0$, но $k_3\frac{1}{\rho\sqrt{n}}\to\infty$. Тогда по локальной предельной теореме с оценкой остаточного члена (см., например, [2])

$$\sum_{-k_3<l\leqslant 0} P\{\zeta_{n-1}=l\}\,e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}} = \frac{e^{-k^{1-\varepsilon}}}{\sigma\sqrt{2\pi(n-1)}} \sum_{-k_3<l\leqslant 0} e^{-\frac{(l-m)^2}{2\sigma(n-1)}} \times$$

$$\times\, e^{(1-\varepsilon)k^{-\varepsilon}l}\Big(1+o(1)\Big) + O\left(\frac{k^{\varepsilon}}{n}e^{-k^{1-\varepsilon}}\right). \tag{2.6}$$

Далее в силу выбора $k_3$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(n-1)}} \sum_{-k_3<l\leqslant 0} \exp\left\{-\frac{(l-\bar m)^2}{2\bar\sigma^2(n-1)} + (1-\varepsilon)k^{-\varepsilon}l\right\} =$$

$$= \frac{1}{\bar\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{k_3}{\sqrt{n}}}^{0} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\bar\sigma^2} + k^{-\varepsilon}u\sqrt{n-1}\,(1-\varepsilon)\right\}du\,\Big(1+o(1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{u^2}{2} + \sigma u k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)\sqrt{n-1}\right\}du\,\Big(1+o(1)\Big). \tag{2.7}$$

К тому же

$$\sum_{l\leqslant -k_3} P\{\zeta_{n-1}=l\}\,e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}} = o\left(e^{-k^{1-\varepsilon}-k_3 k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)}\right). \tag{2.8}$$

Если

$$\frac{k^{\varepsilon}}{\sqrt{n}} \not\to 0, \quad \text{то}$$

$$e^{-k_3 k^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)} = o\left(\frac{k^{\varepsilon}}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.9}$$

Если же

$$\frac{k^{\varepsilon}}{\sqrt{n}} \nrightarrow 0,$$

то вместо (2.8) достаточно записать

$$\sum_{l \leqslant -k_8} P\{\bar{\zeta}_{n-1}=l\} e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}} = o\left(e^{-k^{1-\varepsilon}}\right). \tag{2.10}$$

Соотношения (2.1), (2.6)–(2.10) доказывают лемму.

**Лемма 4.** *Пусть* $s=k^{-\varepsilon}(1-\Theta)$, $\Theta<\frac{\varepsilon}{2}$. *Тогда для любого целого* $r\geqslant 2$ *и любого целого* $m\geqslant 0$

$$\sum_{-\infty<l<k^{\varepsilon}} l^m e^{sl} p_l = \sum_{j=0}^{r} \frac{\alpha_{j+m} s^j}{j!} + O\left(s^{r+1}\right),$$

*где*

$$\alpha_j = \sum_l l^j p_l.$$

Доказательство леммы тривиально.

**Лемма 5.** *Пусть* $s=k^{-\varepsilon}(1-\Theta)$, $\Theta<\frac{\varepsilon}{2}$, $k_4=k^{\eta}$, $\varepsilon<\eta<\frac{1+\varepsilon}{2}$.

*Тогда*

$$\sum_{k^{\varepsilon}<l<k} e^{sl} p_l = \sum_{k-k_4\leqslant l<k} e^{sl} p_l^2 + \omega = \frac{k^{\varepsilon} e^{-\Theta k^{1-\varepsilon}}}{\varepsilon-\Theta}\Big(1+o(1)\Big)+\omega.$$

Доказательство. Действительно, в силу выбора $s$ и $k_4$

$$\sum_{k-k_4\leqslant l<k} e^{sl} p_l = \sum_{k-k_4\leqslant l<k} e^{sl-l^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big) = e^{-\Theta k^{1-\varepsilon}} \times$$

$$\times \sum_{k-k_4\leqslant l<k} e^{[s-(1-\varepsilon)k^{-\varepsilon}](l-k)}\Big(1+o(1)\Big) = \frac{k^{\varepsilon} e^{-\Theta k^{1-\varepsilon}}}{\varepsilon-\Theta}\Big(1+o(1)\Big).$$

Легко видеть, что при нашем выборе $s$ и $k_4$

$$\sum_{k^{\varepsilon}<l<k-k_4} e^{sl-l^{1-\varepsilon}} = \omega.$$

Лемма доказана.

## § 3. Доказательство теорем 3 и 5

Запишем $P_n(k)$ в виде

$$P_n(k) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P\{\zeta_n=k;\ \xi_i<k,\ i=\overline{1,\ n-m};\ \xi_i\geqslant k,$$

$$i=\overline{n-m+1,\ n}\} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_{nm}. \tag{3.1}$$

Оценка вероятности $P_{n1}$ содержится в леммах 1 и 3. Далее легко видеть, что

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m P_{nm} = O\left(n^2 \left(P\{\xi_i \geqslant k\}\right)^2\right) = o(nP_{n1}). \tag{3.2}$$

Таким образом, остается лишь оценить $P_{n0}$. Запишем

$$P_{n0} = P\{\bar{\zeta}_n = k\}\left(1 + o(1)\right),$$

где $\bar{\xi}_n = \bar{\xi}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n$, $\bar{\xi}_i$ независимы и

$$P\{\bar{\xi}_i = l\} = P\{\xi_i = l/\xi_i < k\}.$$

Далее нетрудно установить, что

$$P\{\zeta_n = k\} = f_k^n(s)\, e^{-ks} P\{\zeta_n(s) = k\}, \tag{3.3}$$

где

$$f_k(s) = \sum_{l<k} e^{sl} p_l, \quad \zeta_n(s) = \xi_1(s) + \ldots + \xi_n(s), \quad \xi_i(s)$$

независимы и

$$P\{\xi_i(s) = l\} = \begin{cases} \dfrac{e^{sl} P\{\xi_i = l\}}{f_k(s)}, & l < k \\ 0, & l \geqslant k. \end{cases}$$

Оценим теперь $P_{nk}(s) = P\{\xi_n(s) = k\}$. Имеем

$$P_{nk}(s) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} P\{\zeta_n(s) = k/\xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon},\ i = \overline{1,\ n-m};$$

$$k^{\varepsilon} < \xi_i(s) < k;\ i = \overline{n-m+1,\ n}\} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \prod\nolimits_{nm}(s), \tag{3.4}$$

где

$$p = \frac{\sum\limits_{k^{\gamma\varepsilon} < l < k} e^{sl} p_l}{f_k(s)}, \quad q = 1 - p.$$

Пусть теперь $np \to 1$. Это означает, что

$$\Theta = O\left(\frac{\ln n k^{\varepsilon}}{k^{1-\varepsilon}}\right).$$

При таком выборе $s$

$$\left.\begin{aligned} &m(s) = M\{\xi_i(s)/\xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon}\} = s\left(1 + o(s)\right) = k^{-\varepsilon} + o\left(\frac{\ln n k^{\varepsilon}}{k}\right), \\ &\sigma^2(s) = D\{\xi_i(s)/\xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon}\} = 1 + O(k^{-\varepsilon}), \\ &M\{|\xi_i(s)|^3/\xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon}\} = M|\xi_i|^3 + O(k^{-\varepsilon}). \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Тогда можно утверждать, что (см., например, [2])

$$\max_l \left| P\{\zeta_n(s) = l\} - \frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(l - nm(s))^2}{2n\sigma^2(s)}} \right| < \frac{C}{n}, \tag{3.6}$$

где $C$ не зависит от $n$ и $s$. Тогда, как и в лемме 5,

$$\Pi_{n1}=\frac{\sum\limits_{k^{\varepsilon}<l<k} P\{\zeta_{n-1}(s)=k-l\}\, e^{sl-l^{1-\varepsilon}}}{pf_k(s)}\Big(1+o(1)\Big)=$$

$$=\frac{e^{-\Theta k^{1-\varepsilon}}\sum\limits_{0<l<k_4} P\{\zeta_{n-1}(s)=l\}\, e^{-(\varepsilon-\Theta)k^{-\varepsilon}l}}{pf_k(s)}\Big(1+o(1)\Big)+\omega=$$

$$=\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}}\sum_{0<l<k_4} e^{-(\varepsilon-\Theta)k^{-\varepsilon}l}P\{\zeta_{n-1}(s)=l\}\Big(1+o(1)\Big)+\omega. \tag{3.7}$$

Пусть $k^{-\varepsilon}\sqrt{n}\to 0$. Тогда, выбирая $k_1$, как в лемме 1, получаем ввиду (3.5)

$$\sum_{0<l<k_1} e^{-(\varepsilon-\Theta)k^{-\varepsilon}l}P\{\zeta_{n-1}(s)=l\}=P\{0<\zeta_{n-1}(s)<k_1\}\Big(1+o(1)\Big)+$$

$$+O\Big\{P\{|\zeta_{n-1}(s)|\geqslant k_1\}=\frac{1}{2}\Big(1+o(1)\Big),$$

а

$$\sum_{k_1<l<k_4} e^{-(\varepsilon-\Theta)k^{-\varepsilon}l}P\{\zeta_{n-1}(s)=l\}=O\Big(P\{|\zeta_{n-1}(s)|\geqslant k_1\}\Big)=O(1).$$

Таким образом, если $k^{-\varepsilon}\sqrt{n}=o(1)$, то

$$\prod_{n1}(s)=\frac{\varepsilon}{2k^{\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big). \tag{3.8}$$

Пусть теперь $\dfrac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}<k<\rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}}$ (т.е. $k^{-\varepsilon}\sqrt{n}$ сколь угодно медленно меняется). Тогда из (3.6) и (3.7) получаем

$$\prod_{n1}=\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}}\sum_{0<l<k_4}\frac{e^{-(\varepsilon-\Theta)k^{-\varepsilon}l-\frac{(l-nm(s))^2}{2(n-1)\sigma^2(s)}}}{\sigma(s)\sqrt{2\pi(n-1)}}\Big(1+o(1)\Big)+O\Big(\frac{1}{n}\Big)+\omega=$$

$$=\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}u-\frac{1}{2\sigma^2(s)}\left(u-m(s)\sqrt{n-1}\right)^2}\,du\Big(1+o(1)\Big)+$$

$$+O\Big(\frac{1}{k^{\varepsilon}\sqrt{n}}\Big)+o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

В силу (3.5)

$$\frac{m(s)}{\sigma(s)}\sqrt{n-1}=\frac{k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}}{\sigma}+o\Big(\frac{\ln nk^{\varepsilon}}{k}\sqrt{n-1}\Big).$$

Поскольку $k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}$ сколь угодно медленно меняется, то

$$\frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\,u-\frac{1}{2\sigma^2(s)}\left(u-m(s)\sqrt{n-1}\right)^2}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\sigma\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\,u-\frac{1}{2}\left(u-\frac{k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}}{\sigma}\right)^2}\,du\Big(1+o(1)\Big).$$

Таким образом, если

$$\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho} < k < \rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}},$$

то

$$\prod_{n1}(s) = \frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\sigma\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\, u - \frac{1}{2}\left(u - \frac{k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}}{\sigma}\right)^2} du \left(1 + o(1)\right). \tag{3.9}$$

Оценим теперь

$$\prod_{nm}(s)$$

при $0 \leqslant m \leqslant \sqrt{n}$, $m \neq 1$.

Оценим сначала

$$\prod_{n0}(s).$$

Имеем

$$\prod_{n0}(s) = P\{\zeta_n(s) = k / \xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon};\ i = \overline{1,\ n}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\left\{\left(\zeta_n(s) - nm(s)\right)^{2r} / \xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon},\ i = \overline{1,\ n}\right\}}{\left(k - nm(s)\right)^{2r}}.$$

Поскольку

$$M\{|\xi_i(s) - m(s)|^r / \xi_i(s) \leqslant k^{\varepsilon}\} = M|\xi_i|^r + O(s),$$

то

$$\prod_{n0}(s) = O\left(\frac{n^r}{\left(k - nm(s)\right)^{2r}}\right).$$

Выберем $r$ таким образом, чтобы

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{\varepsilon} - 1. \tag{3.10}$$

Тогда при

$$k \geqslant \frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$$

$$\frac{n^r}{\left(k - nm(s)\right)^{2r}} = O(\rho n^{r\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)}) = o(k^{-\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$\prod_{n0}(s) = o(k^{-\varepsilon}). \tag{3.11}$$

Оценим теперь

$\prod_{nm}(s)$ при $2 \leqslant m \leqslant \sqrt{n}$.

Имеем

$$\prod_{nm}(s) = \sum_{k^{\varepsilon}<l_i<k,\ i=1,\ m} \frac{e^{sl_1+\ldots+sl_m-l_1^{1-\varepsilon}-\ldots-l_m^{1-\varepsilon}}}{p^m f_k^m(s)} P\{\zeta_{n-m}(s)-k-$$

$$-l_1-l_2-\ \ldots\ -lm/\zeta_i(s)\leqslant k^{\varepsilon},\ i=\overline{1,\ n-m}\}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k-k_4\leqslant l_i<k} e^{s\sum\limits_{i=1}^{m} l_i-\sum\limits_{i=1}^{m} l_i^{1-\varepsilon}}}{p^m f_k^m(s)}\cdot P\{\zeta_{n-m}(s)=k-l_1-\ldots-l_m/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon}, i=1,\ n-m\}+\omega.$$

Далее

$$P\{\zeta_{n-m}(s)=k-l_1-\ \ldots\ -l_m/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon},\ i=\overline{1,\ n-m}\}<$$

$$<P\{\zeta_{n-m}(s)=-k(m-1)+mk_4/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon},\ i=\overline{1,\ n-m}\}=$$

$$=O\left(M\left\{\left(\zeta_{n-m}(s)-(n-m)\,m(s)\right)^{2r}/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon},\ i=\overline{1,\ n-m}\right\}\right)=$$

$$=O\left(\frac{(n-m)^r}{(m-1)^{2r}k^{2r}}\right)=O\left(\frac{n^r}{k^{2r}}\right).$$

Если $r$ удовлетворяет условию (3.10), то

$$\prod_{nm}(s)=o(k^{-\varepsilon})$$

и

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant\sqrt{n}} C_n^m p^m q^{n-m}\prod_{nm}(s)=o(k^{-\varepsilon}). \tag{3.12}$$

При $m>\sqrt{n}$ оценка $\Pi_{nm}(s)$ производится следующим образом. Прежде всего

$$m_1(s)=M\{\xi_i(s)/k^{\varepsilon}<\xi_i(s)<k\}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k-k^{\varepsilon}<l<k}(k-l)e^{sl-l^{1-\varepsilon}}}{\sum\limits_{k^{\varepsilon}<l<k} e^{sl-l^{1-\varepsilon}}}\left(1+o(1)\right)=k-\frac{k^{\varepsilon}}{\varepsilon}\left(1+o(1)\right),$$

а

$$D\{\xi_i(s)/k^{\varepsilon}<\xi_i(s)<k\}=M\left\{\left(\xi_i(s)-m_1(s)\right)^2\Big/k^{\varepsilon}<\xi_i(s)<k\right\}+$$

$$+\left(k-m_1(s)\right)^2=\frac{2k^{2\varepsilon}}{\varepsilon}\left(1+o(1)\right).$$

Больше того,

$$M\left\{\left(\xi_i(s)-m_1(s)\right)^{2r}\Big/k^{\varepsilon}<\xi_i(s)<k\right\}=O(k^{2r\varepsilon}).$$

Но тогда

$$M\left\{\left(\zeta_m(s)-mm_1(s)\right)^{2r}\Big/k^{\varepsilon}<\xi_i(s)<k,\ i=\overline{1,\ m}\right\}=O(mk^{2r\varepsilon})$$

и, следовательно,

$$\prod_{nm}(s)=P\{\zeta_n(s)=k/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon},\ i=\overline{1,n-m};\ k^{\varepsilon}<\xi_i<k,\ i=\overline{n-m+1,n}\}=$$
$$=O\left(\frac{mk^{2r\varepsilon}}{\left((m-1)k+mm_1(s)\right)^{2r}}\right)=o\left(k^{2r(\varepsilon-1)}\right).$$

Выберем $r$ таким образом, чтобы $1-\varepsilon>\frac{\varepsilon}{2r}$. Тогда

$$\sum_{\sqrt{n}<m\leqslant n} C_n^m p^m q^{n-m}\prod_{nm}(s)=o\left(k^{-\varepsilon}\right). \tag{3.13}$$

Из (3.4), (3.8), (3.9), (3.12) и (3.13)

$$P_{nk}(s)=\frac{\varepsilon}{2ek^{\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big), \tag{3.14}$$

если $k\geqslant\rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}}$, и

$$P_{nk}(s)=\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}e\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\sigma\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\,u-\frac{1}{2}\left(u-\frac{k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}}{\sigma}\right)^2}\mathrm{du}\Big(1+o(1)\Big), \tag{3.15}$$

если

$$\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}<k<\rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

Далее,

$$f_k^n(s)\,e^{-ks}=e^{np-k^{1-\varepsilon}}e^{\Theta k^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big)=\frac{nk^{\varepsilon}e^{1-k^{1-\varepsilon}}}{\varepsilon}\Big(1+o(1)\Big), \tag{3.16}$$

если

$$k\geqslant\rho n^{\frac{1}{2\varepsilon}},$$

и

$$f_k^n(s)\,e^{-ks}=e^{np+\frac{ns^2}{2\sigma^2}-k^{1-\varepsilon}+\Theta k^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big)=$$
$$=\frac{nek^{\varepsilon}}{\varepsilon}e^{\frac{n}{2\sigma^2k^{2\varepsilon}}-k^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big). \tag{3.17}$$

Соотношения (3.1)—(3.4), (3.14) и (3.16) доказывают теорему 3, а соотношения (3.15) и (3.17) доказывают теорему 5.

Локальные предельные теоремы с учетом больших уклонений, когда не выполнено условие Крамера, 11.

## § 4. Доказательства теорем 1, 2 и 4

Запишем, как и прежде (см. (3.1) и (3.2))

$$P_n(k)=P_{n0}+n\,P_{n1}\Big(1+O(1)\Big). \tag{4.1}$$

Оценка вероятности $P_{n1}$ содержится в леммах 1—3. Остается лишь оценить вероятность $P_{n0}$.

Запишем

$$P_{n0}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m \prod\nolimits_{nm}(k), \tag{4.2}$$

где

$$\prod\nolimits_{nm}(k)=P\{\zeta_n=k;\ \xi_i\leqslant k^\varepsilon,\ i=\overline{1,\ n-m};\ k^\varepsilon<\xi_i<k,\ i=\overline{n-m+1,\ n}\}.$$

Пусть $\lambda^{[t]}(x)=\sum_{j=0}^{t}\lambda_j x^j$ — ряд Крамера (см. [1], равенство (19)), урезанный на $t$-ом члене. Докажем ряд лемм.

**Лемма 6.** В наших условиях:

1) при $\sqrt{n}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$\prod\nolimits_{n0}(k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{k^2}{2n\sigma^2}+\frac{k^3}{n^2}\lambda^{[t]}\left(\frac{k}{n}\right)}\Big(1+o(1)\Big),\quad t=\left[\frac{1}{\varepsilon}-2\right]+1;$$

2) при $k>Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$\prod\nolimits_{n0}(k)=\omega e^{-k^{1-\varepsilon}}.$$

В частности, при $k>n^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$, имеем $\Pi_{n0}(k)\equiv 0$. Напомним, что $\omega$ убывает быстрее любой степени $k$.

Доказательство. 1) Пусть $\sqrt{n}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, а $\bar{\xi}_i$ независимы с общим распределением

$$P\{\bar{\xi}_j=l\}=P\{\xi_j=l/\xi_j<k^\varepsilon\}.$$

Положим далее

$$\zeta_n(s)=\xi_1(s)+\ \dots\ +\xi_n(s),\ f(s)=\frac{\sum\limits_{l\leqslant k^\varepsilon} e^{sl}p_l}{\sum\limits_{l\leqslant k^\varepsilon} p_l},$$

где $\xi_j(s)$ независимы и

$$P\{\xi_j(s)=l\}=\frac{e^{sl}p_l}{f(s)}.$$

Поскольку при $s=o(k^{-\varepsilon})$ (см. лемму 4)

$$M(s)=M\xi_j(s)=\frac{f'(s)}{f(s)}=s+\omega+O(s^2),$$

$$D\xi_j(s)=M'(s)=\sigma^2+\omega+O(s),$$

$$M\mid\xi_j(s)\mid^3 M=\mid\xi_j\mid^3+O(s)$$

и

$$\sup_{\substack{|t|>\delta_1\\ 0\leqslant s<Ck^{-\varepsilon}}}\mid Me^{it\xi_j(s)}\mid=1-c,\ c>0,\ \delta_1>0$$

то равномерно по $0 \leqslant s < Ck^{-\varepsilon}$

$$\max_l \left| P\{\zeta_n(s) = l\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi n M'(s)}} e^{-\frac{(l - nM(s))^2}{2nM'(s)}} \right| < \frac{C}{n}. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что

$$\prod_{n0}(k) = P^n\{\xi_j < k^\varepsilon\} P\{\bar{\xi}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n = k\} =$$

$$= f^n(s) e^{-sk} P\{\zeta_n(s) = k\}\Big(1 + o(1)\Big). \tag{4.4}$$

Отсюда и (4.3) получаем при $s = o(k^{-\varepsilon})$

$$\prod_{n0}(k) = f^n(s) e^{-sk} \frac{e^{-\frac{(k - nM(s))^2}{2nM'(s)}}}{\sqrt{2\pi n M'(s)}} \Big(1 + o(1)\Big). \tag{4.5}$$

Положим $\frac{k}{n} = M(s)$. Тогда при $k < Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ можно записать

$$n\Big(\log f(s) - sM(s)\Big) = -\frac{k^2}{2n\sigma^2} + \frac{k^3}{n^2} \lambda^{[t]}\left(\frac{k}{n}\right) + 0\,(1), \tag{4.6}$$

где $t = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$. В частности, при $\varepsilon > \frac{1}{2}$

$$n\Big(\log f(s) - sM(s)\Big) = -\frac{k^2}{2n\sigma^2} + o(1). \tag{4.6$'$}$$

Соотношения (4.4) – (4.6) доказывают п. 1°. леммы.

2) Пусть теперь $k > Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. Положим $H(M(s)) = s$. Тогда вместо (4.4) можно записать

$$\prod_{n0}(k) \leqslant e^{-n \int_0^{\frac{k}{n}} H(u)\, du},$$

поскольку

$$\log f(s) - sM(s) = \int_0^{M(s)} H(u)\, du.$$

При $u = o(k^{-\varepsilon})$, как легко проверить (см. лемму 4)

$$H(u) \sim u + \omega, \tag{4.7}$$

откуда

$$n \int_0^{\frac{k}{n}} H(u)\, du > n \int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k}{n}} H(u)\, du > \frac{k}{2n} H\left(\frac{k}{2n}\right) >$$

$$> \frac{k}{2n} H(Ck^{-\varepsilon}) > Ck^{1-\varepsilon},$$

т.е. $\Pi_{n0}(k) < e^{-Ck^{1-\varepsilon}}$. Лемма доказана полностью.

**Лемма 7.** В наших условиях

1) при $\sqrt{n} < k < \sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}} (c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, $c_\varepsilon = (1+\varepsilon)(2\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$,

$$\prod_{n1}(k) = \omega \prod_{n0}(k);$$

2) при $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}} (c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$\prod_{n1}(k) = \frac{\exp\left\{-\frac{\alpha^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2} + \frac{\alpha^3 k^3}{(n-1)^2}\lambda^{[t]}\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right) - (1-\alpha)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon}\right\}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2 \varepsilon (1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha)^{1+\varepsilon}}}}\Big(1 + o(1)\Big) +$$

$$+\omega \prod_{n0}(k),$$

где $t = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$, а $\alpha$ меньший положительный корень уравнения

$$\sigma^2 \frac{n-1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{\alpha(1-\alpha)^\varepsilon}{1-\varepsilon}\left[1 - \sigma^2 \sum_{j=0}^{t} \lambda_j (j+3)\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right)^{j+2}\right];$$

3) если $Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < \frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$, то в предыдущем утверждении леммы необходимо лишь заменить остаточный член $\omega\Pi_{n0}(k)$ на $\omega e^{-k^{1-\varepsilon}}$.

Доказательство. 1) Пусть $\sqrt{n} < k < \sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, $c_\varepsilon = (1 + \varepsilon)(2\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$.

Запишем

$$\prod_{n1}(k) = \sum_{0<l<k-k^\varepsilon} \prod_{n-1,\,0}(l)\, e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}}\Big(1 + o(1)\Big).$$

Положим

$$h(u) = \frac{u^2}{2\sigma^2} - u^3\lambda^{[t]}(u), \quad h_{n-1}(u) = (n-1)\, h\left(\frac{u}{n-1}\right) + (k-u)^{1-\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Тогда по лемме 3

$$\prod_{n1}(k) = \sum_{0<l<k-k^\varepsilon} \frac{e^{-h_{n-1}(l)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\Big(1 + o(1)\Big).$$

Рассмотрим уравнение

$$h'_{n-1}(u) = h'\left(\frac{u}{n-1}\right) - \frac{1-\varepsilon}{(k-u)^\varepsilon} = 0$$

или, полагая $u = \alpha k$, $0 < \alpha < 1$,

$$\sigma^2 \frac{n-1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{\alpha(1-\alpha)^\varepsilon}{1-\varepsilon}\left[1 - \sigma^2 \sum_{j=0}^{t} \lambda_j (j+3)\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right)^{j+2}\right]. \tag{4.9}$$

Если $\sqrt{n}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, то равномерно по $\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, при любом $\delta_1>0$ имеем

$$\left|\sigma^2\sum_{j=0}^{t}\lambda_j(j+3)\left(\frac{\alpha k}{n-1}\right)^{j+1}\right|<\delta_1 \tag{4.10}$$

для всех достаточно больших $n$.

Легко видеть, что функция $\frac{\alpha(1-\alpha)^{\varepsilon}}{1-\varepsilon}$ достигает максимума при $\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon}$, и величина этого максимума равна

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\varepsilon}=c_1^{-(1+\varepsilon)}.$$

Тогда при $k<c_1\left(\sigma^2\ (1+\delta_1)\ (n-1)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ и всех достаточно больших $n$ уравнение (4.9) корней не имеет. При $c_1\left(\sigma^2\,(1-\delta_1)\,(n-1)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<c_1\left(\sigma^2\ (1+\delta_1)\ (n-1)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ возможны три случая: корней нет, есть два различных корня, есть один двойной корень. Если корень двойной, или его вообще нет, то $h_{n-1}(u)$ монотонно убывает в промежутке $(0,\ k-k^{\varepsilon})$, если же корня два $\alpha_1$ и $\alpha_2$, $0<\alpha_1<\alpha_2$, то в точке $u_1=\alpha_2 k$ — минимум функции $h_{n-1}(\alpha_1 k)$; а в точке $u_2=\alpha_2 k$ — максимум. Таким образом,

$$\prod\nolimits_{n1}(k)<k\,[e^{-h_{n-1}(k-k^{\varepsilon})}+e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}]. \tag{4.11}$$

Оценка $h_{n-1}(k-k^{\varepsilon})$ проста. Из (4.8) получаем

$$(n-1)\,h\left(\frac{k-k^{\varepsilon}}{n-1}\right)=(n-1)\,h\left(\frac{k}{n-1}\right)+O\left(\frac{k^{1+\varepsilon}}{n}\right)$$

т.к. $h'(u)=O(u)$ при $u\to 0$. К тому же при $k=O(n^{\frac{1}{1+\varepsilon}})$

$$(n-1)\,h\left(\frac{k}{n-1}\right)-nh\left(\frac{k}{n}\right)=o(1). \tag{4.12}$$

Таким образом, при $k=O(n^{\frac{1}{1+\varepsilon}})$

$$ke^{-h_{n-1}(k-k^{\varepsilon})}=ke^{-(n-1)h\left(\frac{k-k^{\varepsilon}}{n-1}\right)}-k^{\varepsilon(1-\varepsilon}=\omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)}. \tag{4.13}$$

Оценим теперь $h_{n-1}(\alpha_1 k)$. При $k<\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_{\varepsilon}-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ и всех достаточно больших $n$ меньший корень уравнения (4.9), если он существует, лежит в промежутке

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}+\delta_2,\ \frac{1}{1+\varepsilon}+\delta_3\right),$$

где $\delta_2$ достаточно малое положительное число, зависящее от $\delta$, а $\delta_3$ мало вместе с $\delta_1$. Положим

$$c(\alpha)=\frac{(1-\varepsilon)(1+\alpha)}{2\alpha}.$$

Ясно, что $c(\alpha)$ монотонно убывает в промежутке $(0, 1)$ и к тому же

$$c\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)=1.$$

Тогда, выбрав $\delta$ (а, значит, и $\delta_2$), можно подобрать $\delta_1$ таким образом, чтобы при всех достаточно больших $n$ иметь

$$c\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}+\delta_2\right)<1-\delta_1.$$

Но тогда ввиду (4.9) и (4.10)

$$(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{k^2(1-\alpha_1^2)}{2(n-1)\sigma^2}>(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{c(\alpha)}{1-\delta_1}\right)>ck^{1-\varepsilon}.$$

Поскольку

$$h_{n-1}(\alpha_1 k)-(n-1)h\left(\frac{k}{n-1}\right)=(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{k^2(1-\alpha_1^2)}{2(n-1)\sigma^2}+O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)$$

и

$$\frac{k^3}{n^2}=o(k^{1-\varepsilon}),$$

то

$$h_{n-1}(\alpha_1 k)-(n-1)h\left(\frac{k}{n-1}\right)>ck^{1-\varepsilon}$$

или ввиду (4.12)

$$h_{n-1}(\alpha_1 k)-nh\left(\frac{k}{n}\right)>ck^{1-\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}=\omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)}. \tag{4.14}$$

Соотношения (4.11), (4.13) и (4.14) доказывают первое утверждение леммы.

2) Пусть теперь

$$\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}.$$

В этом случае уравнение (4.9) имеет два положительных корня $\alpha_1$ и $\alpha_2$, причем $0<\alpha_1<\frac{1}{1+\varepsilon}<\alpha_2<1$ и $\alpha_2-\alpha_1\geqslant c>0$ ($c$ зависит от $\delta$). Как и в предыдущем пункте леммы

$$\prod_{n\cdot 1}(k)=\sum_{0<l<k-k^{\varepsilon}}\frac{e^{-h_{n-1}(l)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\left(1+o(1)\right). \tag{4.15}$$

Запишем

$$\sum_{0<l<k-k^{\varepsilon}}\frac{e^{-h_{n-1}(l)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}=\sum_{0<l<n^{\frac{1}{2}+\eta}}+\sum_{|l-\alpha_1 k|<n^{\frac{1}{2}+\eta}}+\sum_{\alpha_1 k+n^{\frac{1}{2}+\eta}<l<\alpha_2 k}+$$

$$+\sum_{\alpha_2 k<l<k-k^{\varepsilon}}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4,$$

где

$$\eta=\frac{1}{12}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Так как

$$h'''_{h-1}(u)=\frac{h''\left(\frac{u}{h-1}\right)}{(n-1)^2}-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}{(k-u)^{\varepsilon+2}},$$

то в промежутке $|l-\alpha_1 k|<n^{\frac{1}{2}+\eta}$

$$h_{n-1}(u)=h_{n-1}(\alpha_1 k)+\frac{h''_{n-1}(\alpha_1 k)}{2}(u-\alpha_1 k)^2+O\left(\frac{n^{\frac{3}{2}+3\eta}}{n^{1+\varepsilon}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{n^{\frac{3}{2}+3\eta}}{n^2}\right)=h_{n-1}(\alpha_1 k)+\left(h''\left(\frac{\alpha_1 k}{n-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma^2\varepsilon(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)^{1+\varepsilon}}\right)\frac{(u-\alpha_1 k)^2}{2(n-1)\sigma^2}+o(1).$$

Отсюда, поскольку $h''\left(\frac{\alpha_1 k}{n-1}\right)\to 1$, немедленно получаем

$$\sum\nolimits_2=\frac{\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2}+\frac{\alpha_1^3 k^3}{(n-1)^2}\lambda^{[t]}\left(\frac{\alpha_1 k}{n-1}\right)-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}\right\}}{\sqrt{1-\frac{\sigma^2\varepsilon(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)^{1+\varepsilon}}}}\Big(1+o(1)\Big). \quad (4.16)$$

В промежутках $(0,\ \alpha_1 k-n^{\frac{1}{2}+\eta})$ и $(\alpha_1 k+n^{\frac{1}{2}+\eta},\ \alpha_2 k)$

$$h_{n-1}(u)>h_{n-1}(\alpha_1 k)+cn^{2\eta}.$$

Откуда

$$\Sigma_i=o\left(ke^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)+cn^{2\eta}}\right)=o(\Sigma_2),\qquad i=1,\ 3. \quad (4.17)$$

В промежутке $(\alpha_2 k,\ k-k^{\varepsilon})$ имеем $h_{n-1}(u)>h_{n-1}(k-k^{\varepsilon})$, откуда (см. (4.13))

$$\Sigma_4<ke^{-h_{n-1}(k-k^{\varepsilon})}=\omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)}. \quad (4.18)$$

Соотношения (4.8), (4.15) – (4.18) доказывают второй пункт леммы.

3) Пусть теперь

$$Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}.$$

Лемма 6 позволяет нам записать следующее

$$\Pi_{n1}(k)=\sum_{0<l<C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Pi_{n-1,0}(l)\,e^{-(k-l)^{1-\varepsilon}}\Big(1+o(1)\Big)+$$

$$+\omega\sum_{C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<l<k-k^{\varepsilon}}e^{-l^{1-\varepsilon}-(k-l)^{1-\varepsilon}}=$$

$$=\sum_{0<l<C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\frac{e^{-h_{n-1}(l)}}{\sigma\sqrt{2\pi(n-1)}}\Big(1+o(1)\Big)=\omega e^{-k^{1-\varepsilon}}. \quad (4.19)$$

Запишем далее

$$\sum_{0<l<C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} = \sum_{0<l<\alpha_1 k-k_2} + \sum_{\alpha_1 k-k_2<l<\alpha_1 k+n^{\frac{1}{2}+\eta}} + \sum_{\alpha_1 k+n^{\frac{1}{2}+\eta}<l<C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} =$$

$$=\Sigma_1' + \Sigma_2' + \Sigma_3',$$

где

$$\eta = \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad k_2 = \min\left(n^{\frac{1}{2}+\eta}, \quad \frac{\alpha_1 k}{2}\right).$$

Оценка суммы $\Sigma_2'$ проводится также, как и суммы $\Sigma_2$ в предыдущем пункте леммы, поскольку $\frac{k_2}{\sqrt{n}}\to\infty$. Проводя ее, получим

$$\Sigma_2' \sim \Sigma_2. \tag{4.20}$$

Выберем $C'$ и $C$ таким образом, чтобы при $Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k$ иметь $\alpha_2 k > C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ (см. уравнение (4.9)). Тогда в промежутке $(\alpha_1 k + n^{\frac{1}{2}+\eta}, \ C'n^{\frac{1}{1+\varepsilon}})$

$$h_{n-1}(u) > h_{n-1}(\alpha_1 k) + cn^{2\eta}$$

и, следовательно, как и прежде

$$\Sigma_3' = o(\Sigma_2'). \tag{4.21}$$

К тому же по определению

$$\Sigma_1' < \alpha_1 k e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k) - ck_2^2} = o(\Sigma_2). \tag{4.22}$$

Соотношения (4.19) – (4.22) доказывают третье утверждение леммы. Лемма доказана полностью.

**Лемма 8.** В наших условиях:

1) при $\sqrt{n} < k < \sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$\sum_{m=2}^{n} C_n^m \Pi_{nm}(k) = \omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} + \omega e^{-k^{1-\varepsilon}};$$

2) при $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$\sum_{m=2}^{n} C_n^m \Pi_{nm}(k) = \omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} + \omega e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)} + \omega e^{-k^{1-\varepsilon}};$$

3) при $k > Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$\sum_{m=2}^{n} C_n^m \Pi_{nm}(k) = \omega e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)} + \omega e^{-k^{1-\varepsilon}}.$$

Здесь $\alpha$ имеет тот же смысл, что и в лемме 7.

Доказательство. Запишем

$$\Pi_{nm}(k) = \sum_{k^{\varepsilon}<l_i<k,\ i=\overline{1,\ m}} \Pi_{n-m,\,0}(k - l_1 - \ldots - l_m)\, e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} l_i^{1-\varepsilon}} + o(m). \tag{4.23}$$

Пусть $m_n=\min(n[k^{1-\eta}])$, $\eta<\varepsilon(1+\varepsilon)$. Тогда при $n\geqslant m>\frac{m_n}{2}$

$$\Pi_{nm}(k)<(2k)^m e^{-mk^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}.$$

По определению $m_n$ при $m>\frac{m_n}{2}$ и всех достаточно больших $n$

$$mk^{\varepsilon(1-\varepsilon)}>\frac{mk^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2}+\frac{m_n k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{4}>\frac{mk^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2}+k^{1-\varepsilon},$$

т.е.

$$\sum_{\frac{m_n}{2}<m\leqslant n} C_n^m \Pi_{nm}(k)<e^{-k^{1-\varepsilon}}\sum_{2\leqslant m\leqslant n} C_n^m (2k)^m e^{-\frac{mk^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2}}=\omega e^{-k^{1-\varepsilon}}. \tag{4.24}$$

Оценим теперь $\Pi_{nm}(k)$ при $2\leqslant m\leqslant\frac{m_n}{2}$. Положим

$$\sum\nolimits_{1m}=\sum_{\substack{k^\varepsilon<l_i<k,\ i=\overline{1,m}\\ \sum_{i=1}^m l_i>k}}\Pi_{n-m,0}(k-l_1-\ldots-l_m)\,e^{-\sum_{i=1}^m l_i^{1-\varepsilon}},$$

$$\sum\nolimits_{2m}=\sum_{\substack{k^\varepsilon<l_i<k,\ i=\overline{1,m}\\ \sum_{i=1}^m l_i\leqslant k}}\Pi_{n-m,0}(k-l_1-\ldots-l_m)\,e^{-\sum_{i=1}^m l_i^{1-\varepsilon}}.$$

Тогда из (4.24)

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant\frac{m_n}{2}} C_n^m \Pi_{nm}(k)<\sum_{2\leqslant m\leqslant\frac{m_n}{2}} C_n^m 2^m\left(\sum\nolimits_{1m}+\sum\nolimits_{2m}\right). \tag{4.25}$$

Поскольку минимум функции $\sum_{i=1}^m u_i^{1-\varepsilon}$ в области $\sum_{i=1}^m u_i>k$, $k^\varepsilon<u_i<k$, $i=\overline{1,m}$ достигается в точках вида $\left(k-(m-1)k^\varepsilon,\ k^\varepsilon,\ \ldots,\ k^\varepsilon\right)$, $\ldots$, $\left(k^\varepsilon,\ \ldots,\ \ldots,k^\varepsilon,\ k-(m-1)k^\varepsilon\right)$, то

$$\sum\nolimits_{1m}<k^m e^{-\left(k-(m-1)k^\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}-(m-1)k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}.$$

При $m\leqslant\frac{m_n}{2}$ и всех достаточно больших $n$

$$\left(k-(m-1)k^\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}>k^{1-\varepsilon}-2(m-1),$$

откуда

$$\sum\nolimits_{1m}<k^m e^{-k^{1-\varepsilon}-\frac{m-1}{2}k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}.$$

Но тогда

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant\frac{m_n}{2}} C_n^m 2^m\sum\nolimits_{1m}<e^{-k^{1-\varepsilon}}\sum_{2\leqslant m\leqslant\frac{m_n}{2}} C_n^m (2k)^m e^{-\frac{m-1}{2}k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}=$$

$$=\omega e^{-k^{1-\varepsilon}}. \tag{4.26}$$

Приступим к оценке сумм $\sum_{2m}$. Легко видеть, что минимум функции $\sum_{i=1}^{m} u_i^{1-\varepsilon}$ на части гиперплоскости $u_1+\ldots+u_m=u$, $k^\varepsilon<u_i<k$, $i=\overline{1,\ m}$ достигается на границе, т.е. в точках вида $\left(u-(m-1)\,k^\varepsilon,\ k^\varepsilon,\ \ldots,\ k^\varepsilon\right)$, $\ldots$, $\left(k^\varepsilon,\ \ldots,\ k^\varepsilon,\ u-(m-1)\,k^\varepsilon\right)$. Тогда (см. доказательство п. 2) леммы 5)

$$\sum_{2m}<k^m e^{-(m-1)\,k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\max_{mk^\varepsilon<l<k}\left[\prod\nolimits_{n-m,\,0}(k-l)\,e^{-\left(l-(m-1)\,k^\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant k^m e^{-(m-1)\,k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\exp\Big\{-\min_{0<l<k-mk^\varepsilon}\Big[(n-m)\int\limits_0^{\frac{l}{n-m}}H(v)\,dv+$$

$$+\left(k-l-(m-1)\,k^\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}\Big]\Big\}\leqslant k^m e^{-(m-1)\,k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\exp\Big\{-\min_{0<l<k-mk^\varepsilon}\times$$

$$\times\left[(n-m)\int\limits_0^{\frac{u}{n-m}}H(v)\,dv+\left(k-u-(m-1)\,k^\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}\right]\Big\}. \tag{4.27}$$

1) Пусть $\sqrt{n}<k<\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}\,(c_\varepsilon-\delta)\,(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. В этом случае (см. (4.8))

$$(n-m)\int\limits_0^{\frac{u}{n-m}}H(v)\,dv=\frac{u^2}{2\,(n-m)\,\sigma^2}+\frac{u^3}{(n-1)^2}\,\lambda^{[t]}\left(\frac{u}{n-m}\right)+$$

$$+o\,(1)=(n-m)\,h\left(\frac{u}{n-m}\right)+o\,(1). \tag{4.28}$$

Положим

$$h_{n-m}(u)=(n-m)\,h\left(\frac{u}{h-m}\right)+\left(k-u-(m-1)\,k^\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}.$$

Тогда

$$\sum_{2m}<k^m e^{-(m-1)\,k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\exp\left\{-\min_{0<u<k-mk^\varepsilon}h_{n-m}(u)\right\}. \tag{4.29}$$

Полагая $u=\alpha_m k$, вместо уравнения (4.9), получаем

$$\alpha_m+\sigma^2\sum_{j=0}^{t}\lambda_j\,(3+j)\left(\frac{k}{n-m}\right)^{1+j}(\alpha_m)^{2+j}=\frac{\sigma^2\,(1-\varepsilon)\,(n-m)}{k^{1+\varepsilon}\,(1-\alpha_m)^\varepsilon}. \tag{4.30}$$

Поскольку в условиях п. 1) $m_n=o\,(n)$ и $m_n=o\,(k^{1-\varepsilon})$, то повторяя рассуждения, использованные при доказательстве п. 1) леммы 6, получаем

$$\sum_{2m}<k^m e^{-(m-1)\,k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\left(e^{-h_{n-m}(\alpha_m k)}+e^{-h_{n-m}(k-mk^\varepsilon)}\right).$$

Далее, как и при доказательстве равенств (4.13) и (4.14) имеем

$$h_{n-m}(k-mk^\varepsilon)=nh\left(\frac{k}{n}\right)+o\,(m) \tag{4.31}$$

и

$$h_{n-m}(\alpha_m k)=h_{n-1}(\alpha_1 k)+o\,(m). \tag{4.32}$$

Отсюда

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant \frac{m_n}{2}} C_n^m 2^m \sum\nolimits_{2m} < \left[e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} + e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}\right] \sum C_n^m (C_k)^m \times$$

$$\times e^{-(m-1)k^{\varepsilon}(1-\varepsilon)} = \omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} + \omega e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}. \tag{4.33}$$

Оценки (4.24) – (4.26), (4.33) доказывают п. 1) нашей леммы.

2) Пусть теперь $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. Перепишем уравнение (4.30) следующим образом

$$\alpha_m + \sigma^2 \sum_{j=0}^{t} (3+j)\lambda_j \left(\frac{k}{n-1}\right)^{1+j} \alpha_m^{2+j} - \frac{\sigma^2(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha_m)^{\varepsilon}} =$$

$$= O\left(\frac{n}{k^{1+\varepsilon}}\cdot\frac{m}{k^{1-\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{m}{k^{1+\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{m\alpha_m^2 k}{n^2}\right) = O\left(\frac{m}{k^{1+\varepsilon}}\right) \tag{4.34}$$

поскольку при $m \leqslant \frac{m_n}{2}$ имеем $\alpha_m = O\left(\frac{n}{k^{1+\varepsilon}}\right)$ и $m = O(k^{1-\varepsilon})$. К тому же из (4.9)

$$\alpha_1 + \sigma^2 \sum_{j=0}^{t} (3+j)\lambda_j \left(\frac{k}{n-1}\right)^{1+j} \alpha_1^{2+j} - \frac{\sigma^2(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)^{\varepsilon}} = 0. \tag{4.35}$$

В условия п. 2) нашей леммы $\alpha_m < \frac{1}{1+\varepsilon}$ и $\alpha_1 < \frac{1}{1+\varepsilon}$, а $\alpha_m(1-\alpha_m)^{\varepsilon}$ и $\alpha_1(1-\alpha_1)^{\varepsilon}$ при больших $n$ сколь угодно близки к одной и той же величине $\frac{\sigma^2(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}}$, которая к нулю не приближается. Поэтому $\alpha_m \to \alpha_1$. Из (4.34) и (4.35) тогда получаем

$$\alpha_m - \alpha_1 - \frac{\sigma^2(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}} \left[\frac{1}{(1-\alpha_m)^{\varepsilon}} - \frac{1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}\right] = O\left(\frac{m}{k^{1+\varepsilon}}\right). \tag{4.36}$$

Поскольку $\alpha_m \to \alpha_1$, то для любого $\delta_4 > 0$ при всех достаточно больших $n$ получаем

$$\frac{1}{(1-\alpha_m)^{\varepsilon}} - \frac{1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}} < \frac{\varepsilon(1+\delta_4)}{(1-\alpha_1)^{1+\varepsilon}}(\alpha_m - \alpha_1).$$

Из (4.9) и (4.10) тогда следует, что

$$1 - \frac{\sigma^2(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{\frac{1}{(1-\alpha_m)^{\varepsilon}} - \frac{1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}}{\alpha_m - \alpha_1} > 1 -$$

$$- \frac{\varepsilon\alpha_1}{1-\alpha_1}(1+\delta_1)(1+\delta_4) > 1 - \varepsilon\alpha_1(1+\delta_5),$$

где $\delta_5$ сколь угодно малое число. При $k > \sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon - \delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ имеем $\alpha_1 < \frac{1}{1+\varepsilon} - \delta_6$, где $\delta_6$, подчеркнем, определяется выбором $\delta_1$. Но тогда

$$1 - \frac{\sigma^2(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{\frac{1}{(1-\alpha_m)^{\varepsilon}} - \frac{1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}}{\alpha_m - \alpha_1} > 1 -$$

$$-\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - \delta_6\right)(1+\varepsilon+\delta_5) > \delta_6(1+\varepsilon) - \frac{\delta_5}{1+\varepsilon}.$$

Поскольку $\delta_6$ зависит от $\delta$, а выбор $\delta_5$ в наших руках, то можно считать, что $\delta_6(1+\varepsilon)^2 > \delta_5$. Но тогда из (4.36) получаем

$$\alpha_m - \alpha_1 = O\left(\frac{m}{k^{1+\varepsilon}}\right). \tag{4.37}$$

Как и в предыдущем пункте леммы

$$\sum\nolimits_{2m} < k^m e^{-(m-1)k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}} \left[e^{-h_{n-m}(k-mk^{\varepsilon})} + e^{-h_{n-m}(\alpha_m k)}\right]. \tag{4.38}$$

Из (4.37) имеем

$$h_{n-m}(\alpha_m k) = (n-m)\, h\left(\frac{\alpha_m k}{n-m}\right) + \left(k - \alpha_m k - (m-1)k^{\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon} =$$

$$= (n-1)\, h\left(\frac{\alpha_m k}{n-m}\right) + k^{1-\varepsilon}(1-\alpha_m)^{1-\varepsilon} + O(m) = (n-1)\, h\left(\frac{\alpha_m k}{n-1}\right) +$$

$$+ k^{1-\varepsilon}(1-\alpha_m)^{1-\varepsilon} + O(m) + O\left(m\,\frac{\alpha_m^2 k^2}{n^2}\right) = (n-1)\, h\left(\frac{\alpha_1 k}{n-1}\right) +$$

$$+ k^{1-\varepsilon}(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon} + O\left(\frac{(\alpha_m-\alpha_1)\,\alpha_m k^2}{n}\right) + O\left((\alpha_m-\alpha_1)\,k^{1-\varepsilon}\right) + O(m) =$$

$$= (n-1)\, h\left(\frac{\alpha_1 k}{n-1}\right) + (1-\alpha_1)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon} + O(m) = h_{n-1}(\alpha_1 k) + O(m). \tag{4.39}$$

К тому же, как и в предыдущем пункте леммы

$$h_{n-m}(k - mk^{\varepsilon}) = nh\left(\frac{k}{n}\right) + k^{\varepsilon(1-\varepsilon)} + O(m). \tag{4.40}$$

Из оценок (4.38) – (4.40) получаем

$$\sum_{2 \leqslant m \leqslant \frac{m_n}{2}} C_n^m 2^m \sum\nolimits_{2m} \leqslant \left[e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} + e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}\right] \sum_{2 \leqslant m \leqslant n} C_n^m (2k)^m \times$$

$$\times e^{-\frac{(m-1)k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2}} = \omega e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} + \omega e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}. \tag{4.41}$$

Соотношения (4.24) – (4.26), (4.41) доказывают второе утверждение леммы.

3) Пусть теперь $k > Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. Запишем, имея ввиду (4.27)

$$\min_{0<u<k-mk^{\varepsilon}} \left[(n-m)\int_0^{\frac{u}{n-m}} H(v)\,dv + \left(k-u-(m-1)k^{\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon}\right] =$$

$$= \min\left(\min_{0<u<C' n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} (\ldots),\ \min_{C' n^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < u < k-mk^{\varepsilon}} (\ldots)\right), \tag{4.42}$$

где $C'$ выбирается так же, как и в п. 3) леммы 7 (на $C'$ распространяется соглашение, принятое на стр. 161). Как и в п. 2) нашей леммы получаем

$$\min_{0<u<C' n^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} \left[(n-m)\int_0^{\frac{u}{n-m}} H(v)\,dv + \left(k-u-(m-1)k^{\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon}\right] =$$

$$= h_{n-1}(\alpha_1 k) + o(m). \tag{4.43}$$

При $C' n^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < u < k - mk^{\varepsilon}$, $m \leqslant \frac{m_n}{2}$ (см. (4.43))

$$(n-m)\int\limits_{0}^{\frac{u}{n-m}} H(v)\,dv>(n-m)\int\limits_{\frac{u}{2(n-m)}}^{\frac{u}{n-m}} H(v)\,dv>\frac{u}{2}\,H\left(\frac{u}{2(n-m)}\right)>$$

$$>\frac{u}{2}\,H\left(\frac{u}{2n}\right)>\frac{u}{2}\,H(C'u^{-\varepsilon})>C'u^{1-\varepsilon}.$$

Но тогда

$$(n-m)\int\limits_{0}^{\frac{u}{n-m}} H(v)\,dv+\left(k-u-(m-1)\,k^{\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon}>u^{1-\varepsilon}+\left(k-u-\right.$$

$$\left.-(m-1)\,k^{\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon}>k^{1-\varepsilon}-Cm$$

или

$$\min_{Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<u<k-mk^{\varepsilon}}\left((n-m)\int\limits_{0}^{\frac{u}{n-m}} H(v)\,dv+\left(k-u\,(m-1)\,k^{\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon}\right)>$$

$$>k^{1-\varepsilon}-Cm. \tag{4.44}$$

Из (4.27), (4.42) – (4.44), получаем

$$\sum\nolimits_{2m}<(Ck)^{m}e^{-(m-1)k^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\left(e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}+e^{-2^{\varepsilon}k^{1-\varepsilon}}\right)$$

или

$$\sum_{2\leq m\leq\frac{m_n}{2}} C_n^m\,(2k)^m\sum\nolimits_{2m}=\omega e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}+\omega e^{-k^{1-\varepsilon}}. \tag{4.45}$$

Оценки (4.24) – (4.26), (4.45) доказывают п. 3) нашей леммы. Лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы 1. 1) Пусть поначалу $\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. Тогда ввиду леммы 2, 6–8

$$P_n(k)=\Pi_{n0}(k)\left(1+o(1)\right)+n\Pi_{n1}(k)\left(1+o(1)\right)+nP_{n1}\left(1+o(1)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\,e^{-\frac{k^2}{2n\sigma^2}+\frac{k^3}{n^2}\lambda^{[t]}\left(\frac{k}{n}\right)}\left(1+o(1)\right)+n\frac{e^{-\frac{\alpha_1^2k^2}{2(n-1)\sigma^2}+\frac{\alpha_1^3k^3}{(n-1)^2}\lambda^{[t]}\left(\frac{\alpha_1 k}{n-1}\right)}}{\sqrt{1-\frac{\sigma^2\varepsilon(1-\varepsilon)(n-1)}{k^{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)^{1+\varepsilon}}}}\times$$

$$\times e^{-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}}\left(1+o(1)\right)+\frac{k^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\,\sigma\sqrt{2\pi n}}\,e^{-k^{1-\varepsilon}}\left(1+o(1)\right). \tag{4.46}$$

Сравним первое и второе слагаемые в равенстве (4.46). Так же как при доказательстве соотношения (4.14) получаем, что $\alpha_1<\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}-\delta_7$ ($\delta_7$ зависит от $\delta$), когда $k>\sigma^{\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon+\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ и, следовательно,

$$\frac{k^2}{2(n-1)\sigma^2}-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{\alpha_1^2k^2}{2(n-1)\sigma^2}>ck^{1-\varepsilon}. \tag{4.47}$$

Далее

$$nh\left(\frac{k}{n}\right)-h_{n-1}(\alpha_1 k)=(n-1)\,h\left(\frac{k}{n-1}\right)-h_{n-1}(\alpha_1 k)+o(1)=$$

$$=\frac{k^2}{2(n-1)\sigma^2}-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2}+O\left(\frac{k^3}{n^2}\right). \tag{4.48}$$

Из (4.47), (4.48) получаем при $\sigma^{-\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon+\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$

$$e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)}=\omega e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}. \tag{4.49}$$

Сравним теперь второе и третье слагаемые в равенстве (4.46), считая, что $\sigma^{-\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ (напомним, что мы доказываем сразу две теоремы 2 и 4). С этой целью запишем для всех достаточно больших $n$, используя (4.9) и (4.10)

$$k^{1-\varepsilon}-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2}>k^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{1-\alpha_1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1-\varepsilon}{2}\cdot\frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}\left(1+\delta_1\right)\right)>k^{1-\varepsilon}\left[1-\frac{1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}\left(1-\frac{1+\varepsilon}{2}\alpha_1(1+\delta_8)\right)\right],$$

где $\delta_8$ зависит от $\delta_1$.

Если $k>\sigma^{-\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, то $\alpha_1<\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}+\delta_2$ ($\delta_2$ зависит от $\delta$) и, следовательно,

$$k^{1-\varepsilon}-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2}>k^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}{2(2\varepsilon)^{\varepsilon}}(1+\delta_9)\right),$$

где $\delta_9$ зависит от и $\delta$ и от $\delta_1$. Так как при любом $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, $\frac{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{\varepsilon}}<2$, то, выбрав $\delta_9$ достаточно малым, получим

$$k^{1-\varepsilon}-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2}>ck^{1-\varepsilon}. \tag{4.50}$$

Поскольку

$$k^{1-\varepsilon}-h_{n-1}(\alpha_1 k)=k^{1-\varepsilon}-(1-\alpha_1)^{1-\varepsilon}k^{1-\varepsilon}-\frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2}+O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)$$

и $\frac{k^3}{n^2}=o(k^{1-\varepsilon})$, то из неравенства (4.50) следует, что при

$$\sigma^{-\frac{2}{1+\varepsilon}}(c_\varepsilon-\delta)(n-1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

$$k^{\varepsilon}e^{-k^{1-\varepsilon}}=o\left(\Pi_{n1}(k)\right). \tag{4.51}$$

2) Пусть теперь $Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}<k<\frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$. В этом случае ввиду доказанных лемм вместо (4.46) следует записать

$$P_n(k)=n\Pi_{n1}(k)\left(1+O(1)\right)+nP_{n1}\left(1+O(1)\right). \tag{4.52}$$

Поскольку при $k>Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ и достаточно больших $n$ из (4.9) имеем

$$\frac{3(1-\varepsilon)}{2}\frac{n}{k^{1+\varepsilon}}>\alpha_1>\frac{1-\varepsilon}{2}\frac{n}{k^{1+\varepsilon}}$$

то, как следует из леммы 7 п. 2),

$$\Pi_{n1}(k) > ck^{\varepsilon} e^{-h_{n-1}(\alpha_1 k)}. \tag{4.53}$$

И к тому же, как и в п. 1) доказываемой теоремы,

$$k^{1-\varepsilon} - (1-\alpha_1)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon} - \frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2} > k^{1-\varepsilon}\Bigg(1 -$$

$$- \frac{1}{(1-\alpha_1)^{\varepsilon}}\left(1 - \frac{1+\varepsilon}{2}\,\alpha_1(1+\delta_8)\right)\Bigg) > c\alpha_1 k^{1-\varepsilon}.$$

Откуда для всех достаточно больших $n$

$$k^{1-\varepsilon} - (1-\alpha_1)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon} - h_{n-1}(\alpha_1 k) = k^{1-\varepsilon} - (1-\alpha_1)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon} - \frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2} +$$

$$+ O\left(\frac{\alpha_1^3 k^3}{n^2}\right) > c\alpha_1 k^{1-\varepsilon} - C\,\frac{\alpha_1^3 k^3}{n^2} > c\,\frac{n}{k^{2\varepsilon}} - C\,\frac{n}{k^{3\varepsilon}} > c\,\frac{n}{k^{2\varepsilon}}. \tag{4.54}$$

Из соотношений (4.52) – (4.54) получаем при $Cn^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < k < \frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}$

$$P_n(k) = n\,\Pi_{n1}(k)\left(1 + o(1)\right). \tag{4.55}$$

3) Покажем, что при $\varepsilon > \frac{1}{2}$ вместо уравнения (4.9) можно ограничиться более простым уравнением

$$\sigma^2\,\frac{(n-1)}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{\alpha(1-\alpha)^{\varepsilon}}{1-\varepsilon}. \tag{4.56}$$

Нетрудно усмотреть, что $\alpha = \alpha_1\left(1 + O(k^{-\varepsilon})\right)$, где $\alpha$ — корень уравнения (4.56). Далее при $\varepsilon > \frac{1}{2}$

$$h_{n-1}(\alpha_1 k) = \frac{\alpha_1^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2} + (1-\alpha_1)^{1-\varepsilon} k^{1-\varepsilon} = \frac{\alpha^2 k^2}{2(n-1)\sigma^2} +$$

$$+ (1-\alpha^{1-\varepsilon}) k^{1-\varepsilon} + O\left(\frac{n}{k^{3\varepsilon}}\right) = h_{n-1}(\alpha k) + o(1). \tag{4.57}$$

Соотношения (4.46), (4.49), (4.51), (4.52), (4.55), (4.57) доказывают теорему 2, соотношения (4.46), (4.51), (4.55), (4.57) доказывают теорему 4.

Ташкент
ин-т мат-ки им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило в редакцию
19. I. 1968

**Литература**

1. Г. Крамер, Об одной новой предельной теореме теории вероятностей, УМН, X (1944), 166–178.
2. М. Маматов, Об оценке остаточного члена в локальной предельной теореме для случая, решетчатых распределений, Тр. ТашГУ, 189 (1961), 49–54.
3. А. В. Нагаев, Локальные предельные теоремы с учетом больших уклонений, Сб. Предельные теоремы и вероятностные процессы, Ташкент (1967), 71–88.
4. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, «Наука», М., 1965, гл. 6–14.

## LOKALINĖS RIBINĖS TEOREMOS DIDELIEMS ATSILENKIMAMS, KAI NEPATENKINTA KRAMERIO SĄLYGA. I

A. NAGAJEVAS

(*Reziumė*)

Sakykime, $\xi_j$, $j=1, 2, \ldots$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių diskretinių atsitiktinių dydžių seka. Tarkime, kad

$$P\{\xi_j=k\}\sim e^{-|k|^{1-\varepsilon}}, \qquad 0<\varepsilon<1,$$

kai $|k|\to\infty$.

Darbe nagrinėjamos tikimybės

$$P\{\xi_1+\ldots+\xi_n=k\}$$

elgesys visiems $k\geqslant 0$.

Remiantis naudojamu metodu, galima iš esmės apibendrinti gautus rezultatus.

## LOCAL LIMIT THEOREMS TAKING INTO ACCOUNT LARGE DEVIATIONS IN THE CASE WHEN CRAMÉR'S CONDITION DOES NOT HOLD

A. NAGAEV

(*Summary*)

Let $\xi_j$ be the sequence of independent samely distributed lattice random variables. For simplicity it is assumed that

$$P\{\xi_j=k\}\sim e^{-k^{1-\varepsilon}}, \qquad 0<\varepsilon<1$$

when k grows to infinity.

The problem to be considered is a behavior of probability

$$P\{\xi_1+\ldots+\xi_n=k\}$$

or all $k\geqslant 0$.

The method applied here gives the opportunity to generalize all results to a great extent