1968

УДК — 519.21

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ ОВАЛА ДО ЕГО КОНТУРА

Э. ГЯЧЯУСКАС

Рассмотрим задачу, которая была сформулирована в работе [1]. Надо найти функцию распределения расстояния от случайной внутренней точки овала (выпуклой фигуры на плоскости) до случайной точки на его контуре.

Предполагаем, что внутренняя точка распределена в овале равномерно, а относительно точки на контуре предположим: в модели I, что точка на контуре распределена равномерно; в модели II, что все направления от внутренней точки к точке на контуре одинаково возможны.

Теорема 1. *Функция распределения расстояния r от случайной внутренней точки до контура овала, при первой модели, равна*

$$P\{r \leqslant x\} = \frac{1}{F} \int_0^x x\,\Theta(x)\,dx,$$

где F — площадь овала, $\theta(x)$ — среднее значение $\theta(x, s)$, т.е., суммы углов всех заключенных внутри овала секторов круга радиуса x с центром в точке на контуре овала.

Доказательство. Плотность функции распределения расстояния от фиксированной точки s на контуре овала до внутренней случайной точки равна

$$p(x, s) = \frac{x\,\Theta(x, s)}{F}$$

по аналогии со случаем круга, данным в [2], стр. 42.

Так как точка s распределена на контуре равномерно, то взяв среднее значение по всем точкам контура получим плотность искомой функции распределения $p(x) = \dfrac{x\,\Theta(x)}{F}$.

Тогда

$$P\{r \leqslant x\} = \frac{1}{F} \int_0^x x\,\Theta(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Пример. В случае круга радиуса R известно, что $\Theta(x) = 2\arccos \dfrac{x}{2R}$. Тогда

$$P\{r \leqslant x\} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^x x \arccos \frac{x}{2R}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{2x^2 - 4R^2}{4} \arccos \frac{x}{2R} - \frac{x}{4}\sqrt{4R^2 - x^2} + \frac{\pi R^2}{2}\right] =$$

$$= 1 + \frac{x^2 - 2R^2}{\pi R^2} \arccos \frac{x}{2R} - \frac{x}{2\pi R^2}\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Математическое ожидание расстояния r равно

$$E(r)=\frac{1}{F}\int\limits_0^{2R} x^2\,\Theta(x)\,dx=\frac{2}{\pi R^2}\int\limits_0^{2R} x^2\arccos\frac{x}{2R}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{2R}-\frac{1}{9}(x^2+8R^2)\sqrt{4R^2-x^2}\right]_0^{2R}=$$

$$=\frac{32R}{9\pi}\qquad \left(E(r)>R\right).$$

Теорема 2. *Функция распределения расстояния r от случайной внутренней точки до контура овала, при второй модели, равна*

$$P\{r<x\}=1-\frac{1}{2\pi F}\int\limits_{\sigma\geqslant x}(\sigma-x)\,d\vec{G},$$

где F — площадь овала, σ — хорда отсекаемая овалом на прямой G, $d\vec{G}$ — плотность множества ориентированных прямых.

Доказательство.

$$P\{r<x\}=1-\frac{\mu\{r\geqslant x\}}{\mu\{r\geqslant 0\}},$$

где $\mu\{r\geqslant x\}$ — кинематическая мера множества отрезков длины $l\,/\,l>D\,/$, имеющих внутри овала часть конца длиною $r\geqslant x(0\leqslant x\leqslant D)$, D — наибольшая хорда овала.

$$\mu\{r\geqslant x\}=\int\limits_{\substack{l\in G\\ r\geqslant x}} d\vec{G}\,dt=\int\limits_{\sigma\geqslant x}(\sigma-x)\,d\vec{G} \qquad \text{(см. [3], стр. 35)},$$

$$\mu\{r\geqslant 0\}=\int\limits_{\sigma\geqslant 0}\sigma d\vec{G}=2\pi F,$$

$$P\{r<x\}=1-\frac{1}{2\pi F}\int\limits_{\sigma\geqslant 0}(\sigma-x)\,d\vec{G}.$$

Теорема доказана.

Пример. Для круга радиуса R получаем следующее выражение

$$P\{r<x\}=1-\frac{1}{2\pi^2R^2}\int\limits_{2\sqrt{R^2-p^2}\geqslant x}(2\sqrt{R^2-p^2}-x)\,dp\,d\varphi=$$

$$=1-\frac{2}{\pi R^2}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}}(2\sqrt{R^2-p^2}-x)dp=$$

$$=1-\frac{2}{\pi R^2}\left[p\sqrt{R^2-p^2}+R^2\arcsin\frac{p}{R}-xp\right]_0^{\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}}=$$

$$=1-\frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}+R^2\arcsin\frac{\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}}{R}-x\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}\right]=$$

$$=1-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{x}{2R}+\frac{x}{2\pi R^2}\sqrt{4R^2-x^2}.$$

Математическое ожидание равно

$$E(r)=\int\limits_0^{2R} x\,dP(x)=[xP(x)]_0^{2R}-\int\limits_0^{2R} P(x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{2}{\pi}\,x\arccos\frac{x}{2R}-\frac{2}{\pi}\sqrt{4R^2-x^2}+\frac{1}{2\pi R^2}\,\frac{\sqrt{(4R^2-x^2)^3}}{3}\right]_0^{2R}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot 2R-\frac{1}{2\pi R^2}\cdot\frac{8R^3}{3}=\frac{8R}{3\pi}\ \left(E(r)<R\right).$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
11.VI.1968

Литература

1. M. Horowitz, Probability of random paths across elementary geometrical shapes, J. Appl. Prob., 2, 1965, 169—177.
2. M. G. Kendall, P. A. P. Moran, Geometrical probability, London, 1963.
3. Л. Сантало, Введение в интегральную геометрию, Москва, 1956.

ATSTUMO NUO OVALO VIDAUS TAŠKO IKI JO KONTŪRO PASISKIRSTYMAS

E. GEČIAUSKAS

(Reziumė)

Randama atstumo nuo atsitiktinio vidinio ovalo taško iki jo kontūro taško pasiskirstymo funkcija. Vidaus taškas ovale pasiskirstęs tolygiai.

Nagrinėjami du modeliai: 1) taškas tolygiai pasiskirstęs ant kontūro, 2) visos kryptys nuo vidinio taško link kontūro vienodai galimos.

THE DISTRIBUTION OF A DISTANCE FROM INSIDE POINT OF OVAL TO ITS CONTOUR

E. GEČIAUSKAS

(Summary)

The distribution function of a distance between random inside point of oval and random point on its contour is found. Inside point is distributed in oval uniformly.

Two models are considered: 1) the point on the contour distributed uniformly, 2) all directions from inside point to contour are equally possible.