VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК — 519.21

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Пусть имеется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Не нарушая общности, можем предполагать, что ξ_i не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{l=1}^{m} \xi_l, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots \tag{1}$$

Случайный процесс

$$N(t)=\max\{m: Sm<t\}, \qquad t\in[0,\ \infty)$$

принято называть процессом восстановления. Если величины ξ_k интерпретировать как длительности существования последовательности заменяемых элементов, то $N(t)$ будет числом восстановлений элемента за отрезок времени $[0,\ t)$.

В. Феллером в работе [1] (см. также [2] и [4]), исходя из соотношения

$$P\{S_m<t\}=P\{N(t)\geqslant m\}$$

в частности, была доказана следующая теорема об асимптотической нормальности $N(t)$ при больших t: если $\mu_2<\infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{N(t)-\frac{t}{\mu_1}}{\bar\sigma\sqrt{t}}<x\right\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

где

$$\mu_r=\sum_{k=0}^{\infty} k^r p_k, \quad \bar\sigma^2=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}.$$

Мы будем рассматривать последовательность

$$N_1(t),\ N_2(t),\ \ldots,\ N_n(t),\ \ldots$$

независимых одинаково распределенных процессов восстановления. Сумму $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ можно интерпретировать как число восстановлений за отрезок времени $[0,\ t)$ в системе, состоящей из n однородных элементов.

В работе [6] Б. Григелионисом была получена асимптотическая нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ при больших значениях n и t для процесса восстановления, распределение времени восстановления (или величины ξ_l) которого имеет абсолютно непрерывную компоненту. В. Лютикас в работе [7] получил тот же результат для дискретного процесса восстановления. Но в обеих работах предполагалось существование четвертого момента времени восстановления, т. е. предполагалось, что $\mu_4 < \infty$. В работе [8] доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ для дискретного процессса восстановления при менее жестких условиях, а именно в предположении, что $\mu_2 < \infty$. Тот же результат для процесса восстановления, распределение времени восстановления которого имеет абсолютно непрерывную компоненту, получен в настоящей заметке.

Обозначим

$$F_m(x) = P\{S_m < x\}, \quad \bar{N}_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{nt}} \sum_{l=1}^{n} \left(N_l(t) - \Lambda(t)\right),$$

$$\Lambda(t) = MN_l(t) \text{ и } F_{n,t}(x) = P\{\bar{N}_n(t) < x\}.$$

Теорема. *Если* $\mu_2 < \infty$ *и* $F(x)$ *имеет абсолютно непрерывную компоненту, то*

$$\lim_{n,\, t \to \infty} F_{n,t}(x) = \Phi(x)$$

равномерно относительно x.

Замечание. Теорема остается верной и тогда, когда вместо условия „$F(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту“ требуется условие „при некотором ν $F^{*\nu}(x)$ имеет абсолютную непрерывную компоненту“.

Доказательство. Наряду с величинами ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, рассмотрим величины ξ_l', $l=1, 2, \ldots$, определенные следующим образом:

$$\xi_l' = \begin{cases} \xi_l, \text{ если } \xi_l \leqslant c\sqrt{nt}, \\ c\sqrt{nt}, \text{ если } \xi_l > c\sqrt{nt}, \end{cases}$$

где $c = \max\left(1, \frac{1}{\mu_1}\right)$. Обозначим

$$S_m' = \sum_{l=1}^{m} \xi_l', \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad \bar{F}_m(x) = P\{S_m' < x\},$$

$$N_k'(t) = \max\{m : S_m' < t\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\bar{N}_n'(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{nt}} \sum_{k=1}^{n} \left(N_k'(t) - \Lambda(t)\right)$$

и

$$\bar{F}_{n,t}(x) = P\{\bar{N}_n'(t) < x\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|P\{S_m<x\}-P\{S'_m<x\}|\leqslant 2m\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} dF(x). \tag{3}$$

Поскольку

$$m\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} dF(x)\leqslant \frac{1}{c^2}\,\frac{m}{nt}\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} x^2\,dF(x),$$

то при $m\leqslant c^2nt$

$$m\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} dF(x)\to 0. \tag{4}$$

С другой стороны, из условий теоремы следует, что при $m>c^2nt$, $n\to\infty$ и $t\to\infty$ (см. также (42′) настоящей работы)

$$P\{S_m<t\}\to 0$$

и

$$P\{S'_m<t\}\to 0. \tag{5}$$

Из соотношений (3)—(5) получаем, что при $n\to\infty$ и $t\to\infty$ для всех m

$$|P\{S_m<t\}-P\{S'_m<t\}|\to 0, \tag{6}$$

а в силу (2) и (6) и

$$|F_{n,t}(x)-\bar{F}_{n,t}(x)|\to 0.$$

Следовательно, чтоб доказать теорему, достаточно доказать, что при $n\to\infty$ и $t\to\infty$

$$\bar{F}_{n,t}(x)\to\Phi(x) \tag{7}$$

равномерно относительно x.

Пусть далее

$$f_t(z)=Me^{iz\left(N'_e(t)-\Lambda(t)\right)}.$$

В силу независимости процессов $N'_i(t)$ имеем

$$f_{n,t}(z)=Me^{iz\bar{N}'_n(t)}=\left(Me^{iz\frac{1}{\sigma\sqrt{nt}}\left(N'_e(t)-\Lambda(t)\right)}\right)^n=$$

$$=f_t^n\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)=\left[e^{-\frac{iz}{\sigma\sqrt{nt}}\Lambda(t)}f_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)\right]^n, \tag{8}$$

где $f_t(z)$ является характеристической функцией величины $N'_i(t)$. Но

$$\bar{f}_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)=1+\frac{iz}{\sigma\sqrt{nt}}M\left(N'_i(t)-\Lambda(t)\right)-\frac{z^2}{2\sigma^2nt}M\left(N'_i(t)-\Lambda(t)\right)^2+$$

$$+\frac{z^2}{2\sigma^2nt}\left(\bar{f}''_t\left(\vartheta\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)-\bar{f}''_t(0)\right),\qquad 0<\vartheta<1, \tag{9}$$

и, согласно (8),

$$\bar{f}''_t(z)=i^2\Lambda^2(t)\,e^{-iz\Lambda(t)}f_t(z)-2i\Lambda(t)\,e^{-iz\Lambda(t)}f'_t(z)+e^{-iz\Lambda(t)}f''_t(z). \tag{10}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими преобразованиями Лапласа и Лапласа—Стилтьеса, соответственно:

$$^*f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\bar{F}(x)\,dx \quad \text{и} \quad f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x).$$

Если $Q(x)=1-\bar{F}(x)$, то $q(s)=\int_0^\infty e^{-sx}Q(x)\,dx=\frac{1-f(s)}{s}$.

Далее, в силу (2) имеем

$$f_t(z)=\sum_{r=0}^{\infty} e^{izr}P\{N'_e(t)=r\}=\sum_{r=0}^{\infty} e^{izr}[P\{S'_{r+1}<t\}-P\{S'_r<t\}]=$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty} e^{iz(r-1)}(e^{iz}-1)P\{S'_r<t\}. \tag{11}$$

Применяя преобразование Лапласа по t к выражению (11), получаем, что

$$\psi(s;\ z)=\int_0^\infty e^{-st}f_t(z)\,dt=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{\infty} e^{iz(r-1)}(e^{iz}-1)f^r(s)=$$

$$=\frac{1-f(s)}{s\left(1-e^{iz}f(s)\right)}=\frac{q(s)}{1-e^{iz}f(s)}. \tag{12}$$

Отсюда нетрудно видеть, что проебразованиями Лапласа по t от $f'_t(z)$ и $f''_t(z)$ являются соответственно выражения

$$[\psi(s;\ z)]'_z=\frac{ie^{iz}f(s)q(s)}{[1-e^{iz}f(s)]^2}$$

и

$$[\psi(s;\ z)]''_z=\frac{i^2e^{iz}f(s)q(s)}{[1-e^{iz}f(s)]^2}+2\,\frac{i^2e^{2iz}f^2(s)q(s)}{[1-e^{iz}f(s)]^3}. \tag{13}$$

Пусть, далее, $s(z)$ является корнем уравнения

$$1-e^{iz}f(s)=0, \tag{14}$$

т. е. $1-e^{iz}f\left(s(z)\right)=0$. Нетрудно видеть, что при $z=0$ уравнение (14) имеет корень $s(0)=0$. Далее, так как $f'\left(s(0)\right)\neq 0$, то $s(0)$ является простым корнем. Следовательно, мы можем воспользоваться свойствами неявных функций (см., напр., [10], стр. 95—102), согласно которым существует такое число $\Delta_{nt}>0$, что уравнение (14) определяет в интервале $[-\Delta_{nt},\ \Delta_{nt}]$ однозначную, непрерывную и дважды дифференцируемую функцию $s=s(z)$, обращающую это уравнение в тождество и удовлетворяющую равенству $s(0)=0$. Вместо интервала $[-\Delta_{nt},\ \Delta_{nt}]$ можно взять интервал, в котором

$$[1-e^{iz}f(s)]'_s\neq 0.$$

Так как $f'_t(s)\neq 0$ для всех $s\in\left\{s:\frac{2\sqrt{\ln nt}}{\sqrt{nt}}=\bar{\Delta}_{nt}\right\}$, то вместо интервала $[-\Delta_{nt},\ \Delta_{nt}]$ можно, например, взять интервал $[-c_1\bar{\Delta}_{nt},\ c_1\bar{\Delta}_{nt}]$, где $c_1=\frac{1}{2}\min(1,\ \mu_1)$. Тогда при всех $|z|\leqslant \bar{c}_1\Delta_{nt}$ справедливо разложение

$$s(z)=s(0)+s'(0)\,z+s''(0)\,\frac{z^2}{2}+o(z^2).$$

Для вычисления производных $s'(0)$ и $s''(0)$ воспользуемся уравнениями

$$f\left(s(z)\right) \equiv e^{-iz},$$

$$s'(z) f'\left(s(z)\right) = -ie^{-iz},$$

$$s''(z) f'\left(s(z)\right) + s'^2(z) f''\left(s(z)\right) = (-i)^2 e^{-iz}.$$

Отсюда при $z=0$ получаем

$$s'(0) = -\frac{i}{f'(0)} = \frac{i}{m_1},$$

$$s''(0) = i^2 \frac{m_1^2 - f''(0)}{m_1^3 f'(0)} = i^2 \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^3},$$

где $m_k = \int\limits_0^\infty x^k d\bar{F}_k(x)$, $\quad k=1, 2$. Следовательно,

$$s(z) = \frac{iz}{m_1} + \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^3} \frac{(iz)^2}{2} + o(z^2) =$$

$$= \frac{iz}{\mu_1} + \frac{\sigma^2}{2}(iz)^2 + o\left(\frac{|z|}{\sqrt{nt}} + z^2\right). \tag{15}$$

В дальнейшем нам придется воспользоваться свойством, что $-[\psi(s; z)]_s'$ является трансформацией Лапласа по t от $tf_t(z)$. Для этой цели и будем исследовать

$$[\psi(s;\ z)]_s' = \left[\frac{q(s)}{1-e^{iz}f(s)}\right]_s' = \frac{q'(s)}{1-e^{iz}f(s)} + \frac{e^{iz}q(s)f'(s)}{[1-e^{iz}f(s)]^2}. \tag{16}$$

Далее, так как

$$1 - e^{iz}f(s) = 1 - e^{iz}f(s) - \left[1 - e^{iz}f\left(s(z)\right)\right] = e^{iz}\left[f\left(s(z)\right) - f(s)\right]$$

и при $|z| \leqslant c_1 \bar{\Delta}_{nt}$ и достаточно больших t и $nf_t'(s(z)) \neq 0$, то при тех же z и достаточно больших t и n

$$\frac{1}{1-e^{iz}f(s)} = e^{-iz}\frac{1}{f\left(s(z)\right) - f(s)} = e^{-iz}\frac{1}{f'\left(s(z)\right)\left(s(z)-s\right)} + w(s;\ z), \tag{17}$$

где

$$w(s;\ z) = e^{-iz}\frac{f(s) - f\left(s(z)\right) - f'\left(s(z)\right)\left(s - s(z)\right)}{f'\left(s(z)\right)\left[f(s) - f\left(s(z)\right)\right]\left(s - s(z)\right)} =$$

$$= e^{-iz}\frac{\dfrac{f(s) - f\left(s(z)\right) - f'\left(s(z)\right)\left(s - s(z)\right)}{\left(s - s(z)\right)^2}}{f'\left(s(z)\right)\dfrac{f(s) - f\left(s(z)\right)}{s - s(z)}} = e^{-iz}\frac{q_2(s;\ z)}{f'\left(s(z)\right)\ q_1(s;\ z)}. \tag{18}$$

Сначала покажем, что $w(s;\ z)$ является частным двух преобразований Лапласа от функций из класса L_1.

Имеем

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\bar{F}_1(x) = f\left(s(z)\right)\int\limits_0^\infty e^{-\left(s - s(z)\right)x} dG(x;\ z), \tag{19}$$

где

$$G(x;\ z)=\frac{1}{f(s(z))}\int\limits_0^x e^{-s(z)u}\,d\bar{F}_1(u).$$

Пусть

$$G_1(x;\ z)=-\frac{f(s(z))}{f'(s(z))}\int\limits_0^x [1-G(u;\ z)]\,du.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG_1(x;\ z)=\frac{\left[-f(s(z))\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG(u;\ z)\right]}{f'(s(z))\,s},$$

и отсюда

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG(x;\ z)=1+\frac{f'(s(z))}{f(s(z))}\,s\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG_1(x;\ z). \qquad (20_1)$$

Если далее

$$G_2(x;\ z)=-\frac{2f'(s(z))}{f''(s(z))}\int\limits_0^x [1-G_1(u;\ z)]\,du,$$

то согласно (20_1)

$$\int\limits_0^\infty e^{sx}\,dG(x;\ z)=1+\frac{f'(s(z))}{f(s(z))}\,s+\frac{f''(s(z))}{2!\,f(s(z))}\,s^2\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG_2(x;\ z). \qquad (20_2)$$

Из (19), (20_1) и (20_2) имеем

$$f(s)=f\left(s(z)\right)\int\limits_0^\infty e^{-(s-s(z))\,x}\,dG(x;\ z)=f\left(s(z)\right)+$$

$$+f'\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)\int\limits_0^\infty e^{-(s-s(z))\,x}\,dG_1(x;\ z)$$

и

$$f(s)=f\left(s(z)\right)+f'\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\,f''\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)^2\int\limits_0^\infty e^{-(s-s(z))\,x}\,dG_2(x;\ z).$$

Далее если

$$F_1(x;\ z)=\int\limits_0^x e^{s(z)u}\,dG_1(u;\ z),\qquad F_2(x;\ z)=\int\limits_0^x e^{s(z)u}\,dG_2(u;\ z),$$

а $f_1(s;\ z)$ и $f_2(s;\ z)$ являются преобразованиями Лапласа—Стилтьеса функций $F_1(x;\ z)$ и $F_2(x;\ z)$ соответственно, то $f_1(s;\ z)$ и $f_2(s;\ z)$ будут и преобразованиями Лапласа от функций из класса L_1. И из соотношений

$$f(s)=f\left(s(z)\right)+f'\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)f_1(s;\ z)$$

и

$$f(s)=f\left(s(z)\right)+f'\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)+\frac{1}{2!}\,f''\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)^2 f_2(s;\ z)$$

видно, что $w(s;\ z)$ является отношением двух преобразований Лапласа от функций из класса L_1.

Теперь наша ближайшая цель – показать, что $w(s;\ z)$ при $|z| \leqslant c_1\overline{\Delta}_{nt}$ и $\mathrm{Re}\, s > 0$ является преобразованием Лапласа—Стилтьеса функции ограниченного изменения $W(t;\ z)$. Для этой цели введем вспомогательную функцию

$$\varphi_A(u) = \begin{cases} 1, \\ 2 - \frac{|u|}{A}, & A \leqslant |u| \leqslant 2A, \\ 0, & |u| > 2A, \end{cases}$$

определенную для всех действительных u, и положим

$$w(-iu;\ z) = w_1(u;\ z) + w_2(u;\ z),$$

где

$$w_1(u;\ z) = \varphi_A(u) w(-iu;\ z) \quad \text{и} \quad w_2(u;\ z) = [1 - \varphi_A(u)]\, w(-iu;\ z).$$

Сначала покажем, что при постоянном A обе функции $w_1(u;\ z)$ и $w_2(u;\ z)$ будут преобразованиями Фурье—Стилтьеса функций ограниченного изменения.

Заметим, что

$$w_1(u;\ z) = e^{-iz}\varphi_A(u)\, \frac{f(-iu) - f(s(z)) - f'(s(z))\,(-iu - s(z))}{f'(s(z))\,[f(-iu) - f(s(z))]\,(-iu - s(z))} =$$

$$= e^{-iz}\, \frac{\varphi_A(u)\, \dfrac{f(-iu) - f(s(z)) - f'(s(z))\,(-iu - s(z))}{(-iu - s(z))^2}}{f'(s(z))\, \dfrac{f(-iu) - f(s(z))}{-iu - s(z)}} = \frac{e^{-iz}\varphi_A(u)\, q_2(-iu;\ z)}{f'(s(z))\, q_1(-iu;\ z)}. \qquad (21)$$

Далее, так как $\varphi_A(u)$ является преобразованием Фурье функции из класса L_1, то и $\varphi_A(u)\, q_2(-iu;\ z)$ является преобразованием Фурье функции из класса L_1. Следовательно, $w_1(s;\ z)$ является отношением двух функций, каждая из которых является преобразованием Фурье функции из класса L_1. Кроме того, знаменатель этого отношения нигде не обращается в нуль, а числитель обращается в нуль вне конечной области. Опираясь на известную теорему Винера (см. [11], стр. 207), мы можем утверждать, что при достаточно больших n и t и при $|z| < c_1\overline{\Delta}_{nt}$ $w_1(u;\ z)$ является преобразованием Фурье функции из L_1, а следовательно, и преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения.

Далее имеем, что

$$w_2(u;\ z) = -[1 - \varphi_A(u)]\, \frac{f(-iu) - f(s(z)) - f'(s(z))\,(-iu - s(z))}{f'(s(z))\, \left\{1 - e^{iz} f(-iu)\,[1 - \varphi_{A/2}(u)]\right\}\,(-iu - s(z))} =$$

$$= \frac{1 - \varphi_A(u)}{1 - e^{iz} f(-iu)\,[1 - \varphi_{A/2}(u)]} - [1 - \varphi_A(u)]\, \frac{q_1(-iu;\ z)}{f'(s(z))\left\{1 - e^{iz} f(-iu)\,[1 - \varphi_{A/2}(u)]\right\}}.$$

Очевидно, что эта функция будет преобразованием Фурье–Стилтьеса функции ограниченного изменения, если это утверждение справедливо для функции

$$\{1-e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\{e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{k}=$$

$$=\lim_{r\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}r^{k}\{e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{k}$$

при любом $0<r<1$. Но $\{e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{k}$ является преобразованием Фурье–Стилтьеса функции ограниченного изменения. Кроме того, согласно условиям теоремы имеем

$$|f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]|<1. \tag{22}$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}r^{k}\{e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{k}$$

абсолютно сходится, и его сумма

$$\{1-re^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{-1} \tag{23}$$

является преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения. В силу условия (22) в выражении (23) возможен предельный переход при $r\to 1$, и мы имеем, что выражение

$$\lim_{r\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}r^{k}\{e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{k}=$$

$$=\lim_{r\to 1}\frac{1}{1-re^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]}=\frac{1}{1-e^{iz}f(-iu)[1-\varphi_{A/2}(u)]}$$

является преобразованием Фурье–Стилтьеса функции ограниченного изменения. Следовательно, то же самое можно утверждать и о функции $w_2(-iu;z)$. Сопоставляя этот результат с аналогичным результатом для $w_1(u;z)$, видим, что можно написать

$$w(-iu;\ z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}dW(t;\ z), \tag{24}$$

где $W(t;z)$ – функция ограниченного изменения. Соотношение (24) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{0}e^{iut}\,dW(t;\ z)=-\int_{0}^{\infty}e^{iut}dW(t;\ z)+w(-iu;\ z).$$

Далее заметим, что знаменатель функции $w(s;z)$ не обращается в нуль при $\mathrm{Re}\,s>0$, и выражение $|w(s;z)|$ является ограниченным при $\mathrm{Re}\,s\geqslant 0$. Таким образом, функция от s

$$-\int_{0}^{\infty}e^{-st}dW(t;\ z)+w(s;\ z)$$

будет аналитической и ограниченной в правой полуплоскости с границей по мнимой оси. Аналогично, функция от s

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\,dW(t;\ z)$$

будет аналитической и ограниченной в левой полуплоскости и непрерывной в замкнутой полуплоскости с границей по мнимой оси. Кроме того, на мнимой оси эти две функции совпадают. Таким образом, эти две функции являются частями одной и той же аналитической функции (см. [9], стр. 180), которая оказывается целой и ограниченной. Следовательно, она сводится к постоянной, а поскольку

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\,dW(t;\ z) \to 0, \qquad \text{когда} \qquad s \to -\infty,$$

то эта постоянная может быть только нулем. Таким образом,

$$w(s;\ z) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\,dW(t;\ z),$$

где $W(t;\ z)$ — функция ограниченного изменения.

Теперь опять вернемся к выражению $[\psi(s;\ z)]'_s$. Согласно (16) и (17) имеем

$$\begin{aligned}[\psi(s;\ z)]'_s = {} & e^{-iz}\frac{q'(s)}{f'\big(s(z)\big)\big(s(z)-s\big)} + \\ & + q'(s)\,w(s;\ z) + e^{-iz}\frac{q(s)f'(s)}{f'^2\big(s(z)\big)\big(s-s(z)\big)^2} + \\ & + 2\frac{q(s)f'(s)\,w(s;\ z)}{f'\big(s(z)\big)\big(s(z)-s\big)} + e^{iz}q(s)f'(s)\,w^2(s;\ z). \end{aligned} \qquad (25)$$

Обозначим $q(s)f'(s) = r(s)$. В силу того, что $\mu^{-1}q(s)$ является преобразованием Лапласа плотности распределения неотрицательной случайной величины, имеющей первый конечный момент (см. [3], лемма 3), $r(s)$ будет преобразованием Лапласа функции $\bar{r}(t)$ из класса L_1, а следовательно и преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции ограниченного изменения и имеющей первый конечный момент. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{q(s)f'(s)}{f'^2\big(s(z)\big)[s-s(z)]^2} = {} & \frac{q\big(s(z)\big)f'\big(s(z)\big)}{f'^2\big(s(z)\big)[s-s(z)]^2} + \\ & + \frac{q'\big(s(z)\big)f'\big(s(z)\big)+q\big(s(z)\big)f''\big(s(z)\big)}{f'^2\big(s(z)\big)[s-s(z)]} + \\ & + \frac{r(s)-r\big(s(z)\big)-[r(s)]'_{s(z)}\big(s-s(z)\big)}{f'^2\big(s(z)\big)[s-s(z)]^2}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Последний член правой части равенства (26) является преобразованием Лапласа функции

$$\frac{1}{f'^2(s(z))}\left[te^{s(z)t}*\bar r(t)-r\left(s(z)\right)te^{s(z)t}-[r(s)]'_{s(z)}e^{s(z)t}\right]=$$

$$=\frac{1}{f'^2(s(z))}\left[\int\limits_0^{c\sqrt{nt}}(t-y)e^{s(z)(t-y)}\bar r(y)\,dy-te^{s(z)t}\int\limits_0^{c\sqrt{nt}}e^{-s(z)y}\bar r(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+e^{s(z)t}\int\limits_0^{c\sqrt{nt}}e^{-s(z)y}y\bar r(y)\,dy\right]=$$

$$=\frac{1}{f'^2(s(z))}e^{s(z)t}\int\limits_t^{c\sqrt{nt}}(y-t)e^{-s(z)y}\bar r(y)\,dy=o(1). \quad (27)$$

Далее,

$$\frac{q'(s)}{s-s(z)}=\frac{q'\left(s(z)\right)}{s-s(z)}+\frac{q'(s)-q'\left(s(z)\right)}{s-s(z)}$$

является преобразованием Лапласа функции

$$-e^{s(z)t}*t\bar q(t)+e^{s(z)t}q'\left(s(z)\right)=$$

$$=-\int\limits_0^t e^{s(z)(t-y)}y\bar q(y)dy+e^{s(z)t}\int\limits_0^{c\sqrt{nt}}e^{-s(z)y}y\bar q(y)\,dy=$$

$$=e^{s(z)t}\int\limits_t^{c\sqrt{nt}}e^{-s(z)y}y\bar q(y)\,dy=o(1). \quad (28)$$

(Здесь $\bar q(t)$ — функция, преобразованием Лапласа которой является $q(s)$. Еще заметим, что если $t\geqslant c\sqrt{nt}$, то выражения (27) и (28) равны нулю.)

Аналогично, если $v(s;z)=q(s)f'(s)w(s;z)$, то $v(s;z)$ является преобразованием Лапласа функции $\bar v(t;z)$ из L_1, и

$$\frac{q(s)f'(s)w(s;z)}{s-s(z)}=\frac{\frac{1}{2}e^{-iz}q\left(s(z)\right)f''\left(s(z)\right)}{f'\left(s(z)\right)\left(s-s(z)\right)}+\frac{v(s;z)-v\left(s(z);z\right)}{s-s(z)}, \quad (29)$$

где последний член правой части является преобразованием Лапласа функции ограниченной вариации, которая стремится к нулю при $t\to\infty$.

Далее, так как

$$q'(s)=-\frac{f'(s)}{s}-\frac{q(s)}{s},$$

то

$$q'(s)w(s;z)=e^{iz}q(s)f'(s)w^2(s;z)=\frac{\Omega(s)}{s}=o(1) \quad \text{при} \quad s\to0,$$

где $\Omega(s)$ является трансформацией Лапласа—Стилтьеса функции ограниченного изменения $\omega(t)$. Следовательно, при $s\to0$ $\Omega(s)$ стремится к конечному пределу $\omega(\infty)$. Поскольку $\Omega(s)\to0$ при $s\to0$, то и $\omega(t)\to0$ при $t\to\infty$. Отсюда согласно соотношениям (25) – (29) окончательно получаем, что $[\psi(s; z)]_z'$ является трансформацией Лапласа функции

$$e^{-iz} e^{s(z)t}\, t\, \frac{q(s(z))}{f'(s(z))} + \lambda(t; z),$$

где $\lambda(t; z)$ – функция ограниченной вариации и стремящееся к нулю при $t \to \infty$. Итак, при всех $|z| < c_1 \bar{\Delta}_{nt}$ и достаточно больших n и t

$$f_t(z) = -e^{-iz} e^{s(z)t} \frac{q(s(z))}{f'(s(z))} \left[1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right]. \tag{30}$$

Приступим к отысканию функции $f_t'(z)$ и $f_t''(z)$. Согласно (13) имеем

$$[\psi(s; z)]_z' = i\, \frac{q(s)}{[1 - e^{iz} f(s)]^2} - i\, \frac{q(s)}{1 - e^{iz} f(s)} \tag{31}$$

и

$$[\psi(s; z)]_z'' = 2i^2 \frac{q(s)}{[1 - e^{iz} f(s)]^3} - 3i^2 \frac{q(s)}{[1 - e^{iz} f(s)]^2} + i^2 \frac{q(s)}{1 - e^{iz} f(s)}. \tag{32}$$

Но в силу (17)

$$\frac{q(s)}{[1 - e^{iz} f(s)]^2} = e^{-2iz} \frac{q(s)}{f'^2(s(z))\,[s - s(z)]^2} -$$
$$- 2e^{-iz} \frac{q(s)\, w(s; z)}{f'(s(z))\,(s - s(z))} + q(s)\, w^2(s; z) \tag{33}$$

и

$$\frac{q(s)}{[1 - e^{iz} f(s)]^3} = -e^{-3iz} \frac{q(s)}{f'^3(s(z))\,[s - s(z)]^3} + 3e^{-2iz} \frac{q(s)\, w(s; z)}{f'^2(s(z))\,[s - s(z)]^2} -$$
$$- 3e^{-iz} \frac{q(s)\, w^2(s; z)}{f'(s(z))\,[s - s(z)]} + q(s)\, w^3(s; z). \tag{34}$$

Далее имеем

$$\frac{q(s)}{[s - s(z)]^3} = \frac{q(s(z))}{[s - s(z)]^3} + \frac{q'(s(z))}{[s - s(z)]^2} + \frac{q(s) - q(s(z)) - q'(s(z))\,(s - s(z))}{[s - s(z)]^3}, \tag{35}$$

где

$$\frac{q(s) - q(s(z)) - q'(s(z))\,(s - s(z))}{[s - s(z)]^3}$$

является преобразованием Лапласа функции

$$\frac{1}{2} t^2 e^{s(z)t} * \bar{q}(t) - \frac{1}{2} t^2 e^{s(z)t} \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{-s(z)y} \bar{q}(y)\, dy +$$
$$+ t e^{s(z)t} \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{-s(z)y} y \bar{q}(y)\, dy = \frac{1}{2} t^2 e^{s(z)t} \int_t^{c\sqrt{nt}} e^{s(z)y} \bar{q}(y)\, dy +$$
$$+ t e^{s(z)t} \int_t^{c\sqrt{nt}} e^{-s(z)y} y \bar{q}(y)\, dy + e^{s(z)t} \int_0^t y^2 e^{-s(z)y} \bar{q}(y)\, dy = o(t). \tag{36}$$

Аналогично получаем, что функции

$$\frac{q(s)\,w(s;\,z)}{[s-s(z)]^2},\quad \frac{q(s)}{[s-s(z)]^3},\quad \frac{q(s)\,w(s;\,z)}{s-s(z)} \quad \text{и} \quad \frac{q(s)\,w^2(s;\,z)}{s-s(z)} \tag{37}$$

являются преобразованиями Лапласа функций соответственно

$$\frac{1}{2}\,te^{s(z)t}\,\frac{q\left(s(z)\right)f''\left(s(z)\right)}{f'^3\left(s(z)\right)}+o(t),$$

$$te^{s(z)t}q\left(s(z)\right)+e^{s(z)t}q'\left(s(z)\right)+o(1),\ \ \frac{1}{2}\,e^{s(z)t}\frac{q\left(s(z)\right)f''\left(s(z)\right)}{f'^3\left(s(z)\right)}+o(1) \tag{38}$$

и

$$\frac{1}{2}\,e^{s(z)t}\,\frac{q\left(s(z)\right)f''\left(s(z)\right)}{f'^3\left(s(z)\right)}+o(1),$$

а функции $q(s)w^2(s;z)$ и $q(s)w^3(s;z)$ являеются преобразованиями Лапласа функций ограниченного изменения, которые стремятся к нулю при $t\to\infty$. Следовательно, согласно соотношениям (31)–(38) для всех $|z|\leqslant c_1\bar{\Delta}_{nt}$ и достаточно больших n и t получаем

$$f_t'(z)=ite^{s(z)t}e^{-2iz}\,\frac{q\left(s(z)\right)}{f'^2\left(s(z)\right)}+ie^{s(z)t}e^{-2iz}\,\frac{q'\left(s(z)\right)}{f'^2\left(s(z)\right)}-$$

$$-ie^{s(z)t}e^{-2iz}\,\frac{q\left(s(z)\right)f''\left(s(z)\right)}{f'^3\left(s(z)\right)}+ie^{s(z)t}e^{-iz}\,\frac{q\left(s(z)\right)}{f'\left(s(z)\right)}+o(1) \tag{39}$$

и

$$f_t''(z)=i^2e^{s(z)t}e^{-3iz}\left[-t^2\,\frac{q\left(s(z)\right)}{f'^3\left(s(z)\right)}-2t\,\frac{q'\left(s(z)\right)}{f'^3\left(s(z)\right)}+3t\,\frac{q\left(s(z)\right)f''\left(s(z)\right)}{f'^4\left(s(z)\right)}\right]-$$

$$-3i^2te^{s(z)t}e^{-2iz}\,\frac{q\left(s(z)\right)}{f'^2\left(s(z)\right)}+o(t). \tag{40}$$

Отметим еще, что при предположениях нашей теоремы (см. [5])

$$\Lambda(t)=\frac{t}{\mu_1}+\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}-1\right)+o(1)$$

и

$$M\left(N_t(t)-\Lambda(t)\right)^2=t\,\frac{\sigma^2}{\mu_1^3}+o(t)=\bar{\sigma}^2t+o(t). \tag{41}$$

Тогда

$$MN_t'(t)-\Lambda(t)=\frac{t}{m_1}-\frac{t}{\mu_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}-\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}+o(1)=$$

$$=o\left(\frac{t}{\sqrt{nt}}\right)+o(1)\quad\text{при}\quad n\leqslant c^2t,\quad \left(c=\max\left(1,\ \frac{1}{\mu_1}\right)\right), \tag{42}$$

$$MN_t'(t)-\Lambda(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_k'<t\}-\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_k<t\}=\sum_{k=1}^{\infty}[\bar{F}_k(t)-F_k(t)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^t\bar{F}_1(t-y)\,d\bar{F}_{k-1}(y)-\int_0^tF_1(t-y)\,dF_{k-1}(y)\right]=0\ \text{при}\ n>c^2t \tag{42'}$$

и

$$M\left(N_t'(t)-\Lambda(t)\right)^2=t\bar{\sigma}^2+o(t). \tag{43}$$

Далее,

$$q\left(s(z)\right)=\mu_1+o\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\right)+O(|z|),$$

$$f'\left(s(z)\right)=-\mu_1+o\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\right)+O(|z|) \tag{44}$$

и

$$f''\left(s(z)\right)=\mu_2+o(1).$$

Окончательно из соотношений (10), (30) – (44) для всех $|z|<\frac{Z}{\sigma\sqrt{nt}}$, где Z – любое положительное число, и достаточно больших n и t имеем

$$f_t''(z)=i^2e^{--iz\Lambda(t)}e^{s(z)t}\,e^{-iz}\left\{\Lambda^2(t)\left[\frac{q(s(z))}{f'(s(z))}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right]-\right.$$

$$-2\Lambda(t)\left[te^{-iz}\frac{q(s(z))}{f'^2(s(z))}+e^{-iz}\frac{q'(s(z))}{f'^2(s(z))}-e^{-iz}\frac{q(s(z))f''(s(z))}{f'^3(s(z))}+\right.$$

$$\left.+\frac{q(s(z))}{f'(s(z))}+o(1)\right]-t^2e^{-2iz}\frac{q(s(z))}{f'^3(s(z))}-2te^{-2iz}\frac{q'(s(z))}{f'^3(s(z))}+$$

$$\left.+3te^{-2iz}\frac{q(s(z))f''(s(z))}{f'^4(s(z))}-3te^{-iz}\frac{q(s(z))}{f'^3(s(z))}+o(t)\right\}=$$

$$=i^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1^2}iz+\frac{\sigma^2t}{2}(iz)^2+o\left(|z|+tz^2+\frac{t|z|}{\sqrt{nt}}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{-t^2\frac{q(s(z))}{f'(s(z))}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{e^{-iz}}{f'(s(z))}\right)^2+t\left[\frac{1}{\mu_1}+\frac{e^{-iz}}{f'(s(z))}\right]\times\right.$$

$$\times\left[\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\right)\frac{q(s(z))}{f'(s(z))}-2e^{-iz}\frac{q'(s(z))}{f'^2(s(z))}+2e^{-iz}\frac{q(s(z))f''(s(z))}{f'^3(s(z))}-\right.$$

$$\left.\left.-2e^{-iz}\frac{q(s(z))}{f'(s(z))}\right]+te^{-iz}\left[\frac{q(s(z))f''(s(z))}{f'^4(s(z))}-\frac{q(s(z))}{f'^3(s(z))}\right]+o(t)\right\}=$$

$$=-\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^2}t+O(t|z|)+o(t)=-\sigma^2t+O(t|z|+t^2z^2)+o(t).$$

Отсюда и из (41) – (43) для всех z, лежащих в произвольном конечном интервале $|z|\leqslant Z$, и всех достаточно больших n и t

$$f_t''\left(\vartheta\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)-f_t''(0)=O\left(\frac{t|z|}{\sqrt{nt}}+\frac{tz^2}{n}\right)+o(t). \tag{45}$$

Далее из (9), (41) – (43) и (45) находим, что для всех $|z|\leqslant Z$ и достаточно больших n и t

$$f_t\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{nt}}\right)=1-\frac{z^2}{2n}-R_{n,t}(z), \tag{46}$$

где

$$R_{n,t}(z)=O\left(\frac{z^3}{n\sqrt{nt}}\right)+o\left(\frac{z^2}{n}\right).$$

Значит для всех z, заключенных в любом конечном интервале $|z|\leqslant Z$ и достаточно больших n и t $\bar{f}_t\left(\frac{z}{\bar{\sigma}\sqrt{nt}}\right)$ отлична от нуля, и из соотношений (8) и (46) окончательно получаем

$$\lim_{n,\,t\to\infty}\ln f_{n,\,t}(z)=\lim_{n,\,t\to\infty} n\ln\left[1-\left(\frac{z^2}{2n}+R_{n,\,t}(z)\right)\right]=-\frac{z^2}{2}.$$

Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
16.V.1968

Литература

1. W. Feller, Fluctuation Theory of Recurrent Events, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949), 98—119.
2. L. Takacs, On a probability theorem arising in the theory of counters, Proc. Camb. Phil. Soc., **52** (1956), 488—498.
3. W. L. Smith, Asymptotic Renewal Theorems, Proc. Roy. Soc. Edinb., A. **64** (1954), 9—48.
4. W. L. Smith, Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, **20**, (1958), 2, 243—302.
5. W. L. Smith, On the comulants of renewal processes, Biometrica, **46**, 1—2 (1959), 1—29.
6. Б. Григелионис, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. мат. сб., IV, № 2 (1964), 197–201.
7. В. Лютикас, О центральной предельной теореме для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. мат. сб. VI, № 3 (1966), 381–392.
8. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. мат. сб. VII, № 3 (1967), 381–388.
9. Е. Титчмарш, Теория Функций, М.–Л., 1951.
10. И. Г. Арманович, Р. С. Гутер, Л. А. Люстерник и др., Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, Физматгиз, (1961).
11. D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, 1946.

CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA ATSTATYMO PROCESŲ SUMOMS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Sakysime, turime seką ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su bendra pasiskirstymo funkcija $F(x)$. Žymėsime

$$\mu_r=\int_0^\infty x^r dF(x), \quad S_0=0, \quad S_m=\sum_{l=1}^m \xi_l, \quad m=1, 2, \ldots$$

Atsitiktinį procesą $N(t)$, $t\varepsilon$ $[0, \infty]$ vadinsime atstatymo procesu, kai

$$N(t)=\max\{m: S_m>t\}.$$

Darbe nagrinėjama seka $N_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, n$, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių procesų. Įrodoma, jei $\mu_2<\infty$ ir $F(x)$ turi absoliučiai tolydinę komponentę, tai tolygiai atžvilgiu x

$$\lim_{n,\,t\to\infty} P\left\{\frac{1}{\bar\sigma\sqrt{nt}}\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)-\Lambda(t)\right)<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Čia

$$\Lambda(t)=MN_j(t),\qquad \bar\sigma^2=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}.$$

THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SUMS OF THE RENEWAL PROCESSES

(Summary)

A. ALESKEVIČIENĖ

Let ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, be a sequence of independent nonnegative equally distributed random variables with distribution function $F(x)$.

Let

$$\mu_r=\int_0^{\infty} x^r\,dF(x),\qquad S_0=0,\qquad S_m=\sum_{l=1}^{m}\xi_l,\qquad m=1, 2, \ldots$$

A stochastic process $N(t)=\max\{m: S_m<t\}$, $t\in[0, \infty]$, is called the renewal process.

The sequence $N_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, n$, of the independent equally distributed renewal processes is examined in this paper. We prove that if $\mu_2<\infty$ and $F(x)$ has an absolutely continuous component, then

$$\lim_{n,\,t\to\infty} P\left\{\frac{1}{\bar\sigma\sqrt{nt}}\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)-\Lambda(t)\right)<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

uniformly with respect to x, where

$$\Lambda(t)=MN_l(t),\qquad \bar\sigma^2=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\mu_1^3}.$$