УДК — 517.432.1

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА—СТИЛТЬЕСА И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

В. Г. АБДРАХМАНОВ

В работе [1] Г. Л. Лунцем для комплексных функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ таких, что $f(x, y)$ – функция ограниченной вариации в области D:

$$-\infty < a \leqslant x \leqslant A < \infty, \quad -\infty < b \leqslant y \leqslant B < \infty,$$

а $\varphi(x, y)$ равномерно непрерывна в той же области, следующим образом определены интегралы

$$\int_a^A \int_b^B \varphi(x, y)\, ddf(x, y) \quad \text{и} \quad \int_a^A \int_b^B |\varphi(x, y)\, ddf(x, y)|: \tag{1}$$

рассмотрены бесконечные последовательности действительных чисел $\{x_i^{(k)}\}$ и $\{y_j^{(k)}\}$ такие, что

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_n^{(k)} < \cdots < A, \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = A,$$

$$b = y_0^{(k)} < y_1^{(k)} < \cdots < y_n^{(k)} < \cdots < B, \quad \lim_{n\to\infty} y_n^{(k)} = B,$$

интегралами (1) названы соответственно пределы

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi[\bar{x}_i^{(k)}, \bar{y}_j^{(k)}]\, \Delta\Delta f[x_i^{(k)}, y_j^{(k)}] \tag{2}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi[\bar{x}_i^{(k)}, \bar{y}_j^{(k)}]\, \Delta\Delta f[x_i^{(k)}, y_j^{(k)}]|, \tag{3}$$

где

$$\Delta\Delta f[x_i^{(k)}, y_j^{(k)}] = f[x_{i+1}^{(k)}, y_{j+1}^{(k)}] - f[x_i^{(k)}, y_{j+1}^{(k)}] - f[x_{i+1}^{(k)}, y_j^{(k)}] +$$
$$+ f[x_i^{(k)}, y_j^{(k)}], \quad x_i^{(k)} \leqslant \bar{x}_i^{(k)} \leqslant x_{i+1}^{(k)}, \quad y_j^{(k)} \leqslant \bar{y}_j^{(k)} \leqslant y_{j+1}^{(k)}$$

и пределы берутся при условии, что наибольшие из величин $x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}$, $y_{j+1}^{(k)} - y_j^{(k)}$ при $k\to\infty$ стремятся к нулю.

Так как оказывается, что предел (3) в общем случае может не существовать, то следует уточнить определение второго из интегралов (1) и считать, что

$$\int_a^A \int_b^B |\varphi(x, y)\, ddf(x, y)| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi[\bar{x}_i^{(k)}, \bar{y}_j^{(k)}]\, \Delta\Delta f[x_i^{(k)}, y_j^{(k)}]|.$$

В работе [1] определена область абсолютной сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{-zt} ddA(t) \qquad (t = re^{i\varphi}), \tag{4}$$

это — область G_1, точки $z=x+iy$ которой при всех $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ удовлетворяют неравенству

$$x \cos\varphi - y \sin\varphi - h(\varphi) > 0,$$

где $h(\varphi) = \lim\limits_{\alpha \to 0} H(\varphi, \alpha)$,

$$H(\varphi, \alpha) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \ln \int\limits_0^r \int\limits_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} |ddA(t)|, \quad \text{если} \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} |ddA(t)| = \infty,$$

$$H(\varphi, \alpha) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \ln \int\limits_r^\infty \int\limits_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} |ddA(t)|, \quad \text{если} \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha} |ddA(t)| < \infty.$$

Предположим теперь, что для некоторой последовательности $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n| < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, существуют монотонная последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n = o\left(\frac{1}{|\lambda_n|}\right)$, и положительная монотонная функция $F(x)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} F(\alpha_n) = 0$, $|\lambda_n| + F(\alpha_n) < |\lambda_{n+1}| - F(\alpha_{n+1})$ при достаточно большом n (для того, чтобы это неравенство было справедливо, достаточно, например, чтобы $F(\alpha_n) = o(|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|)$). Предположим также, что

1) модуль приращения величины

$$\arg\left[A(r_2 e^{i\varphi_2}) - A(r_2 e^{i\varphi_1}) - A(r_1 e^{i\varphi_2}) + A(r_1 e^{i\varphi_1})\right]$$

при переходе от любой пары точек $r_1 e^{i\varphi_1}$, $r_2 e^{i\varphi_2}$ $(r_1 \leqslant r_2,\ \varphi_1 \leqslant \varphi_2)$ из области P_n:

$$[r_n - F(\alpha_n),\ \ r_n + F(\alpha_n);\qquad \Theta_n - \alpha_n,\ \ \Theta_n + \alpha_n] \qquad (\lambda_n = r_n e^{i\Theta_n})$$

к другой паре точек в этой же области при достаточно большом n не превышает 2θ, где $\theta < \frac{\pi}{2}$,

2) последовательность

$$\{I_n\} = \left\{ \int\limits_{r_n - F(\alpha_n)}^{r_n + F(\alpha_n)} \int\limits_0^{2\pi} e^{-zt}\, ddA(t) - \int\limits_{r_n - F(\alpha_n)}^{r_n + F(\alpha_n)} \int\limits_{\Theta_n - \alpha_n}^{\Theta_n + \alpha_n} e^{-zt}\, ddA(t) \right\}$$

по модулю растет медленнее, чем $\exp(\alpha r_n)$ при любом $\alpha > 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|I_n|}{\exp(\alpha r_n)} = 0$.

Введем функцию $k(\psi)$ следующим образом. Обозначим

$$K(\psi, \alpha) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{r_{n_k}} \ln \int\limits_{r_{n_k} - F(\alpha_{n_k})}^{r_{n_k} + F(\alpha_{n_k})} \int\limits_{\Theta_{n_k} - \alpha_{n_k}}^{\Theta_{n_k} + \alpha_{n_k}} |ddA(t)|,$$

где $\{n_k\}$ — последовательность индексов, для которых области P_{n_k} принадлежат углу $\psi - \alpha \leqslant \arg z \leqslant \psi + \alpha$. Неубывающая относительно α функция $K(\psi, \alpha)$ имеет предел $k(\psi) = \lim\limits_{\alpha\to 0} K(\psi, \alpha)$.

Обозначим G_2 область, точки $z=x+iy$ которой при всех $0\leqslant\varphi<2\pi$ удовлетворяют неравенству

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)>0.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Если при каком-либо выборе* $\{\lambda_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{F(\alpha_n)\}$, *удовлетворяющих условиям* 1—2, $G_2=G_1$ (*что, в частности, имеет место, если при всех* $0\leqslant\varphi<2\pi$ $k(\varphi)=h(\varphi)$), *то область сходимости интеграла* (4) *совпадает с областью его абсолютной сходимости.*

Доказательство. Достаточно показать, что вне G_2 интеграл (4) расходится. Пусть $z=x+iy\in\bar{G}_2$, т. е. при некотором ψ

$$x\cos\psi-y\sin\psi-k(\psi)<0.$$

При достаточно малом α неравенство

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\psi)+\delta<0,$$

где положительное число δ достаточно мало, выполняется для всех $\varphi\in[\psi-\alpha,\ \psi+\alpha]$, и из определения $k(\varphi)$ следует, что в интервале $[\psi-\alpha,\ \psi+\alpha]$ при достаточно малом α неравенество

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi<K(\psi,\ \alpha)-\delta+\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

выполняется для сколь угодно малого ε, $0<\varepsilon<\delta$.

Оценим

$$\arg_{t\in P_{n_k}} e^{-zt}\,ddA(t)=\operatorname{Im}(-zt)+\arg ddA(t).$$

Ввиду того, что $F(\alpha_{n_k})\to 0$ при $k\to\infty$ и $\alpha_{n_k}=o\left(\frac{1}{r_{n_k}}\right)$, диаметр области, в которой находятся точки $-zt$, когда $t\in P_{n_k}$ (z фиксировано), стремится к нулю при $k\to\infty$. Поэтому колебание $\operatorname{Im}(-zt)$ для $t\in P_{n_k}$ при $k\to\infty$ стремится к нулю, так что для произвольного положительного $\varepsilon<\gamma-\theta$, где γ — некоторое число, $\theta<\gamma<\frac{\pi}{2}$, начиная с достаточно большого номера k

$$c_{n_k}-\varepsilon\leqslant\operatorname{Im}(-zt)\leqslant c_{n_k}+\varepsilon,$$

где $\{c_{n_k}\}$ — некоторая последовательность действительных чисел. По условию 1)

$$d_{n_k}-\theta\leqslant\arg ddA(t)\leqslant d_{n_k}+\theta,$$

где $\{d_{n_k}\}$ — некоторая последовательность действительных чисел. Следовательно, при достаточно большом k

$$c_{n_k}+d_{n_k}-\gamma<\arg_{t\in P_{n_k}} e^{-zt}\,ddA(t)<c_{n_k}+d_{n_k}+\gamma. \tag{6}$$

По определению $K(\psi,\alpha)$ на некоторой последовательности $\{n_{k_p}\}$, для краткости записи будем считать, что на самой последовательности $\{n_k\}$,

$$\int\limits_{r_{n_k}-F(\alpha_{n_k})}^{r_{n_k}+F(\alpha_{n_k})}\ \int\limits_{\theta_{n_k}-\alpha_{n_k}}^{\theta_{n_k}+\alpha_{n_k}}|ddA(t)|>\exp\left\{r_{n_k}\left[K(\psi,\ \alpha)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\right\} \tag{7}$$

для произвольного $\varepsilon>0$ при достаточно большом k.

Из неравенств (5), (6) и (7) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ при достаточно большом k

$$|I_{n_k}^*|=\left|\int\limits_{r_{n_k}-F(\alpha_{n_k})}^{r_{n_k}+F(\alpha_{n_k})}\int\limits_{\Theta_{n_k}-\alpha_{n_k}}^{\Theta_{n_k}+\alpha_{n_k}} e^{-zt}\,ddA(t)\right|>$$

$$>\cos\gamma\cdot\exp\left\{-\left[r_{n_k}\pm F(\alpha_{n_k})\right]\left[K(\psi,\ \alpha)-\delta+\frac{\varepsilon}{2}\right]\right\}\int\limits_{r_{n_k}-F(\alpha_{n_k})}^{r_{n_k}+F(\alpha_{n_k})}\int\limits_{\Theta_{n_k}-\alpha_{n_k}}^{\Theta_{n_k}+\alpha_{n_k}}|ddA(t)|>$$

$$>\cos\gamma\cdot\exp\left\{r_{n_k}(\delta-\varepsilon)\pm F(\alpha_{n_k})\left[K(\psi,\ \alpha)-\delta+\frac{\varepsilon}{2}\right]\right\}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|I_{n_k}^*|}{\exp(\beta r_{n_k})}=\infty,\quad \text{если}\quad 0<\beta<\delta-\varepsilon.$$

Учитывая условие 2), получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{r_{n_k}-F(\alpha_{n_k})}^{r_{n_k}+F(\alpha_{n_k})}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-zt}\,ddA(t)=\lim_{k\to\infty}(I_{n_k}+I_{n_k}^*)=\infty,$$

что и означает расходимость интеграла (4) в точке z.

Очевидно, что условия теоремы могут быть несколько ослаблены. Так как диаметр области, в которой находятся точки $-zt$, когда $t\in P_n$, при достаточно большом n не превышает числа $2\alpha_n r_n+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — любое число, то вместо условия $\alpha_n=o\left(\frac{1}{|\lambda_n|}\right)$ достаточно потребовать, чтобы для некоторого $\gamma<\pi$ имело место неравенство $2\alpha_n r_n<\gamma$.

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z),\tag{8}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^{(j)}=\lambda_j$, $|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots<|\lambda_j|<\ldots$, $\lambda_j\to\infty$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) все $\lambda_n^{(j)}$ содержатся в областях P_j:

$$\left[r_j-F(\alpha_j),\quad r_j+F(\alpha_j);\quad \Theta_j-\alpha_j,\quad \Theta_j+\alpha_j\right],$$

где $\lambda_j=r_j e^{i\Theta_j}$, $\alpha_j=o\left(\frac{1}{|\lambda_j|}\right)$,

$$\lim_{j\to\infty}F(\alpha_j)=0,\quad |\lambda_j|+F(\alpha_j)<|\lambda_{j+1}|-F(\alpha_{j+1}),$$

2) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|$ сходятся при всех j,

3) существуют такие φ_j и такие $\theta_j \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, что

$$\varphi_j - \theta_j < \arg a_n^{(j)} < \varphi_j + \theta_j \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

при достаточно больших j.

Условие 2) обеспечивает сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \exp(-\lambda_n^{(j)} z) \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

во всей плоскости, и можно говорить о сходимости или расходимости ряда (8). Функция $A(t) = A(re^{i\varphi}) = \sum a_k^{(j)}$, где суммирование ведется по тем индексам k и j, для которых $|\lambda_k^{(j)}| < r$, $\arg \lambda_k^{(j)} < \varphi$, согласно условию 2) имеет ограниченную вариацию в любой конечной части плоскости. Поэтому существует интеграл

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-zt} ddA(t),$$

область сходимости интеграла (4) совпадает с областью сходимости ряда (8) и в этой области тождественно

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-zt} ddA(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \exp(-\lambda_n^{(j)} z).$$

Функции $H(\varphi, \alpha)$ и $K(\varphi, \alpha)$ принимают соответственно вид

$$H(\varphi, \alpha) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{|\lambda_{j_m}|} \ln \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_k)}|, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_k)}| = \infty,$$

$$H(\varphi, \alpha) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{|\lambda_{j_m}|} \ln \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_k)}|, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_k)}| < \infty,$$

$$K(\varphi, \alpha) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{|\lambda_{j_m}|} \ln \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j_m)}|,$$

где j_m — индексы тех λ_j, для которых P_j содержатся в угле $\varphi - \alpha \leqslant \arg z \leqslant \varphi + \alpha$.

Очевидно, что при предположениях 1—3, сделанных для ряда (8), условия теоремы 1 для интеграла (4) выполнены, и, если совпадают области G_1 и G_2*, определенные соответственно с помощью функций $h(\varphi)$ и $k(\varphi)$, то область сходимости ряда (8) совпадает с областью его абсолютной сходимости. В частности, совпадение областей G_1 и G_2 имеет место, если выполнено условие

$$\ln j = o(|\lambda_j|). \tag{9}$$

Действительно, для ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{-\lambda_j z}, \quad \text{где} \quad b_j = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(j)}|,$$

области G_1 и G_2 при этом условии, как известно, совпадают [1].

* Для ряда (8) область G_2 не зависит от выбора последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{F(\alpha_n)\}$.

Рассмотрим теперь вопрос о сверхсходимости ряда (8), когда выполнены условия 1—3 и (9), т. е. область сходимости ряда (8) есть область G, точки $z=x+iy$ которой при всех $0\leqslant\varphi<2\pi$ удовлетворяют неравенству

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)>0.$$

Теорема 2. *Если функция*

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z)$$

аналитична в точке z_0 на границе Γ области сходимости G ряда (8), *существует круг, лежащий в G и касающийся Γ в точке z_0, и имеется такая последовательность индексов $\{j_\nu\}$, что $|\lambda_{j_\nu+1}|>(1+\theta)|\lambda_{j_\nu}|$, где $\theta>0$ и не зависит* от ν, *то последовательность*

$$\sum_{k=1}^{j_\nu}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(k)}\exp(-\lambda_n^{(k)}z)$$

сходится в некоторой окрестности точки z_0.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z},$$

приведенному Г. Л. Лунцем в статье [2]. Поэтому ограничимся установлением двух неравенств, на которых доказательство основано.

Разобьем отрезок $[0,\ 2\pi]$ на q равных по длине отрезков M_i $(i=1,2,\dots,q)$, причем нумерацию установим следующую. Обозначим через M_j тот из отрезков M_i, в который попадает точка $\arg\lambda_j$; если точка $\arg\lambda_j$ принадлежит одновременно двум различным отрезкам M_i, то отнесем ее, например, к правому. При такой нумерации для бесконечного множества индексов $j\neq i$ может быть $M_j=M_i$. Разобьем отрезки M_j пополам точками φ_j, и пусть 2ε — длина M_j.

По определению величины $K(\varphi,\alpha)$ можно подобрать столь большое число N, что при $j>N$ для всех λ_j из отрезка M_i имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|<\exp\left\{[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\omega]\,|\lambda_j|\right\}, \tag{10}$$

как бы мало ни было $\omega>0$ ($K(\varphi_j,\ \varepsilon)=K(\varphi_i,\ \varepsilon)$ для всех этих индексов j). А так как различных отрезков M_i лишь конечное число, то существует такое число N_0, что неравенство (10) имеет место при всех $j>N_0$.

При любом $\varepsilon>0$ найдется такая точка φ_j^* на отрезке $[\varphi_j-\varepsilon,\ \varphi_j+\varepsilon]$, что $K(\varphi_j,\ \varepsilon)=k(\varphi_j^*)$ (см. [2]).

Рассмотрим какую-либо конечную область D, в которой при всех $0\leqslant\varphi<2\pi$ выполняется неравенство

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)-\beta>0\qquad(\beta>0).$$

Тогда для точек этой области это неравенство имеет место и при $\varphi=\varphi_j^*$:

$$x\cos\varphi_j^*-y\sin\varphi_j^*-k(\varphi_j^*)-\beta>0.$$

Взяв φ_j^*, соответствующее достаточно мелкому разбиению отрезка $[0, 2\pi]$, ввиду ограниченности области D и непрерывности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, имеем

$$|\exp(-\lambda_j z)|=\exp\Big[-|\lambda_j|(x\cos\Theta_j-y\sin\Theta_j)\Big]<$$

$$<\exp\Big[-|\lambda_j|(x\cos\varphi_j^*-y\sin\varphi_j^*-\delta)\Big]<\exp\Big\{-|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\beta-\delta\Big]\Big\}$$

для всех j, как бы мало ни было $\delta>0$. Таким образом, в области D при достаточно малом δ_1

$$|\exp(-\lambda_j z)|\exp\Big\{|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big\}<\exp\Big[-|\lambda_j|(\beta-\delta_2)\Big],$$

как бы мало ни было $\delta_2>0$, и тем более

$$|\exp(-\lambda_j z)|\exp\Big\{|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big\}<\exp\Big[-|\lambda_{k+1}|(\beta-\delta_2)\Big], \qquad (11)$$

если $j\geqslant k+1$. С другой стороны, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|\right)\exp\Big\{-|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big\}$$

сходится при любом δ_1 (и при любом разбиении отрезка $[0, 2\pi]$), так как $\ln j=o(|\lambda_j|)$, а в силу (10) при достаточно большом j

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|\right)\exp\Big\{-|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big\}<\exp(-\delta|\lambda_j|),$$

где $\delta>0$. Поэтому

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|\right)\exp\Big\{-|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big\}<C,$$

где C – постоянная. Учитывая (11) и ограниченность величины

$$\exp\Big[-|\lambda_n^{(j)}-\lambda_j|(x\cos\varphi_n^{(j)}-y\sin\varphi_n^{(j)})\Big],$$

где $\varphi_n^{(j)}=\arg(\lambda_n^{(j)}-\lambda_j)$, при всех n и j, получаем

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=k+1}^{\infty}\left\{|\exp(-\lambda_j z)|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|\exp\Big[-|\lambda_n^{(j)}-\lambda_j|(x\cos\varphi_n^{(j)}-y\sin\varphi_n^{(j)})\Big]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=k+1}^{\infty}\left\{\exp(-\lambda_j z)\exp\Big(|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}|\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\Big(-|\lambda_j|\Big[K(\varphi_j,\ \varepsilon)+\delta_1\Big]\Big)\right\}<C_1C\exp\Big[-|\lambda_{k+1}|(\beta-\delta_2)\Big],$$

где C_1 — постоянная, для сколь угодно малого δ_2 при $k>N(\delta_2)$, т. е. в области D для произвольного $\varepsilon>0$ при $k>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z)\right|<\exp\left[-|\lambda_{k+1}|(\beta-\varepsilon)\right]. \tag{12}$$

Совершенно аналогично доказывается, что в любой конечной области D_1, точки $z=x+iy$ которой при всех $0\leqslant\varphi<2\pi$ удовлетворяют неравенству

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)+\beta>0 \qquad (\beta>0),$$

справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{k}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z)\right|<\exp\left[|\lambda_k|(\beta+\varepsilon)\right] \tag{13}$$

для произвольного $\varepsilon>0$ при $k>N(\varepsilon)$.

При доказательстве теоремы используются оценки (12), (13) и теорема Адамара о трех кругах.

Верна и следующая теорема, в доказательстве которой используются те же оценки и теорема Адамара в общей формулировке (см. [2]).

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и* $|\lambda_{j_\nu+1}|>(1+\theta_\nu)|\lambda_{j_\nu}|$, *где* $\lim\limits_{\nu\to\infty}\theta_\nu=\infty$, *то последовательность*

$$\left\{\sum_{k=1}^{j_\nu}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}\exp(-\lambda_n^{(k)}z)\right\}$$

сходится в любой конечной части области голоморфности функции

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z).$$

Из теоремы 2 следует, что если для ряда (8) $|\lambda_{j+1}|>(1+\theta)|\lambda_j|$ $(j=1, 2, \ldots)$, где $\theta>0$ и не зависит от j, то все точки границы области сходимости — особые для функции

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)}\exp(-\lambda_n^{(j)}z).$$

Москва

Поступило в редакцию
8.V.1968

Литература

1. Г. Л. Лунц, О некоторых обобщениях рядов Дирихле, Мат. сб., т. 10(52) № 1–2, 1942.
2. Г. Л. Лунц, О сверхсходимости некоторых рядов, Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, XV, № 5, 1962.

DVILYPIO LAPLASO—STILTIESO INTEGRALO IR DVILYPIŲ DIRICHLE EILUČIŲ VIRŠKONVERGAVIMO KLAUSIMU

V. ABDRACHMANOVAS

(*R e z i u m ė*)

Nusakoma pakankama sąlyga, kad integralo

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-zt}\, d d A(t)$$

konvergavimo ir virškonvergavimo sritys sutaptų. Be to, nagrinėjamas dvilypių Dirichle eilučių

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \exp(-\lambda_n^{(j)} z)$$

su kompleksiniais rodikliais konvergavimas ir virškonvergavimas.

SUR LA CONVERGENCE DE L'INTÉGRALE DOUBLE DE LAPLACE—STIELTJES ET DES SÉRIES DOUBLES DE DIRICHLET

V. ABDRAKMANOV

(*R é s u m é*)

On établie une condition suffisante pour que le domaine de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-zt}\, d d A(t)$$

coïncide avec son domaine de la convergence absolue. Quelques théorèmes sur la convergence et l'ultraconvergence des séries

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \exp(-\lambda_n^{(j)} z)$$

avec des exposants complexes sont aussi établies.