1968

УДК — 519.21

ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА — МАКЛОРЕНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. БИКЯЛИС

Хорошо известна формула суммирования Эйлера—Маклорена

$$\sum_{a<m<b} g(m)=\int_a^b d(Q)(x)+\sum_{\nu=1}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\int_a^b dQ^{(\nu)}(x)\,B_\nu(x)+\frac{(-1)^p}{p!}\int_a^b B_p(x)\,dQ^{(p)}(x), \quad (1)$$

где m — целое число, функция $g(x)=\frac{dQ(x)}{dx}$ имеет непрерывные производные до p —того порядка включительно и

$$B_\nu(x)=-\nu!\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^\nu}, \quad (2)$$

имеет широкое применение в теории вероятностей, например, с ее помощью из локальных предельных теорем для сумм независимых решетчатых случайных величин можно получить интегральные предельные теоремы (см. [1], стр 129 и [2]).

В работах [3—5] даны аналоги формулы (1) для сумм значений функции $g(m)=g(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ по целыми точками $m=(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ области A (ограниченной гладкой поверхностью S, не содержащей целых точек) k-мерного эвклидового пространства. Следует отметить (см. [4]), что существует много многомерных сумматорных формул типа Эйлера—Маклорена.

Здесь мы получим формулу для вычисления суммы значений функции $g(m)$ по целым точкам борелевского множества A, которую можно удачно использовать для изучения асимптотического разложения вероятностной функции нормированной суммы независимых решетчатых k-мерных случайных векторов.

Теорема. *Пусть функция $Q(x)$ задана на k-мерном эвклидовом пространстве R_k и имеет непрерывные производные до $k(p+1)$-го порядка включительно, кроме того, они абсолютно интегрируемые в R_k и обращаются к нулю при $x_i\to-\infty$, $i=1, 2, \ldots, k$.*

Тогда для всех борелевских множеств A имеет место равенство

$$\sum_{m\in A} g(m)=\int_A dU[Q(y)]+\int_A dR(y).$$

Здесь m — вектор с целочисленными координатами; $g(x)=\frac{\partial^k Q(x)}{\partial x_1\cdots\partial x_k}$; *оператор*

$$U[\ldots]=\prod_{l=1}^{k}\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_l)\frac{\partial^\nu}{\partial x_l^\nu}\right\}[\ldots];$$

$B_0(x)\equiv 1$, а $B_i(x)$, $i=1, 2, \ldots$ *определены равенством* (2);

$$R(y)=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{(-1)^{p-1}}{p!}\right)^i\frac{1}{i!\,(k-i)!}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=\overline{1k}\\ n_1\neq\ldots\neq n_k}}\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_k}B_p(x_{n_1})\ldots B_p(x_{n_i})\times$$

$$\times d\prod_{l=i+1}^{k}\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_{n_l})\frac{\partial^\nu}{\partial x_{n_l}^\nu}\right\}\frac{\partial^{ip}Q(x)}{\partial x_{n_1}^p\ldots\partial x_{n_i}^p}+$$

$$+\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\right)^k\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_k}B_p(x_1)\ldots B_p(x_p)\,d\,\frac{\partial^{kp}Q(x)}{\partial x_1^p\ldots\partial x_k^p}\,.$$

Доказательство. Сперва покажем, что

$$\sum_{\substack{z_1<m_1>y_1\\ \cdots\cdots\\ z_k<m_k<y_k}}g(m)=\int_{z_1}^{y_1}\cdots\int_{z_k}^{y_k}dU[Q(x)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\right)^i\frac{1}{i!\,(k-i)!}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=\overline{1k}\\ n_1\neq\ldots\neq n_k}}\int_{z_1}^{y_1}\cdots\int_{z_k}^{y_k}B_p(x_{n_1})\ldots B_p(x_{n_i})\times$$

$$\times d\prod_{l=i+1}^{k}\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_{n_l})\frac{\partial^\nu}{\partial x_{n_l}^\nu}\right\}\frac{\partial^{ip}Q(x)}{\partial x_{n_1}^p\ldots\partial x_{n_i}^p}+$$

$$+\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\right)^k\int_{z_1}^{y_1}\cdots\int_{z_k}^{y_k}B_p(x_1)\ldots B_p(x_k)\,d\,\frac{\partial^{kp}Q(x)\,Q(x)}{\partial x_1^p\ldots\partial x_k^p}\,. \tag{3}$$

Полагаем, что m_2, m_3 $\ldots$, m_k фиксированные; с помощью формулы (1) просуммируем значения функции $g(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k)$ по всем целым m_1 из интервала (z_1, y_1):

$$\sum_{z_1<m_1<y_1}g(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k)=\int_{z_1}^{y_1}d\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_1)\left.\frac{\partial^{k+\nu-1}}{\partial x_1^\nu\,\partial x_2\ldots\partial x_k}\right|_{\substack{x_2=m_2\\ \cdots\cdots\\ x_k=m_k}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\int_{z_1}^{y_1}B_p(x_1)\,d\left.\frac{\partial^{k+p-1}Q(x)}{\partial x_1^p\,\partial x_2\ldots\partial x_k}\right|_{\substack{x_2=m_2\\ \cdots\cdots\\ x_k=m_k}}\,.$$

Далее, обе стороны этого равенства суммируем по всем целым m_2 из интервала (z_2, y_2). Получаем

$$\sum_{\substack{z_1<m_1<y_1\\ z_2<m_2<y_2}} g(m_1, m_2, \dots, m_k)=\int_{z_1}^{y_1} d\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_1)\sum_{z_2<m_2<y_2}\frac{\partial^{k+\nu-1}Q(x)}{\partial x_1^\nu\,\partial x_2\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_2=m_2\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\int_{z_1}^{y_1} B_p(x_1)\, d\left\{\sum_{z_2<m_2<y_2}\frac{\partial^{k+p-1}Q(x)}{\partial x_1^p\,\partial x_2\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_2=m_2\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}-$$

$$=\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} d\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_2)\sum_{\alpha=0}^{p}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}B_\alpha(x_1)\frac{\partial^{k+\alpha+\nu-2}Q(x)}{\partial x_1^\alpha\,\partial x_2^\nu\,\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} B_p(x_2)\, d\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_1)\frac{\partial^{k+\nu+p-2}Q(x)}{\partial x_1^\nu\,\partial x_2^p\,\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} B_p(x_1)\, d\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_2)\frac{\partial^{k+\nu+p-2}Q(x)}{\partial x_1^p\,\partial x_2^\nu\,\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}+$$

$$+\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\right)^2\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} B_p(x_1)\,B_p(x_2)\, d\left.\frac{\partial^{k+2p-2}Q(x)}{\partial x_1^p\,\partial x_2^p\,\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}=$$

$$=\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} d\prod_{l=1}^{2}\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_l)\frac{\partial^\nu}{\partial x_l^\nu}\right\}\frac{\partial^{k-2}Q(x)}{\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2=1,\,2\\ \alpha_1\neq\alpha_2}}\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\,\frac{1}{1!\,1!}\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} B_p(x_{\alpha_1})\, d\left\{\sum_{\nu=0}^{p}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}B_\nu(x_{\alpha_2})\frac{\partial^{k+\nu+p-2}Q(x)}{\partial x_{\alpha_1}^p\,\partial x_{\alpha_2}^\nu\,\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}\right\}+$$

$$+\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\right)^2\int_{z_1}^{y_1}\int_{z_2}^{y_2} B_p(x_1)\,B_p(x_2)\, d\,\frac{\partial^{k+2p-2}Q(x)}{\partial x_1^p\,\partial x_2^p\,\partial x_3\dots\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_3=m_3\\ \dots\dots\\ x_k=m_k}}.$$

Легко угадываемый общий закон (3) доказывается методом математической индукции.

Пусть в формуле (3) $z_1, z_2, \dots, z_k$ бесконечно убывают, тогда

$$\sum_{\substack{m_1<y_1\\ \dots\dots\\ m_k<y_k}} g(m)=u\,[Q(y)]+R(y).$$

Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы.

Вильнюский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
12.IV.1968.

Литература

1. A. Rènyi, Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie, Berlin, 1962.
2 A. А. Миталаускас, В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит. мат. сб., VI, № 4, (1966), 569–584.
3. C. Müller, Eine Veralgemeinerung der Eulerschen Summenformel und ihre Anwendung auf Frage der Analytische Zahlentheorie, Abhand. Math. Semin. Univ. Hamburg, B. 19, H. 1/2 (1954), 41—62.
64. В. К. Иванов, Многомерные обобщения сумматорной формулы Эйлера, Изв. высш. учеб. завед., матем., 6(37), (1963), 72–60.
5. Х. Мансуров, Аналог формулы Эйлера–Маклорена для функции двух переменных, Изв, АН УзССР, сер. физ.-мат. н., 6 (1961), 15–22.

EULERIO—MAKLORENO SUMAVIMO FORMULĖ DAUGELIO KINTAMŲJŲ FUNKCIJOMS

A. BIKELIS

(Reziumė)

Darbe yra gauta žinomos Eulerio—Makloreno sumavimo formulės daugiamatis analogas.

THE MULTIDIMENSIONAL SUMMATION FORMULA OF EULER—MACLAURIN

A. BIKELIS

(Summary)

In this paper the multidimensional analogue of well-known summation formula of Euler—Maclaurin is obtained.