VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1968

УДК — 513

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНВАРИАНТНЫХ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ГРУППАХ ЛИ

Р. В. ВОСИЛЮС

В пространстве связной группы Ли $\mathfrak{G}$ будем рассматривать класс право-инвариантных аффинных связностей без кручения, обладающих определенным свойством геодезических линий, а именно – класс связностей, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп полупрямого произведения Г (называемого также нормальным произведением или нормальным расширением) группы Ли $\mathfrak{G}$ и некоторой группы Ли G ее автоморфизмов.

Любая группа Ли $\mathfrak{G}$ относительно любого ее нормального расширения Г обладает такой связностью. Это связность Картана группы Ли $\mathfrak{G}$. Ее геодезические линии совпадают с траекториями однопараметрических под групп самой группы Ли $\mathfrak{G}$. Этот случай является тривиальным для полупрямых произведений, поэтому мы исключим его из рассмотрений, т. е. под связностями, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Г, будем подразумевать связности, не совпадающие со связностью Картана группы Ли $\mathfrak{G}$.

В [3] отмечалось, что А.М. Васильевым [2] в пространстве группы Ли $\mathfrak{G}$, с заданной оснащенной подгруппой g, построено однопараметрическое семейство связностей (С-связности), инвариантных относительно всех правых сдвигов и левых сдвигов, определяемых подгруппой g, геодезические линии которых совпадают с траекториями однопараметрических подгрупп прямого произведения групп этих сдвигов. Тем самым мы получаем пример право-инвариантных аффинных связностей, определенных в пространстве группы $\mathfrak{G}$, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп некоторого полупрямого произведения Г группы Ли $\mathfrak{G}$ и группы Ли G ее внутренних автоморфизмов, соответствующих подгруппе g.

Тот факт, что С-связности не только право-инвариантны, но и лево-инвариантны относительно сдвигов подгруппы g позволяют легко установить совпадение геодезических линий с траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Г. В случае, когда связность только право – инвариантна, в [3] относительно некоторых классов связностей были указаны достаточные условия для такого совпадения.

В этой статье рассматривается общий случай группы Ли $\mathfrak{G}$ без какой-либо дополнительной структуры, поэтому изложение начинается теоремой, позволяющей определить, является ли заданная геодезическая линия некоторой инвариантной аффинной связности траекторией однопараметрической подгруппы нормального расширения Г. Эта теорема позволяет получить необходимые и достаточные условия для того, чтобы на группе Ли $\mathfrak{G}$ существовала право-инвариантная связность, геодезические линии которой являются траекториями однопараметрических подгрупп полупрямого произведения Г. Дальнейшее изложение посвящено изучению структуры групп допускающих такие связности.

1. Аппарат исследования

Мы будем рассматривать связную группу Ли $\mathfrak{G}$.

1) Если задана группа Ли G автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$, то, как это известно из общей теории групп [6], такая пара порождает некоторую новую группу Г, называемую нормальным или полупрямым произведением этих групп. По определению, пространство новой группы Г является прямым произведением пространств сомножителей, обладающим следующим образом заданной операцией умножения:

$$(\gamma_1, g_1)\cdot(\gamma_2, g_2)=\left(\gamma_1\cdot\gamma_2, \gamma_2(g_1)\cdot g_2\right).$$

Здесь

$$\gamma_l\in G, \; g_l\in\mathfrak{G}, \; l=1, 2,$$

а через $\gamma_2(g_1)$ обозначен элемент группы Ли $\mathfrak{G}$, полученный из элемента g_1 при помощи автоморфизма, соответствующего элементу γ_2 группы Ли G. Умножение, обозначенное точками, происходит соответственно в группах Г, G и $\mathfrak{G}$.

Очевидно, что это умножение аналитично в дифференцируемой структуре пространства Г, индуцируемой разложением

$$\Gamma=G\times\mathfrak{G}.$$

Следовательно, Г тоже группа Ли (в общем случае не связная). Существуют естественные отображения

$$i: \mathfrak{G}\to\Gamma, j: G\to\Gamma,$$

определяемые соотношениями:

$$i(g)=(E, g); \; j(\gamma)=(\gamma, e),$$

где через E и e обозначены единицы групп G и $\mathfrak{G}$ соответственно.

Легко проверяется, что отображения i и j являются изоморфизмами групп $\mathfrak{G}$ и G на соответствующие подгруппы группы Ли Г. Эти подгруппы мы тоже будем обозначать через $\mathfrak{G}$ и G, т. е. группы Ли $\mathfrak{G}$ и G мы будем считать при помощи отображения i и отображения j реализованными в качестве подгрупп группы Ли Г. В таком случае $\mathfrak{G}$ становится нормальным делителем группы Г, фактор группа которого локально изоморфна группе Ли G.

Алгебры Ли групп $\mathfrak{G}$, G и Г будем обозначать соответственно через $\bar{\mathfrak{G}}$, D и $\bar{\Gamma}$.

При помощи дифференциалов отображений i и j можно алгебры $\bar{\mathfrak{G}}$ и D изоморфно вложить в алгебру $\bar{\Gamma}$. В таком случае

$$\bar{\Gamma}=\bar{\mathfrak{G}}+D \tag{1}$$

как векторное пространство.

Для того, чтобы полностью восстановить в пространстве $\bar{\Gamma}$ структуру алгебры Ли, надо научиться находить коммутаторы векторов x и y в том случае, когда первый принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{G}$, а второй алгебре Ли D.

Определим некоторое правостороннее действие группы Ли Γ в пространстве группы $\mathfrak{G}$. С этой целью, каждому элементу (γ, g) группы Ли Γ поставим в соответствие диффеоморфизм пространства $\mathfrak{G}$, определенный по следующей формуле:

$$(g_0)(\gamma, g)=\gamma(g_0)\cdot g.$$

В таком случае

$$\Big((g_0)(\gamma_1, g_1)\Big)(\gamma_2, g_2)=\gamma_2\Big(\gamma_1(g_0)\cdot g_1\Big)\cdot g_2=(\gamma_2\cdot\gamma_1)(g_0)\cdot\gamma_2(g_1)\cdot g_2=$$

$$=(g_0)\Big(\gamma_1\cdot\gamma_2,\ \gamma_2(g_1)\cdot g_2\Big),$$

т. е. группа Ли Γ действительно становится группой Ли преобразований пространства $\mathfrak{G}$. Очевидна транзитивность действия группы Γ.

Рассмотрим однопараметрическую подгруппу группы Ли Γ, проходящую через единицу группы по направлению вектора $z\in\bar{\Gamma}$. Пусть

$$z=x+y$$

является разложением (1) для этого вектора. Обозначим через X, I и Z право — инвариантные векторные поля на группах Ли $\mathfrak{G}$, G и Γ, порожденные соответственно векторами x, y и z.

Группа автоморфизмов G обладает точным линейным представлением A в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ группы Ли $\mathfrak{G}$. Каждому элементу $\gamma\in G$ в этом представлении соответствует линейное преобразование пространства $\bar{\mathfrak{G}}$, определяемое матрицей $A(\gamma)$.

Пусть

$$(\gamma, g)(t)=\Big(\gamma(t),\ g(t)\Big)$$

является уравнением вышеуказанной однопараметрической подгруппы. Рассмотрим действие этой подгруппы на векторное поле X. В виду того, что поле право — инвариантно указанное действие сводится к однопараметрической подгруппе преобразований вида $A(\gamma(t))$. В алгебре Ли мы получаем кривую

$$x(t)=A\Big(\gamma(t)\Big)(x).$$

По определению коммутатора

$$\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}=[zx]=[yx].$$

Тоже самое можно написать и так:

$$\frac{dX(t)}{dt}\Big|_{t=0}=[IX].$$

При помощи формулы

$$a_y=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}A\left(\gamma(t)\right)$$

для каждого вектора $y\in D$ можно определить матрицу a_y, если под $\gamma(t)$ подразумевать однопараметрическую подгруппу группы Ли G, проходящую через единицу этой группы по направлению вектора y.

Тогда

$$[yx]=a_y(x). \tag{2}$$

По свойствам коммутирования легко установить, что a_y является дифференцированием алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$, линейно зависящим от y. Алгебра Ли D является алгеброй дифференцирований алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.

Пусть

$$z_1=x_1+y_1,$$

$$z_2=x_2+y_2$$

два вектора алгебры Ли $\overline{\Gamma}$. Используя линейность операции коммутирования, то, что $\overline{\mathfrak{G}}$ и D являются подалгебрами Ли и соотношение (2), получаем:

$$[z_1,\ z_2]=[y_1,y_2]+a_{y_1}(x_2)-a_{y_2}(x_1)+[x_1,\ x_2].$$

Дадим формальное определение.

Пусть заданы алгебра Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ и алгебра Ли D ее дифференцирований. Пространство

$$\overline{\Gamma}=\overline{\mathfrak{G}}+D$$

с умножением

$$\left[(x_1,\ y_1)\ (x_2,\ y_2)\right]=\left(a_{y_1}(x_2)-a_{y_2}(x_1)+[x_1,\ x_2],\ \ [y_1,\ y_2]\right),$$

где $a_y(x)$ означает дифференцирование элемента x алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ при помощи элемента y алгебры Ли D является алгеброй Ли, называемой голоморфом алгебр Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ и D.

Тем самым мы установили, что алгебра Ли полупрямого произведения является голоморфом алгебр Ли перемножаемых групп.

Пусть $\gamma:\overline{\mathfrak{G}}\times\overline{\mathfrak{G}}\to\overline{\mathfrak{G}}$ некоторое билинейное отображение, каноническим образом порождающее тензор типа $\gamma^I_{K\ L}$. Этому тензору на группе Ли $\mathfrak{G}$ соответствует право-инвариантное тензорное поле (которое тоже будем обозначать через $\gamma^I_{K\ L}$), определяемое условием $\gamma^I_{KL}=\text{const}$ в соответствующем право—инвариантном базисе.

Представление A группы Ли G индуцирует представление алгебры Ли D в линейном пространстве тензоров (или, что тоже самое, в пространстве право—инвариантных тензорных полей). Рассмотрим подробнее это представление для указанного типа тензоров.

Пусть $\alpha=\alpha(t)$ является однопараметрической подгруппой группы Ли G, проходящей по направлению вектора y через единицу этой группы. Под действием этой однопараметрической подгруппы, тензор γ^I_{KL} порождает некоторую „тензорную кривую"

$$\gamma^I_{KL}(t)=A^P_K(t)\,A^S_L(t)\,\tilde{A}^I_Y(t)\,\gamma^Y_{PS}\,.$$

Дифференцируя эту кривую и учитывая то, что

$$A^I_K(t)\,\tilde{A}^K_L(t)=\delta^I_L,\quad A^I_K(0)=\delta^I_K,$$

получаем:

$$\left.\frac{d\gamma^I_{KL}(t)}{dt}\right|_{t=0}=(a_y)^P_K\,\gamma^I_{PL}+(a_y)^P_L\,\gamma^I_{KP}-(a_y)^I_P\,\gamma^P_{KL}\,.$$

Введем следующее обозначение:

$$D_y(\gamma^I_{KL})=\left.\frac{d\gamma^I_{KL}}{dt}\right|_{t=0},$$

где дифференцирование происходит вдоль однопараметрической подгруппы с касательным вектором y. Мы получили такую формулу:

$$(D_y\gamma)(x_1,\,x_2)=\gamma\Big([y,\,x_1],\,x_2\Big)+\gamma\Big(x_1,\,[y,\,x_2]\Big)-\Big[y,\,\gamma(x_1,\,x_2)\Big]\,,\qquad(3)$$

где x_1 и x_2 произвольные векторы алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.

Аналогичные формулы могут быть получены для тензоров других типов.

2) Пусть M некоторое параллелизуемое многообразие с параллелизацией $\tilde{\omega}$. Через R^n будем обозначать n-мерное евклидово пространство, а через ω — R^n-значную 1-форму, определяющую на многообразии M параллелизацию $\tilde{\omega}$.

Параллелизация $\tilde{\omega}$ позволяет на многообразии M определить аффинную связность без кручения. Для этого сперва определяется некоторая аффинная связность требованием, чтобы векторные поля $\omega^{-1}(x)$ для каждого фиксированного $x\in R^n$ были параллельными вдоль каждой кривой. Потом можно построить связность с теми же геодезическими линиями и нулевым кручением.

Это построение, примененное к право—инвариантным или лево—инвариантным параллелизациям группы Ли приводит к одной и той же аффинной связности без кручения. Такая связаность называется связностью Картана данной группы Ли.

Расслоенное пространство реперов связной группы Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ обладает сечениями инвариантных базисов. Более точно, если $B(\mathfrak{G})$ означает расслоение реперов группы Ли $\mathfrak{G}$, то каждый базис $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ алгебры $\overline{\mathfrak{G}}$ этой группы при помощи соотношения

$$\chi(g)=\Big(g,\;X_1(g),\;\;X_2(g),\;\ldots,\;X_n(g)\Big)$$

определяет сечение $\chi:\mathfrak{G}\to B(\mathfrak{G})$. Здесь, как всегда, $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ означает право — инвариантные векторные поля со значениями $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ в единице группы.

При помощи таких сечений мы можем „снести“ все формы пространства $B(\mathfrak{G})$ на базу $\mathfrak{G}$. При этом будут сохраняться все соотношения между формами включая и структурные уравнения. Пользоваться такими „снесенными“ формами в этом случае удобнее, чем пользоваться построениями в пространстве $B(\mathfrak{G})$. В дальнейшем все формы будут подразумеваться как снесенные вышеуказанным образом.

В пространстве группы Γ определим линейные формы Ω и Θ. Для этого используем разложение в прямую сумму касательных пространств группы Γ. Пусть (γ, g) – точка пространства Γ и

$$Z_{(\gamma, g)} = Y_{(\gamma)} + X_{(g)}$$

соответствующее разложение. По определению

$$\Omega(Z_{(\gamma, g)}) = x_{(g)},$$
$$\Theta(Z_{(\gamma, g)}) = y_{(\gamma)}.$$

Здесь $x_{(g)}$ и $y_{(\gamma)}$ означает такие векторы алгебр $\overline{\mathfrak{G}}$ и D, для которых соответствующие право–инвариантные поля на группах $\mathfrak{G}$ и G в точках g и γ принимают значения векторов $X_{(g)}$ и $I_{(\gamma)}$ соответственно.

Ограничение формы Ω на группу Ли $\mathfrak{G}$ удовлетворяет структурному уравнению Картана:

$$d\Omega(X_1, X_2) = -\Omega\left([X_1, X_2]\right).$$

Аффинная связность без кручения на группе Ли $\mathfrak{G}$ задается снесенной при отображении χ формой связности φ, удовлетворяющей структурным уравнениям такого вида [1]:

$$d\Omega = -\varphi\Omega,$$
$$d\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + \Phi.$$

Первое структурное уравнение можно переписать так:

$$-\Omega\left([XY]\right) = -\varphi(X)\Omega(Y) + \varphi(Y)\Omega(X).$$

Здесь X и Y – поля на группе Γ. Далее это уравнение представим в таком виде:

$$-\Omega\left(\left[\frac{1}{2}\Omega(X) + \Theta(X), \Omega(Y)\right]\right) + \Omega\left(\left[\frac{1}{2}\Omega(Y) + \Theta(Y), \Omega(X)\right]\right) =$$
$$= -\left(\varphi\left(\Omega(X)\right) + \varphi\left(\Theta(X)\right)\right)\Omega(Y) + \left(\varphi\left(\Omega(Y)\right) + \varphi\left(\Theta(Y)\right)\right)\Omega(X).$$

Это делает очевидным такое решение первого структурного уравнения:

$$\varphi(X) = \frac{1}{2}\, ad\,\Omega(X) + ad\,\Theta(X). \tag{5}$$

Если X – право – инвариантное поле на группе Ли $\mathfrak{G}$, то

$$\varphi(X) = \frac{1}{2}\, ad\,\Omega(X) = \text{const}.$$

Следовательно форма φ право — инвариантна на группе $\mathfrak{G}$. Вычисляя $d\varphi$ для право — инвариантных полей, получаем:

$$d\varphi(X_1, X_2) = X_1\varphi(X_2) - X_2\varphi(X_1) - \varphi\left([X_1, X_2]\right) = -\varphi\left([X_1, X_2]\right).$$

Аналогичный результат можно получить и для инвариантных полей группы G. Так как из таких полей можно построить базис группы Γ, то

$$d\varphi(X_1, X_2) = -\varphi\left([X_1, X_2]\right)$$

для произвольных полей этой группы, разлагающихся с постоянными коэффициентами через этот базис. Для этих полей

$$d\varphi(X_1, X_2) = -\frac{1}{2}\, ad\,\Omega\left([X_1, X_2]\right) - ad\left[\Theta(X_1), \Theta(X_2)\right].$$

С другой стороны

$$\frac{1}{2}[\varphi, \varphi](X_1, X_2) = \left[\varphi(X_1), \varphi(X_2)\right] =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\, ad\Omega(X_1) + ad\Theta(X_1), \ \frac{1}{2}\, ad\Omega(X_2) + ad\Theta(X_2)\right].$$

Из тождества Якоби следует, что

$$ad[xy] = adx\ ady - ady\ adx$$

для произвольных векторов алгебры Ли $\overline{\Gamma}$. Используя это соотношение находим

$$\frac{1}{2}[\varphi, \varphi](X_1, X_2) = \frac{1}{4}\, ad\left[\Omega(X_1), \Omega(X_2)\right] + \frac{1}{2}\, ad\left[\Theta(X_1), \Omega(X_2)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\, ad\left[\Omega(X_1), \Theta(X_2)\right] + ad\left[\Theta(X_1), \Theta(X_2)\right].$$

Из второго уравнения системы (4) следует, что

$$\Phi(X_1, X_2) = -\frac{1}{4}\, ad\left[\Omega(X_1), \Omega(X_2)\right] \tag{7}$$

для произвольных полей группы Ли $\mathfrak{G}$.

Следовательно, форма (5) на группе Ли $\mathfrak{G}$ определяет инвариантную аффинную связность без кручения с формой кривизны Φ, определенной формулой (7). Это и есть связность Картана группы Ли $\mathfrak{G}$.

Для того, чтобы получить любую другую инвариантную аффинную связность на группе Ли $\mathfrak{G}$, достаточно к форме φ прибавить некоторое инвариантное поле „линейных преобразований". Более точно — каждому вектору x алгебры $\overline{\mathfrak{G}}$ поставим в соответствие линейное преобразование γ_x этого пространства. Если X, Y и Z поля на группе $\mathfrak{G}$, которым в единице группы соответствуют векторы x, y и z алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$, причем

$$z = \gamma_x(y),$$

то инвариантное поле линейных преобразований определим соотношением

$$Z = \gamma_X(Y).$$

Благодаря линейной зависимости γ_x от вектора x, существует взаимно-однозначное соответствие между инвариантными полями линейных преобразований и соответствующего типа тензорами в алгебре Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.

Инвариантная аффинная связность определяется формой

$$\tau=\varphi+\gamma.$$

Так как $\gamma_x(y)$ билинейно, то

$$\big(\tau(X)\big)(Y)=\frac{1}{2}\big[\Omega(X),\ Y\big]+\big[\Theta(X),\ Y\big]+\gamma\big(Y,\ \Omega(X)\big),$$

где через $\gamma(Y, \Omega(X))$ обозначено соответствующее билинейное преобразование:

$$\gamma\big(Y,\ \Omega(X)\big)=\gamma_x(y)$$

в применении к инвариантным полям X и Y, порожденным векторами x и y. Легко устанавливается, что связность, определенная формой τ имеет нулевое кручение в том и только в том случае, если

$$\gamma\big(Y,\ \Omega(X)\big)=\gamma\big(X,\ \Omega(Y)\big).$$

Кривая $g=g(t)$ в пространстве группы Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда является геодезической линией связности, определенной на группе Ли $\mathfrak{G}$ при помощи формы τ, если

$$\big(g_*+\tau(g_*)\big)\big(\Omega(g_*)\big)=0, \tag{8}$$

где g_* означает касательный вектор к кривой ([1] стр. 133 лемма 9. Указанные там уравнения мы написали для снесенных форм.)

2. Условия для совпадения геодезической линии инвариантной аффиноий связности группы Ли $\mathfrak{G}$ с траекторией однопараметрической подгруппы полупрямого произведения Г

Выше мы определили правостороннее действие группы Ли Г в пространстве группы Ли $\mathfrak{G}$. Сейчас мы выясним, в каком случае геодезическая линия инвариантной аффинной связности, заданной в пространстве этой группы, может совпасть с траекторией однопараметрической подгруппы группы Ли Г относительно этого действия.

Пусть канонически параметризованная геодезическая линия в точке $t=0$ проходит по направлению вектора $a\in\overline{\mathfrak{G}}$, т. е. имеет направление вектора, соответствующего в этой точке вектору право – инвариантного векторного поля на группе Ли $\mathfrak{G}$, со значениями a в единице группы.

Из соотношения (8) вдоль геодезической линии получаем:

$$-g_*\big(\Omega(g_*)\big)=\big[\Theta(g_*),\ \Omega(g_*)\big]+\frac{1}{2}\gamma\big(\Omega(g_*),\ \Omega(g_*)\big).$$

Или, так как $\Theta(g_*)=0$:

$$-g_*\big(\Omega(g_*)\big)=\frac{1}{2}\gamma\big(\Omega(g_*);\ \Omega(g_*)\big).$$

Это означает, что

$$-\frac{d}{dt}\Omega(g_*)=\frac{1}{2}\gamma\big(\Omega(g_*),\ \Omega(g_*)\big) \tag{9}$$

вдоль геодезической линии.

Пусть $(\alpha(t), g(t))$ является однопараметрической подгруппой с касательным вектором $(\mathfrak{b}, \Omega(g_*))$. Так как при правых сдвигах, соответствующих этой подгруппе, геодезическая линия скользит вдоль себя, то вдоль траектории этой подгруппы

$$\frac{d}{dt}\,\Omega(g_*) = \left[b,\ \Omega(g_*)\right]. \tag{10}$$

Геодезическая линия совпадает с траекторией однопараметрической подгруппы в том и только в том случае, если вдоль этих кривых производные их касательных векторов совпадают, т. е. когда совпадают правые части формул (9) и (10). Это приводит к тому, что вектор

$$S_0 = \left[\Omega(g_*),\ b\right] - \frac{1}{2}\,\gamma\left(\Omega(g_*),\ \Omega(g_*)\right)$$

должен тождественно обращаться в нуль вдоль траектории однопараметрической подгруппы.

Мы можем саказать, что геодезическая линия, в начальной точке $t=0$ проходящая по направлению вектора a тогда и только тогда является траекторией однопараметрической подгруппы группы Ли Г, когда можно подобрать такой вектор $b \in D$, чтобы вдоль траектории однопараметрической подгруппы группы Г, с касательным вектором $a+b$ тождественно обращался в нуль вектор S_0. Геодезическая линия и будет совпадать с траекторией этой однопараметрической подгруппы.

Мы хотим найти те условия, которым в таком случае должен удовлетворять вектор a.

Используя уравнения (10) построим бесконечную последовательность векторов $S_\mathfrak{a}$, определяемую формулой

$$S_{\mathfrak{a}+1} = \frac{d}{dt}\,S_\mathfrak{a},$$

при помощи дифференцирования вдоль траектории рассматриваемой однопараметрической подгруппы. В виду билинейности операции коммутирования и отображения γ, легко находим, что

$$S_\mathfrak{a} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,\,q \\ p+q=\mathfrak{a}}} \binom{p}{\mathfrak{a}} \gamma\left(a_b^{(p}\,\Omega(g_*),\ a_b^{q)}\,\Omega(g_*)\right) + a_b^{\mathfrak{a}+1}\,\Omega(g_*). \tag{11}$$

Здесь a_p^b означает p —кратное применение преобразования a_b, a_b^0 означает тождественное преобразование.

Следовательно, не только вектор S_0, но и все векторы, построенные по формуле (11) должны тождественно обращаться в нуль вдоль геодезической линии, если она совпадает с траекторией однопараметрической подгруппы группы Ли Г.

Сейчас мы докажем обратное: если в некоторой точке $t=0$ при подходящем выборе вектора b обращаются в нуль все векторы $S_\mathfrak{a}$, то в окрестности этой точки геодезическая линия является траекторией однопараметрической подгруппы с направляющим вектором $a+b$.

Для этого рассмотрим последовательность $a_b^0(a)$, $a_b(a)$, ..., $a_b^\xi(a)$, ... векторов пространства $\bar{\mathfrak{G}}$. Она обладает следующим свойством: можно указать число π таким образом, чтобы все векторы $a_b^\xi(a)$ для которых $p>\pi$ линейно выражались через векторы $a_b^\xi(a)$, для которых $q\leqslant\pi$. Используя это и формулу (11) легко доказать, что аналогичным свойством обладает и последовательность векторов $S_\mathfrak{a}$, Пусть

$$S_\mathfrak{a}=P_\mathfrak{a}^k S_k,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \psi;\ \mathfrak{a}>\psi.$$

Докажем, что $P_\mathfrak{a}^k$ не зависят от параметра t. Другими словами, они не зависят от векторов g_*. Для этого рассмотрим последовательность

$$E,\ a_b,\ a_b^2,\ a_b^3,\ \ldots$$

матриц, где через E обозначена единичная матрица. Если

$$E+\lambda_1 a_b+\lambda_2 a_b^2+\lambda_3 a_b^3+\ldots+\lambda_\psi a_b^\psi=0$$

и

$$\lambda_\psi\neq 0,$$

то

$$a,\ a_b(a),\ a_b^2(a),\ a_b^3(a),\ \ldots,\ a_b^\psi(a)$$

и

$$a_1,\ a_b(a_1),\ a_b^2(a_1),\ a_b^3(a_1),\ \ldots,\ a_b^\psi(a_1)$$

для произвольных векторов a и a_1 пространства $\bar{\mathfrak{G}}$ удовлетворяют такой же зависимости, как и матрицы. Это доказывает, что коэффициенты разложения постоянны относительно t.

Допустим, что вектор $b\in D$ можно выбрать таким образом, чтобы соотношения

$$S_k=0 \tag{12}$$

выполнялись в начальной точке. Для этого значения вектора пространства D получаем, что векторы S_k вдоль геодезической линии удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dS_0}{dt}=S_1,\quad \frac{dS_1}{dt}=S_2,\ \ldots,\ \frac{dS_\Phi}{dt}=P_{\Phi+1}^k S_k.$$

Так как в начальной точке все эти векторы обращаются в нуль, то они равны нулю и в некоторой окрестности этой точки. Тождество

$$S_0=0$$

означает, что в этой окрестности геодезическая линия является траекторией однопараметрической подгруппы группы Ли Г.

Теперь мы докажем, что геодезическая линия полностью является траекторией этой однопараметрической подгруппы. Для этого допустим, что геодезическая линия и рассматриваемая траектория однопараметрической подгруппы расходятся. Это может произойти двумя способами. Либо они совпадают для канонического параметра $t\leqslant t_0$ и не совпадают, если $t>t_0$; либо они соппадают при $t<t_0$ и не совпадают, если $t\geqslant t_0$.

Так как в первом случае условия (12) выполнены и в точке $t=t_0$, то, как доказанно, они совпадают и в некоторой окрестности этой точки. Остается рассмотреть второй случай. Так как в этом случае кривые совпадают для $t<t_0$, то во всех точках, с этими значениями канонического параметра, выполнены условия (12). Ввиду аналитической зависимости векторов S_k от касательных векторов однопараметрической подгруппы и геодезической линии

$$\lim_{t\to t_0} S_k=0,$$

следовательно, они выполнены и в этой точке. Расхождение геодезической линии и траектории однопараметрической подгруппы невозможно.

Остается заметить, что число $\pi\leqslant\dim\mathfrak{G}$. Для того, чтобы в выражение вектора S_α не входили новые векторы $a_p^\xi(\Omega(g_*))$ с показателями $p\leqslant\pi$, достаточно взять $\alpha>\pi+1$. Следовательно, $\Psi\leqslant\dim\mathfrak{G}+1$.

Мы доказали следующий результат.

Теорема 1. *Если геодезическая линия право-инвариантной аффинной связности, заданной на группе Ли* $\mathfrak{G}$, *в начальной точке проходит по направлению вектора* $a\in\overline{\mathfrak{G}}$, *то множество однопараметрических подгрупп группы Ли* Γ, *траекторией которых она является, находится во взаимно — однозначном соответствии с множеством решений относительно векторов* $b\in D$ *системы алгебрических уравнений*

$$S_k=0,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \dim\mathfrak{G}+1, \tag{13}$$

левые части которых по формуле (11) *построены в начальной точке. Искомые однопараметрические подгруппы через единицу группы Ли* Γ *проходят по направлению векторов* $a+b$.

3. Условия существования связностей с геодезическими линиями, совпадающими с траекториями однопараметрических подгрупп полупрямого произведения

Теорема 1 позволяет найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы все геодезические линии право —инвариантной аффинной связности совпадали бы с траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Γ.

Итак, допустим, что любая геодезическая линия является траекторией некоторой однопараметрической подгруппы группы Ли Γ. Это значит, что для любого вектора $a\in\overline{\mathfrak{G}}$ определен некоторый вектор $b\in D$ таким образом, что в любой точке группы выполенены условия (13).

Для этого достаточно, чтобы они выполнялись в единице группы, что в дальнейшем и будет подразумеваться. Тем самым, уравнения (13) в алгебре Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ определяют некоторую неявную функцию $b=b(a)$, со значениями в алгебре Ли D. Для более детального изучения этой функции в алгебре Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ и в алгебре Ли D зафиксируем базисы линейно независимых векторов. Через a^I и b^α будем обозначать координаты векторов этих алгебр относительно выбранных нами базисов. В таком случае

$$I, J, K=1, 2, \ldots, \dim \mathfrak{G} \ ; \ \sigma, \rho, \tau=1, 2, \ldots, \dim G.$$

Приравнивая нулю все координаты векторов S_k, получим систему уравнений, эквивалентную системе (13). Число независимых уравнений такой системы будет зависеть от выбора вектора $a \in \overline{\mathfrak{G}}$. Однако нам удобнее, дополняя такую систему уравнениями, зависящими от предыдущих, считать, что число уравнений не зависит от выбора векторов. Обозначим через

$$S^{\chi}=0$$

полученную таким образом систему уравнений.

Рассмотрим якобиеву матрицу

$$\left\| \frac{\partial S^{\chi}}{\partial b^{\sigma}} \right\|.$$

Допустим, что в точке $(a_0, b_0) \in \overline{\Gamma}$ ранг этой матрицы достигает максимальное значение. Следовательно, для векторов пространства Γ, принадлежащих достаточно малой окрестности точки (a_0, b_0), число независимых уравнений этой системы не меняется. Пусть система

$$S^{\psi}=0$$

состоит из уравнений, независимых в этой окрестности, т. е. уравнений, якобиева матрица

$$\left\| \frac{\partial S^{\psi}}{\partial b^{\sigma}} \right\|$$

которых в этой окрестности имеет максимальный ранг.

Пусть

$$S_0^{\psi}=S^{\psi}(a_0, b_0)$$

является значениями левых частей уравнений в рассматриваемой точке. Составим новую систему

$$S^{\psi}-S_0^{\psi}=0. \tag{14}$$

Точка (a_0, b_0) является решением этой системы и в некоторой окрестности этой точки якобиан системы имеет максимальный ранг. Если этот ранг меньше чем $\dim G$, то фиксацией некоторых компонент вектора b всегда можно достичь того, чтобы он остался максимальным и был равен числу оставшихся переменных. Не меняя обозначений в дальнейшем мы будем считать, что якобиан системы (14) отличен от нуля. Тогда эту систему можно разрешить относительно переменных b^{σ}. Ввиду того, что все уравнения системы (14) аналитически зависят от векторов a и b это решение тоже будет аналитическим [4]. Мы будем рассматривать только тот случай, когда $a_0=0$. Такие связности условно назовем линейными. В этом случае

$$b^{\sigma}=b_0^{\sigma}+b_K^{\sigma}a^K+b_{KL}^{\sigma}a^K a^L+\ldots \tag{15}$$

в некоторой окрестности нуля. Так как уравнения (15) получены решением системы (14), то они должны тождественно удовлетворять этой системе. Однако,

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,q \\ p+q=k}} \binom{q}{k} \gamma(a_b^{(p} a, a_b^{q)} a) + a_b^{k+1} a.$$

Поэтому $S_0^{\nu}=0$. В таком случае система (14) совпадает с системой (13) и мы заключаем, что система (13) имеет в некоторой окрестности точки $(0, b_0)$ аналитическое решение вида (15).

Подставим координаты вектора b, определяемые уравнением (15), в уравнение $S_1=0$, т.е. в уравнение

$$-[ab] + \frac{1}{2}\gamma(a, a) = 0.$$

Мы будем интересоваться лишь условием, которое получится в том случае, когда мы приравниваем нулю коэффициент при произведении координат вида $a^K a^L$.

Для этого обозначим через ξ линейное отображение алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ в алгебру Ли D, задаваемое соотношением

$$\left(\xi(a)\right)^{\sigma} = b_K^{\sigma} a^K$$

относительно выбранных нами базисов. Очевидно, что обращение в нуль коэффициента при $a^K a^L$ на отображение ξ налагает условие

$$\left[a, \xi(a)\right] = \frac{1}{2}\gamma(a, a),$$

которое, более общим образом, можно представить в таком виде:

$$\gamma(x, y) = [x, \xi(y)] + [y, \xi(x)]. \tag{16}$$

Используя это условие, получаем:

$$S_k = \sum_{\substack{p,q \\ p+q=k}} \binom{q}{k} \left[a_b^{(p} a, \xi(a_b^{q)} a)\right] + a_b^{k+1} a.$$

Уравнения (13) превращаются в некоторые условия на отображение $\xi : \overline{\mathfrak{G}} \to D$. Мы видим, что инвариантные аффинные связности, обладающие рассматриваемым свойством геодезических линий, могут на группе Ли $\mathfrak{G}$ существовать в том и только в том случае, если существует отображения $\xi : \overline{\mathfrak{G}} \to D$, удовлетворяющие определенным условиям. Нам остается выяснить эти условия.

Величины b_K^{σ} содержатся в любом члене выражения

$$\sum_{\substack{p,q \\ p+q=k}} \binom{q}{k} \left[a_b^{(p} a, \xi(a_b^{q)} a)\right]. \tag{17}$$

Нам важно выяснить, может ли член, содержащий только коэффициенты b^{σ}_{K}) разложения (15), быть похожим (как полином относительно величин a^{I} хотя бы на один член, содержащий и другие коэффициенты этого разложения. В каждом выражении S_k имеется по два члена, содержащих только коэффициенты b^{σ}_{K}. Один из них получается из выражения $a^{k+1}_{b}a$, другой из выражения (17). Как полиномы относительно a^{I}, они имеют степень $k+1$. Следовательно, любой другой член, подобный им, должен содержать коэффициенты b^{σ}_{0}. Мы докажем, что все такие члены равны нулю.

Действительно, это просто следует из того, что в уравнении $S_0=0$ имеется лишь один член, содержащий b^{σ}_{0}. Если через b_0 обозначит вектор алгебры Ли D с компонентами b^{σ}_{0}, то этот член можно будет представить в виде $[b_0, a]$. Тем самым

$$[b_0, a]=0$$

для всех векторов окрестности точки 0_0, а тем самым и для всех векторов пространства.

Следовательно, члены в выражениях S_k, содержащие только b^{σ}_{K} себе подобных не имеют. Так как эти члены должны быть равны нулю, то это приводит к таким условиям:

$$\sum_{\substack{p,q\\ p+q=k}} \binom{q}{k}\left[a^{(p}{}_{\xi(a)}a,\ \xi(a^{q)}{}_{\xi(a)},\ a\right]+a^{k+1}_{\xi(a)}a=0.$$

Они должны выполнятся для каждого вектора a окрестности точки a_0, а в силу однородности этих уравнений, и для всех векторов алгебры Ли $\overline{\mathfrak{E}}$.

При $p=0$, $q=k$ получаем два члена

$$\left[a,\ \xi(a^{k}_{\xi(a)}a)\right] \quad \text{и} \quad \left[a^{k}_{\xi(a)}a,\ \xi(a)\right]=-a^{k+1}_{\xi(a)}a.$$

Для упрощения записи, введем следующие обозначения:

$$a_{\xi(x)}x=X,\quad a^{2}_{\xi(x)}x=X^{2},\ \ldots,\ a^{p}_{\xi(x)}x=X^{p}$$

для всех векторов $x\in\overline{\mathfrak{E}}$. В таких обозначениях имеем:

$$\sum_{\substack{p,q\\ p+q=k\\ p\neq 0,\ q\neq 0}} \binom{q}{k}\left[X^{(p},\ \xi(X^{q)})\right]+\left[\xi(X^{k}),\ x\right]=0 \tag{18}$$

для каждого вектора x алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.

Сейчас мы докажем, что условия (18) на отображение $\xi:\overline{\mathfrak{G}}\to D$ для того, чтобы по формуле (16) оно на группе Ли $\mathfrak{G}$ определяло линейную инвариантную аффинную связность с геодезическими линиями, совпадающими с траекториями однопараметрических подгрупп полупрямого произведения Г, не только необходимы, но и достаточны.

Условия (18) составляют только часть условий на коэффициенты разложения (15). Однако, как мы видели, эти условия единственные, в которые входят только коэффициенты b^{σ}_{K}.

Следовательно, обращая в нуль все остальные коэффициенты разложения (15), мы тем самым удовлетворим и всем остальным условиям. Это доказывает наше утверждение.

Таким образом, если все геодезические линии инвариантной аффинной связности, заданной на группе Ли $\mathfrak{G}$ являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Г и связность линейна, то среди однопараметрических подгрупп, траекторией которых является данная геодезическая линия, можно так выбрать одну из них (этому соответствует фиксация всех коэффициентов, кроме b^{α}_{κ}, на нулевом значении), чтобы зависимость ее направляющего вектора от вектора геодезической линии стала линейной. Это и порождает линейное отображение $\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D$.

Нам остается сформулировать окончательный результат.

Теорема 2. *Тогда и только тогда на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует право — инвариантная аффинная связность с геодезическими линиями, совпадающими с траекториями однопараметрических подгрупп полупрямого произведения Г и являющаяся линейной, если существует линейное отображение* $\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D$, *удовлетворяющее условиям* (18) *относительно любого вектора x алгебры Ли* $\bar{\mathfrak{G}}$.

Такая связность с отображением ξ определяется при помощи формулы (16).

Отображение $\xi : \bar{\mathfrak{G}} : \to D$ назовем допустимым, если оно линейное и удовлетворяет условиям (18). Тогда, ввиду однородности условий (18), каждое допустимое отображение ξ порождает однопараметриическое семейство допустимых отображений вида $\lambda\xi$, где λ — элемент основного поля.

Инвариантную аффинную связность, определяемую на группе Ли $\mathfrak{G}$ допустимым отображением ξ, тоже будем обозначать буквой ξ. Следовательно, ξ – связности это те и только те связности группы Ли $\mathfrak{G}$, которые линейны и геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп некоторого полупрямого произведения.

Следовательно, если на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует одна ξ — связность, то существует и однопараметрическое семейство $\lambda\xi$ таких связностей.

Докажем одну теорему о вполне геодезических подмногообразиях ξ — связностей.

Теорема 3. *Подгруппа Ли g и ее классы смежности на группе Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда являются вполне геодезическими подмногообразиями связности ξ, когда с каждым вектором x подалгебры Ли $\bar{g}$ все векторы вида*

$$\Big[\xi(x),\ \big[\xi(x),\ [\ldots,\ [\xi(x),\ x]\ldots]\big]\Big]$$ *лежат в этой подалгебре.*

Доказательство. Допустим, что геодезическая линия, с касательным вектором $x \in \bar{g}$ в начальной точке, целиком лежит в подгруппе g. Мы всегда можем считать, что эта геодезическая линия проходит через единицу группы. Вдоль геодезической линиии выполняются уравнения (9), а так как эта геодезическая линия является траекторией некоторой однопараметрической подгруппы группы Ли Г, то и уравнения (10), причем всегда можем брать $b = \xi(x)$:

$$\frac{d}{dt}\,\Omega(g_*) = \big[\xi(x),\ \Omega(g_*)\big].$$

Учитывая то, что $\xi(x) = \mathrm{const}$ получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Omega(g_*) = \left[\xi(x),\ [\xi(x),\ \Omega(g_*)]\right],$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\Omega(g_*) = \left[\xi(x),\ \left[\xi(x),\ [\xi(x),\ \Omega(g_*)]\right]\right],$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^p}{dt^p}\Omega(g_*) = \left[\underbrace{\xi(x),\ \left[\xi(x),\ [\ldots,\ [\xi(x),\ \Omega(g_*)]\ldots\right]}_{p\ \text{раз}}\right],$$

. . . .

. . . .

Так как геодезическая линия целиком лежит в подгруппе g, то все векторы вида

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Omega(g_*),\quad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\Omega(g_*),\ \ldots,\ \frac{d^p}{dt^p}\Big|_{t=0}\Omega(g_*)$$

лежат в подалгебре $\bar{g}$. Учитывая то, что в начальной точке $\Omega(g_*) = x$, мы видим, что все векторы $\left[\underbrace{\xi(x),\ \left[\xi(x),\ [\ldots,\ [\xi(x),\ x]\ldots\right]}_{p\ \text{раз}}\right]$ при любом $p>0$ лежат в подалгебре $\bar{g}$.

Теперь докажем достаточность этих условий.

Если все векторы вида $\left[\xi(x),\ \left[\xi(x),\ [\ldots,\ [\xi(x),\ x]\ldots\right]\right]$ лежат в подалгебре $\bar{g}$, то и все производные

$$\frac{d^p}{dt^p}\Big|_{t=0}\Omega(g_*)$$

лежат в этой подалгебре. Однако, геодезическая линия является аналитической кривой и в некоторой окрестности начальной точки определяется коэффициентами своего ряда относительно канонического параметра. Так как эти коэффициенты определяются вышеуказанными производными, то в некоторой окрестности начальной точки геодезическая линия лежит в подгруппе g. Меняя начальную точку, легко доказать, что она целиком лежит в этой подгруппе. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{G}'$ означает производную группу Ли, группы $\mathfrak{G}$, а Z центральную подгруппу этой группы. Через $\bar{\mathfrak{G}}'$ и $\bar{Z}$ будем обозначать соответствующие подалгебры алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

Из тождеств Якоби следует, что

$$\gamma(\bar{\mathfrak{G}}') \subseteq \bar{\mathfrak{G}}',\quad \gamma(\bar{Z}) \subseteq \bar{Z},$$

для любого дифференцирования алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$. Поэтому производная и центральная подгруппы и их классы смежности на группе Ли $\mathfrak{G}$ являются вполне геодезическими подмногообразиями для всех ξ — связностей.

Применяя теорему к случаю $\dim g=1$ получаем, что однопараметрическая подгруппа группы Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда является геодезической линией ξ — связности, если

$$[\xi(x), x]=\lambda x$$

для направляющего вектора x этой подгруппы.

Таким образом, тогда и только тогда геодезические линии ξ — связности не совпадают с однопараметрическими подгруппами (и их классами смежности), если

$$[\xi(x), x]\neq\lambda x$$

для некоторого вектора $x\in\overline{\mathfrak{G}}$.

4. Условия допустимости голоморфа относительно право — инвариантных связностей

Голоморф $\overline{\mathfrak{G}}+D$ будем называть допустимым относительно право — инвариантных аффинных связностей, или просто допустимым, если на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует по крайней мере одна право — инвариантная аффинная связность, не совпадающая со связностью Картана этой группы, геодезические линии которой являются траекториями однопараметрических подгрупп подупрямого произведения Г. Другими словами, голоморф $\overline{\mathfrak{G}}+D$ допустим, если на группе Ли $\mathfrak{G}$ имеется ξ — связность относительно нормального расширения Г группы Ли $\mathfrak{G}$ при помощи группы Ли G.

Используя понятие допустимого отображения, мы можем сказать, что голоморф $\overline{\mathfrak{G}}+D$ допустим тогда и только тогда, если существует допустимое отображение $\xi:\overline{\mathfrak{G}}\to D$. Этим определением мы и будем пользоваться.

Сейчас мы будем решать вопрос допустимости голоморфов.

Докажем следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Если для некоторого вектора $\gamma\in D$ множество $H=\gamma(\overline{\mathfrak{G}})$ является собственным линейным подпространством алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$, то существует вектор $x\in\overline{H}$ такой, что $\gamma(x)$ не равно нулю.*

Доказательство. Если мы допустим, что $\gamma(H)=0$, то из условия $\gamma(\overline{\mathfrak{G}})\neq 0$ сразу будет следовать существование вектора с нужным свойством. Поэтому допустим, что $\gamma(H)\neq 0$. Возьмем любой вектор $z\bar{\in} H$. Если $\gamma(z)\neq 0$, то доказательство очевидно. Если $\gamma(z)=0$, то вектор $x=z+t$ при любом векторе t подпространства H, не принадлежащем ядру отображения γ, удовлетворяет этому условию.

Пусть $\xi:\overline{\mathfrak{G}}\to D$ некоторое допустимое отображение. Если $\xi(\overline{\mathfrak{G}})$ содержится в подалгебре d алгебры Ли D, то мы скажем, что допустимое отображение ξ сужается до подалгебры d, а голоморф $\overline{\mathfrak{G}}+D$ сужается до голоморфа $\overline{\mathfrak{G}}+d$. Очевидно, что в этом случае голоморф $\overline{\mathfrak{G}}+d$ допустим. Мы будем также говорить, что алгебра дифференцирований D сужается до подалгебры d.

Если группа автоморфизмов индуцирует нулевые дифференцирования алгебры Ли этой группы, то по формуле (16) на группе Ли $\mathfrak{G}$ получаем только связность Картана. Такие случаи мы исключим из рассмотрений. Из рассмотрений исключим и подалгебры, которые содержат только нулевые дифференцирования, а также соответствующие им подгруппы автоморфизмов.

Если алгебра дифференцирований такова, что ее можно сузить до любой подалгебры, то ее будем называть абсолютно сужаемой. В терминах групп Ли это значит, что при любой группе автоморфизмов, соответствующих подалгебре d сужаемой алгебры Ли D, на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует по крайней мере однопараметрическое семейство ξ – связностей, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп нормального расширения группы $\mathfrak{G}$ при помощи группы автоморфизмов с алгеброй d.

Особый интерес представляют те группы Ли, которые имеют алгебры Ли, любая алгебра дифференцирований которых абсолютно сужаема. Такие группы и их алгебры будем называть сужаемыми. Другими словами, если группа сужаема, то при любом ее нормальном расширении она обладает ξ – связностями, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп этого расширения.

Укажем простой критерий сужаемости.

Лемма 2. *Если подалгебра d алгебры Ли D содержит вектор γ, для которого $\gamma(\overline{\mathfrak{G}})=H$ является собственным подпространством алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$, то алгебра дифференцирований D сужаема до подалгебры d.*

Доказательство. Применяя лемму 1 мы видим, что в алгебре Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ существует вектор $x\in H$, для которого $\gamma(x)\neq 0$. Пусть

$$\overline{\mathfrak{G}}=H+\mathfrak{M}$$

является таким разложением пространства $\overline{\mathfrak{G}}$ в прямую сумму, при котором $x\in\mathfrak{M}$. Пусть $\lambda:\mathfrak{M}\to d$ линейное отображение, подчиненное двум условиям: $\lambda(\mathfrak{M})$ лежит в подпространстве $R\gamma$ и $\lambda(x)=\gamma$.

Тогда отображение $\xi:\overline{\mathfrak{G}}\to D$, определенное соотношениями

$$\xi|_H=0,\ \xi\mathfrak{M}|=\lambda$$

допустимо.

Действительно, в этом случае

$$\xi(\overline{\mathfrak{G}})(\overline{\mathfrak{G}})\subseteq H,$$

поэтому

$$\xi([\xi(x), y])=0$$

для произвольных векторов x и y алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$. Этого достаточно для того, чтобы отображение ξ удовлетворяло условиям (18).

С другой стороны, так как

$$[\xi(x), x]=\gamma(x)\neq 0,$$

то выполенено и условие гарантирующее, что связность не является связностью Картана.

В случае, когда подалгебра Ли d является подалгеброй, порожденной дифференцированием γ (имеет вид $R\gamma$, где R означает основное поле), лемму 2 можно усилить.

Лемма 3. *Алгебра Ли D тогда и только тогда сужаема до одномерной подалгебры $R\gamma$, если $H=\gamma(\overline{\mathfrak{G}})$ является собственным подпространством алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.*

Доказательство. Достаточность следует из леммы 2. Докажем необходимость.

Пусть $\xi : \overline{\mathfrak{G}} \to R\gamma$ допустимое отображение на одномерную подалгебру $R\gamma$. Это отображение должно удовлетворять условиям (18). Первое уравнение этой системы требует, чтобы соотношение

$$\left[\xi\left([\xi(x), x]\right), x\right]=0 \tag{19}$$

выполнялось для всех векторов алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$. С другой стороны, так как связность не является связностью Картана, то

$$[\xi(x), x]\neq 0$$

для некоторых векторов $x\in\overline{\mathfrak{G}}$. Для таких векторов

$$\xi\left([\xi(x), x]\right)=\lambda\gamma,$$

где λ некоторый элемент основного поля. Так как $\gamma(x)\neq 0$, то из условия (19) следует, что $\lambda=0$. Тем самым

$$\xi\left([\xi(x), x]\right)=0 \tag{20}$$

для всех векторов алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.

Пусть x и y такие два вектора этой алгебры Ли, для которых $\xi(x)\neq 0$ и $\xi(y)\neq 0$. Тогда $\xi(x)=\alpha\xi(y)$. Из условия (20) написанного для вектора y следует, что

$$\xi\left([\xi(x), y]\right)=0.$$

Пусть сейчас $\xi(y)=0$. Напишем условие (20) для вектора $x+y$:

$$\xi\left([\xi(x+y), x+y]\right)=0.$$

В силу этого же условия получаем:

$$0=\xi\left([\xi(x), x+y]\right)=\xi\left([\xi(x), y]\right).$$

Тем самым мы доказали, что допустимое отображение $\xi : \overline{\mathfrak{G}}\to R\gamma$ должно удовлетворять условию

$$\xi\left([\xi(x), y]\right)=0 \tag{21}$$

при произвольном выборе векторов x и y алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$.

Если мы теперь допустим, что $\gamma(\overline{\mathfrak{G}})=\overline{\mathfrak{G}}$, то из этого соотношения получим, что $\xi=0$. Лемма доказана.

Очевидно, что абсолютная сужаемость алгебры дифференцирований эквивалентна ее сужаемости до любой одномерной подалгебры, порожденной не нулевым дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Опираясь на это замечание, мы докажем существование абсолютно сужаемых голоморфов.

Голоморф назовем внутренним, если все дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{G}$, соответствующие элементам алгебры D являются ее внутренними дифференцированиями.

Теорема 4. *Внутренние голоморфы абсолютно сужаемы.*

Доказательство. Оно сразу следует из леммы 2. Действительно, каждое ненулевое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в рассматриваемом случае имеет вид adx и в силу того, что оно отображает в нуль прямую Rx, вырождено. Это значит, что рассматриваемый голоморф сужается до подалгебры, порожденной этим дифференцированием. Тем самым голоморф и абсолютно сужаемый.

Таким образом, мы доказали следующее. *Если задана группа Ли $\mathfrak{G}$ и некоторая группа Ли G ее внутренних автоморфизмов, индуцирующая хотя бы одно ненулевое дифференцирование алгебры Ли этой группы, то на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует по крайней мере однопараметрическое семейство право — инвариантных аффинных связностей, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп нормального расширения группы Ли, $\mathfrak{G}$ при помощи группы Ли G.*

Тем самым, мы доказали существование сужаемых групп Ли. Это совершенные группы Ли, алгебры Ли,которые имеют только внутренние дифференцирования.

Пусть $\mathfrak{G}+D$ некоторый голоморф. Если все дифференцирования, соответствующие элементам алгебры Ли D невырожденны и пропорциональны между собой, то такой голоморф будем называть скалярным. Напомним, что мы рассматриваем только тот случай, когда не все дифференцирования нулевые. В случае скалярного голоморфа это значит, что все дифференцирования пропорциональны одному невырожденному дифференцированию.

Теорема 5. *Если $\mathfrak{G}$ комплексная алгебра Ли, то голоморф $\mathfrak{G}+D$ допустим тогда и только тогда, если он не является скалярным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}+D$ некоторый голоморф комплексной алгебры Ли $\mathfrak{G}$, в котором не все дифференцирования, соответствующие элементам алгебры D, равны нулю. Как это следует из леммы 2, такой голоморф может быть недопустимым лишь тогда, когда все дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{G}$, соответствующие элементам алгебры D либо не вырождены, либо равны нулю.

Возьмем два любых вектора y_1 и y_2 алгебры Ли D, соответствующие которым дифференцирования не равны нулю. Пусть эти дифференцирования задаются матрицами T_1 и T_2. Тогда вектору $y_1+\lambda y_2$ при любом комплексном значении λ, соответствует дифференцирование с матрицей

$$T=T_1+\lambda T_2.$$

Уравнение

$$\det T=0$$

является многочленом относительно λ и в поле комплексных чисел всегда имеет решение λ_0. В таком случае определитель матрицы

$$T_0 = T_1 + \lambda_0 T_2$$

равен нулю. Если нет вырожденных дифференцирований, соответствующих векторам алгебры Ли D, кроме нулевых дифференцирований алгебры $\bar{\mathfrak{G}}$, то эта матрица равна нулю. Тем самым два любых дифференцирований пропорциональны и голоморф $\bar{\mathfrak{G}} + D$ — скалярный.

Однако скалярный голоморф не допустим. Для доказательства предположим, что существует допустимое отображение $\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D$. Рассмотрим коммутативную алгебру Ли $\bar{T}$, образованную мартицами, соответствующими элементам алгебры Ли D. Существует естественное линейное отображение $\eta : D \to \bar{T}$. Это значит, что линейное отображение $\bar{\xi} : \bar{\mathfrak{G}} \to \bar{T}$, определенное соотношением $\bar{\xi} = \eta_0 \xi$, является допустимым отображением для голоморфа $\bar{\mathfrak{G}} + \bar{T}$. Это противоречит лемме 3. Теорема доказана.

Тем самым, в случае комплексных групп Ли, мы полностью решили вопрос существования изучаемого нами класса инвариантных аффинных связностей. Вот окончательный результат.

Если не все дифференцирования алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ комплексной группы Ли $\mathfrak{G}$, индуцированные группой Ли G автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$, пропорциональны между собой, то на группе Ли $\mathfrak{G}$ существует по крайней мере однопараметрическое семейство право — инвариантных аффинных связностей, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп нормального расширения группы Ли $\mathfrak{G}$ относительно группы Ли G. Если дифференцирования пропорциональны, то скалярный голоморф недопустим.

Только что проведенные рассуждения в случае вещественной алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ можно дословно повторить, если алгебра $\bar{\mathfrak{G}}$ нечетномерна, так как в этом случае существует вещественный корень уравнения

$$\det T = 0.$$

Тем самым, мы можем высказать следующее утверждение.

Теорема 5'. *Если $\bar{\mathfrak{G}}$ вещественная нечетномерная алгебра Ли, то голоморф $\bar{\mathfrak{G}} + D$ допустим тогда и только тогда, если он не является скалярным.*

Лемма 4. *Если вещественная алгебра Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ имеет нескалярный голоморф $\bar{\mathfrak{G}} + D$, все дифференцирования которого невырождены, то такой голоморф недопустим.*

Доказательство. Если мы предположим, что существует допустимое отображение $\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D$, то оно должно удовлетворять условиям (18). В частности, оно должно удовлетворять первому уравнению

$$\Big[\xi\big([\xi(x), x]\big), x\Big] = 0 \tag{22}$$

этой системы. Так как все дифференцирования невырождены, то из этого уравнения следует, что отображение ξ имеет нетривиальное ядро, которое мы обозначим через H. Так как связность ξ не является связностью Картана, то

$$[\xi(x), x] \neq 0$$

для некоторого $x \in \bar{\mathfrak{G}}$. Пусть $\gamma = \xi(x)$.

Рассмотрим такое разложение пространства $\overline{\mathfrak{G}}$ в прямую сумму

$$\overline{\mathfrak{G}}=H+\mathfrak{M},$$

при котором $x\in\mathfrak{M}$. Ввиду линейности дифференцирования γ и соотношения $\gamma(\overline{\mathfrak{G}})=\overline{\mathfrak{G}}$, имеем:

$$\mathfrak{G}=\gamma(H)+\gamma(\mathfrak{M}). \tag{23}$$

Это разложение является прямой суммой.

Пусть $y\in H$. Напишем соотношение (22) для вектора $x+y$. Из этого соотношения, ввиду линейности отображения ξ и условия (22) на вектор x, получаем:

$$\xi\Big(\gamma(y)\Big)=0.$$

Это значит, что $\gamma(H)$ принадлежит ядру отображения ξ, т.е. что

$$\gamma(H)\subseteq H.$$

С другой стороны, так как все дифференцирования невырождены, то из того же соотношения следует, что и $[\xi(x), x]$ лежит в H. Тем самым

$$\gamma(H)\cap\gamma(\mathfrak{M})\neq 0$$

и разложение (23) не является прямой суммой. Это противоречие доказывает утверждение.

Мы доказали, что голоморф допустим тогда и только тогда, если он содержит хотя бы одно ненулевое вырожденное дифференцирование.

В случае комплексной или вещественной нечетномерной алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ недопустимый голоморф всегда имеет одномерную алгебру дифференцирований. Следовательно, если такая алгебра имеет голоморф с более чем одномерной алгеброй дифференцирований, то он допустим.

Нам важно выяснить, какие алгебры Ли могут иметь невырожденные дифференцирования.

Имеет место следующий результат: если на комплексной алгебре Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ определено невырожденное дифференцирование, то алгебра $\overline{\mathfrak{G}}$ нильпотентна.

Так как это известный результат, то мы дадим лишь схему его доказательства.

Используя алгебраическую замкнутость основного поля, можем пространство $\overline{\mathfrak{G}}$ разложить на сумму корневых подпространств $\mathfrak{G}_\alpha$, определяемых условием

$$\mathfrak{G}_\alpha=\{x_\alpha \mid (\gamma-\alpha E)^k x_\alpha=0 \text{ для достаточно больших } k\}.$$

Оказывается, что при таком разложении имеют место следующие соотношения:

$$[\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta]\subseteq\mathfrak{G}_{\alpha+\beta},$$

если $\alpha+\beta$ корень и

$$[\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta]=0,$$

если $\alpha+\beta$ не является характеристическим корнем.

Из этих соотношений легко получить нильпотентность алгебры $\ddot{\mathfrak{G}}$.

Аналогично можно доказать такой результат: если все характеристические корни некоторого невырожденного дифференцирования алгебры Ли вещественны, то такая алгебра нильпотентна и в том случае, когда она вещественна.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема существования. *Пусть $\bar{\mathfrak{G}}+D$ некоторый голоморф и $m=\dim D$. Если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ комплексная или вещественная нечетной размерности, то в случае $m>1$ этот голоморф допустим. Если $\bar{\mathfrak{G}}$ комплексная алгебра Ли, не являющаяся нильпотентной, то этот голоморф абсолютно сужаемый. Если $\bar{\mathfrak{G}}$ комплексная нильпотентная алгебра Ли, то голоморф допустим, если он не является скалярным. Если $\bar{\mathfrak{G}}$ вещественная алгебра Ли нечетной дименсии и $m=1$, то он допустим, если не является скалярным. Если $\bar{\mathfrak{G}}$ вещественная алгебра Ли четной дименсии, то голоморф допустим, если D содержит ненулевое вырожденное дифференцирование. Если D не содержит невырожденных дифференцирований, то он абсолютно сужаемый.*

Во всех остальных случаях он не допустим.

Следующие две теоремы надо оценивать, как относящиеся к вещественному четномерному случаю, хотя они формулируются и доказываются без оговорок на это.

Через ω обозначим линейную форму, определенную в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ группы Ли $\mathfrak{G}$ соотношением вида

$$\omega(x)=Trad\,|_{\bar{\mathfrak{G}}}\, x,$$

где Tr означает операцию взятия следа соответствующей матрицы преобразования.

Следующая теорема гарантирует вырожденность всех дифференцирований алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$.

Теорема 6. *Алгебры Ли с ненулевой формой ω сужаемы.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что любой голоморф таких алгебр сужается до голоморфа $\bar{\mathfrak{G}}+R\gamma$, где γ некоторое ненулевое дифференцирование.

Для этого рассмотрим линейное отображение $\xi:\bar{\mathfrak{G}}\to D$, определенно соотношением

$$\xi(x)=\omega(x)\,.\,\eta$$

для вектора $\eta\in D$. Из тождества Якоби следует, что

$$ad\,[xy]=adx\,ady-ady\,adx,$$

$$ad\,[\eta x]=ad\eta\,adx-adx\,ad\eta,$$

относительно произвольных векторов алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ и любого дифференцирования $\gamma\in D$. Используя эти соотношения видим, что

$$\omega(\bar{\mathfrak{G}}')=0,\quad \omega\Big(D(\bar{\mathfrak{G}})\Big)=0,$$

где $\bar{\mathfrak{G}}'$, как и прежде, означает производную алгебру.

Таким образом

$$\xi\left(\overline{\mathfrak{G}}' + D(\overline{\mathfrak{G}})\right) = 0.$$

В силу того, что ω является ненулевой формой, отображение ξ не нулевое. В таком случае $D(\overline{\mathfrak{G}})$ является собственным подпространством алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ при любой алгебре D ее дифференцирований. Утверждение теоремы следует из леммы 2.

Как известно [7] след любой матрицы, соответствующей внутреннему дифференцированию при помощи вектора производной алгебры всегда равен нулю. Тем самым, полупростые алгебры Ли имеют только нулевые формы ω. Однако они совершенны и, следовательно, сужаемы. Таким образом, критерий теоремы 6 является достаточным, но не является необходимым признаком сужаемости алгебр Ли.

Теорема 7. *Разрешимые алгебры Ли, не являющиеся нильпотентными, сужаемы.*

Доказательство. Воспользуемся свойствами радикалов и ниль – радикалов этих алгебр Ли.

Для каждой конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики существует максимальный разрешимый идеал σ, содержащий любой другой разрешимый идеал этой алгебры. Такой идеал называется радикалом. Если алгебра не полупроста, то $\sigma \neq \{0\}$.

Аналогично, как и в случае разрешимых идеалов, можно доказать, что в алгебре Ли существует нильпотентный идеал Σ, содержащий любой другой нильпотентный идеал этой алгебры. Его обычно называют ниль–радикалом. Во всех случаях ниль–радикал содержится в радикале алгебры.

Мы воспользуемся тем, что радикал и ниль–радикал алгебры всегда связаны соотношением

$$[\overline{\mathfrak{G}}, \sigma] \subseteq \Sigma$$

относительно умножения в алгебре $\overline{\mathfrak{G}}$ [5].

Мы рассматриваем разрешимую алгебру Ли $\overline{\mathfrak{G}}$, поэтому $\sigma = \overline{\mathfrak{G}}$. Тогда соотношение $[\overline{\mathfrak{G}}, \sigma] \subseteq \Sigma$ означает, что $\overline{\mathfrak{G}}' \subseteq \Sigma$, т.е. что производная алгебра Ли $\overline{\mathfrak{G}}'$ нильпотентна.

Рассмотрим голоморф

$$Q = \overline{\mathfrak{G}} + R\gamma,$$

где γ – любое ненулевое дифференцирование алгебры Ли $\overline{\mathfrak{G}}$. В голоморфе Q алгебра Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ является идеалом, а так как она разрешима, то разрешимым идеалом. Фактор алгебра

$$Q \mid \overline{\mathfrak{G}}$$

изоморфна алгебре $R\gamma$ и тем самым абелева. По известным свойствам алгебр Ли алгебра Ли Q должна быть разрешимой алгеброй. По только что доказанным свойствам разрешимых алгебр Ли, производная алгебра Q' является нильпотентным идеалом в алгебре Ли Q. Однако

$$Q' = \overline{\mathfrak{G}}' + \gamma(\overline{\mathfrak{G}})$$

и тем самым содержится в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Мы видим, что

$$\bar{\mathfrak{G}}'+\gamma(\bar{\mathfrak{G}})$$

является нильпотентным идеалом в этой алгебре. Следовательно

$$\bar{\mathfrak{G}}'+\gamma(\bar{\mathfrak{G}})\subseteq\Sigma.$$

Так как $\Sigma\neq\bar{\mathfrak{G}}$ и $\gamma(\bar{\mathfrak{G}})\neq 0$, то $\gamma(\bar{\mathfrak{G}})$ является собственным подпространством алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Доказательство теоремы теперь следует из леммы 2.

Теорема 7 не является следствием теоремы 6, так как существуют разрешимые алгебры Ли, не являющиеся нильпотентными и обладающие нулевой формой ω.

Действительно, рассмотрим трехмерную алгебру Ли, определенную относительно базиса x_1, x_2, x_3 такой таблицей умножения:

$$[x_1, x_2]=0,\ [x_1, x_3]=x_1-px_2,\ [x_2, x_3]=qx_1-x_2.$$

Легко проверить, что при любом выборе чисел p и q тождества Якоби удовлетворяются. Так как $\bar{\mathfrak{G}}''=0$, то эта алгебра Ли разрешима.

Преобразование $ad_{\bar{\mathfrak{G}}}x$, соответствующее элементу $x\in\bar{\mathfrak{G}}$, имеющему разложение

$$x=x^1x_1+x^2x_2+x^3x_3$$

относительно базиса x_1, x_2, x_3, задается матрицей вида

$$A=\left\|\begin{matrix} -x^3 & px^3 & 0\\ -qx^3 & x^3 & 0\\ x^1+qx^2 & -(x^2+px^1) & 0\end{matrix}\right\|.$$

Легко проверить, что

$$A^3=(x^3)^2(pq-1)A.$$

Таким образом, если $pq\neq 1$, то алгебра Ли $\bar{\mathfrak{G}}$, определенная вышеуказанным умножением, не является нильпотентной. Тем не менее

$$TrA=0,$$

т.е. эта алгебра Ли обладает нулевой формой ω.

Рассматривая вопрос существования ξ – связностей, мы пользовались допустимыми отображениями вида $\xi:\bar{\mathfrak{G}}\to R\eta$, где η некоторое невырожденное дифференцирование алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Естественным образом возникает следующий вопрос: существуют ли допустимые отображения, отображающие алгебру Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ на более чем одномерное подпространство алгебры дифференцирований? Оказывается, что такие отображения существуют. Приведем примеры таких отображений.

Пусть

$$\bar{\mathfrak{G}}=\bar{g}+\mathfrak{M} \tag{24}$$

означает разложение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ в прямую сумму своих подпространств. Будем рассматривать те алгебры дифференцирований алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$, относительно которых данное разложение инвариантно, т.е.

$$D\bar{g}\subseteq\bar{g},\quad D\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}. \tag{25}$$

Пусть

$$\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D$$

— линейное отображение, ограничение которого на подпространство $\mathfrak{M}$, равно нулю.

Если $x \in \bar{\mathfrak{G}}$ и

$$x = y + z$$

соответствующее разложение этого вектора, то

$$X = [\xi(x),\ x] = [\xi(y), y] + [\xi(y), z].$$

В случае, когда

$$[\xi(y), y] = 0 \qquad (26)$$

для всех векторов $y \in \bar{g}$, вектор X лежит в подпространстве $\mathfrak{M}$. В таком случае и все векторы вида X^k лежат в этом подпространстве, т.к.

$$X^k = \Big[\underbrace{\xi(y), \Big[\xi(y), [\ldots[\xi(y),}_{k-1 \text{ раз}} X]\ldots]\Big]\Big].$$

Следовательно

$$\xi(X^k) = 0,$$

если только $k > 0$, и отображение ξ допустимо.

1) Пусть $\bar{g}$ — подалгебра, $\mathfrak{M}$ — подпространство, удовлетворяющие условию

$$[\bar{g}, \mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M}.$$

В этом случае говорят, что в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ задана оснащенная подалгебра $\bar{g}$.

Рассмотрим случай, когда $D = ad\bar{g}$. Такая алгебра дифференцирований удовлетворяет условиям (25). Определим линейное отображение $\xi : \mathfrak{G} \to D$ сооотношениями

$$\xi(\mathfrak{M}) = 0, \ \xi(y) = \lambda\, ady$$

для любого вектора $y \in \bar{g}$. Такое отображение удовлетворяет условию (26), следовательно допустимо. Это C — связности, рассмотренные А. М. Васильевым.

2) Пусть (24) означает разложение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$ в прямую сумму двух идеалов. Рассмотрим любую алгебру Ли D_1 дифференцирований идеала $\mathfrak{M}$.

Линейное отображение $\eta : \bar{\mathfrak{G}} \to \bar{\mathfrak{G}}$, определенное соотношениями

$$\eta(y) = d_1(y); \quad \eta(x) = 0; \quad x \in \bar{g}, \ y \in \mathfrak{M}, \ d_1 \in D_1$$

является дифференцированием алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Это порождает алгебру дифференцирований D алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$, для которой

$$D(\bar{g}) = 0.$$

Очевидно, что любое линейное отображение $\xi : \bar{\mathfrak{G}} \to D$, подчиненное условию $\xi(\mathfrak{M}) = 0$, удовлетворяет требованию (26) и, тем самым, допустимо.

В заключение отметим одно свойство ξ — связностей в случае, когда группа Ли G является однопараметрической. Для этого воспользуемся формулой (3). Пусть на группе Ли $\mathfrak{G}$ при помощи формулы (16) задана некоторая ξ — связность, для всех векторов $y \in D$ удовлетворяющая соотношение $D_y \gamma = 0$. Это значит, что соответствующая ξ — связность не только право — инвариантна, на группе Ли $\mathfrak{G}$, но инвариантна и относительно диффеоморфизмов группы G.

В этом случае для любых векторов x_1 и $x_2 \in \overline{\mathfrak{G}}$ и любого вектора y алгебры Ли D, выполняется соотношение

$$\left[x_1 [\xi(x_2),\ y]\right] + \left[x_2 [\xi(x_1),\ y]\right] + \left[x_2,\ \xi([y,\ x_1])\right] + \left[x_1,\ \xi([y,\ x_2])\right] = 0. \quad (27)$$

В случае C — связностей это приводит к условию

$$\lambda \left\{\left[x_1 [x_2,\ y]\right] + \left[x_2 [x_1,\ y]\right] + \left[x_2 [y,\ x_1]\right] + \left[x_1 [y,\ x_2]\right]\right\} = 0.$$

Используя тождество Якоби легко убедиться, что эти соотношения соблюдаются. Отсюда и следует, что C — связности инвариантны относительно группы $\mathfrak{G}_{np} \times g_\lambda$.

В случае, когда G является однопараметрической группой Ли ее алгебра Ли одномерна и условие (27) принимает следующий вид:

$$\left[x_2,\ \xi([y,\ x_1])\right] + \left[x_1,\ \xi([y,\ x_2])\right] = 0. \quad (28)$$

Так как в этом случае ξ — связности удовлетворяют условию (21), то они удовлетворяют и этому условию.

С другой стороны, если выполнены условия (28), то выполнены и условия (19), а тем самым и условия (21). Это значит, что

$$\xi(X^k) = \xi\left([\xi(x),\ X^{k-1}]\right) = 0$$

и связность допустима.

Мы доказали следующий результат: если группа автоморфизмов одномерная, то ξ — связности это те и только те инвариантные аффинные связности на группе Ли $\mathfrak{G}$, которые представимы в виде (16) и инварианты относительно группы автоморфизмов.

То, что в общем случае это не верно, можно легко увидеть на вышеуказанном примере 2), когда алгебра Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ распадается на прямую сумму своих идеалов.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. М. Васильеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Вильнюский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
17.IV.1968

Литература

1. Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, „Мир", Москва, 1967.
2. А. М. Васильев, Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах, Известия высших учебных заведений, Математика, 1959, № 9.
3. Р. В. Восилюс, К теории инвариантных аффинных связностей на группе Ли, Лит. мат. сб. VII, № 1 (1967), 29–34.
4. Ж. Дьедоне, Основы современного анализа, „Мир", Москва, 1964.
5. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, „Мир", Москва, 1964.
6. М. Холл, Теория групп, ИИЛ, Москва, 1962.
7. К. Шевалле, Теория групп Ли, т. 3, ИИЛ, Москва, 1958.

APIE VIENĄ INVARIANTINIŲ AFININIŲ SĄRYŠIŲ LI GRUPĖJE KLASĘ

R. VOSYLIUS

(Reziumė)

Darbe yra nagrinėjami invariantiniai afininiai sąryšiai Li grupėje $\mathfrak{G}$. Išskiriami tie sąryšiai, kurių geodezinės linijos yra grupės $\mathfrak{C}$ normalinio išplėtimo Γ vienparametrinių pogrupių trajektorijomis. Gautos būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad tokie sąryšiai grupėje $\mathfrak{C}$ egzistuotų.

ÜBER EINE KLASSE DER INVARIANTISCHEN AFFINISCHEN ZUSAMMENHÄNGE AUF EINER LIE GRUPPE

R. VOSYLIUS

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden invariante affine Zusammenhänge auf einer Lies Gruppe $\mathfrak{C}$ untersucht. Es werden die Zusammenhänge abgesondert, deren geodatische Linien die Trajektorien von einparametrischen Untergruppen einer Normalprodukt Γ der Gruppe $\mathfrak{C}$ sind. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen der Existenz solcher Zusammenhänge erhalten.