VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК — 517.521.8

О НЕПРОДОЛЖАЕМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Е. ДАГЕНЕ

Хорошо известны результаты Островского о продолжении функции $g(z)$, представимой рядом

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \tag{0.1}$$

где $0<\lambda_0<\lambda_1< \ldots <\lambda_n \uparrow \infty$, сходящимся в круге $|z|<R$. Из результатов Островского следует, что при условии Адамара

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\theta\lambda_{n+1}, \quad 0<\theta<1, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{0.2}$$

продолжение функции $g(z)$ невозможно ни по какому направлению во вне окружности $|z|=R$, т.е. окружность круга сходимости есть естественная граница для ряда (0.1). Аналогичные результаты существуют и для рядов Дирихле.

В нашей заметке мы показываем, что накладывая дополнительные условия на рост ряда Дирихле

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad \lambda_n>\lambda_{n-1}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{0.3}$$

сходящегося в полуплоскости $x<0$, для непродолжимости функции (0.3) в полуплоскость $x>0$ условие Адамара (0.2) можно ослабить.

Соответствующий результат будет сформулирован в п. 2. В п. 1 будут приведены определения некоторых понятий, нужных для изложения содержания теоремы.

1. Приведем сначала несколько понятий, которые нам будут нужны. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

с $0<\lambda_1<\lambda_2< \ldots <\lambda_n \uparrow \infty$ абсолютно сходящийся в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z=x<0$ ряд Дирихле. Число

$$\mu(x)=\max_n |a_n| e^{\lambda_n x}$$

мы называем максимальным членом. Этот максимум достигается при одном или нескольких значениях n. Наибольшее из этих значений обозначаем $\nu(x)$

и называем центральным индексом, $\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ — центральным показателем, т.е.

$$\mu(x)=|a_{\nu(x)}|\,e^{\lambda(x)x}.$$

Порядком функции $f(z)$* мы называем число ρ:

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho,$$

где

$$S(x,f)=\sup_{-\infty<y<+\infty}|f(x+iy)|.$$

2. Сформулируем нашу теорему.

Теорема. *Пусть $f(z)$ представима рядом Дирихле:*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n z}, \tag{2.1}$$

где $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n\uparrow\infty$, сходящимся при $\operatorname{Re}z=x<0$.

Пусть, далее,

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>0 \tag{2.2}$$

и

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta},\qquad \frac{2}{\rho}<\delta,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2.3}$$

В этих условиях на некотором множестве точек интервала $-1<x<0$ бесконечной логарифмической меры верно соотношение

$$f(z)=\bigl(1+o(1)\bigr)\,a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}. \tag{2.4}$$

Замечание. Из (2.4) следует, что в условиях теоремы функцию (2.1) нельзя продолжить в полуплоскость $x>0$. При $\rho>4$ условие (2.3) можно заменить неравенствами:

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta},\qquad \frac{2}{\rho}<\delta<\frac{1}{2},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Последнее условие слабее требования Островского (0.2).

3. Вначале приведем несколько предложений, которые будут нам нужны при доказательстве теоремы.

Лемма 1. $\ln\mu(x)$ *есть выпуклая функция от x. В частности:*

$$\lambda(x)h\leqslant\ln\mu(x+h)-\ln\mu(x)\leqslant\lambda(x+h)\,h. \tag{3.1}$$

---

* В случае целых функций аналогичным образом с очевидной модификацией определенный порядок часто называется порядком в смысле Ритта.

Лемма 2. *Если*

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\ \frac{\ln\ln S(x,\ f)}{\ln\dfrac{1}{|x|}}=\rho,$$

то и

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\ \frac{\ln\ln\mu(x)}{\ln\dfrac{1}{|x|}}=\rho,\qquad x\notin E,$$

где E некоторая совокупность интервалов множества $(-1,0)$ конечной логарифмической меры, т.е. $\int\limits_{n}\frac{dt}{t}<\infty$.

Доказательство этих двух предложений имеются в [4].

Лемма 3. (см. [3]). *Пусть $u(x)>0$ — неубывающая и непрерывная справа функция на полусегменте $-1\leqslant x<0$ и* $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=\infty$.

Пусть, далее, $\varphi(t)>0$ — убывающая и непрерывная на полуоси $t>0$ функция, причем

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\,dt<\infty.$$

Тогда вне некоторого множества интервалов E полусегмента $(-1,0)$ конечной логоритмической меры справедливо неправенство:

$$u(x+\tau)-u(x)<1,$$

где $\quad\tau\leqslant|x|\varphi[u(x)]$.

4. Доказательство теоремы. Нас интересует поведение функции $f(z)$ при $x\to 0$, поэтому ограничимся интервалом $(-1,\ 0)$.

Перепишем ряд (2.1) в виде:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\nu(x)-1}a_ne^{\lambda_nz}+a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}+\sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty}a_ne^{\lambda_nz}=\sigma_2+a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}+\sigma_1.$$

Оценим σ_1 и σ_2. По неравенству (3.1) имеем:

$$\mu(x+h)\leqslant\mu(x)e^{\lambda(x+h)h},$$

а по (2.3) –

$$\lambda_{\nu(x)+j}>\lambda(x)+j\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)\ \left(\lambda(x)=\lambda_{\nu(x)}\right).$$

Значит,

$$|\sigma_1|\leqslant\sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty}|a_n|e^{\lambda_nx}=\sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty}|a_n|e^{\lambda_n(x+h)}e^{-\lambda_nh}\leqslant$$

$$\leqslant\mu(x+h)\sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty}e^{-\lambda_nh}<\mu(x)e^{[\lambda(x+h)-\lambda(x)]h}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-jh\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)}=$$

$$=\mu(x)e^{[\lambda(x+h)-\lambda(x)]h}\frac{e^{-h\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)}}{1-e^{-h\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)}}=$$

$$=\mu(x)e^{[\lambda(x+h)-\lambda(x)]h}\frac{1}{e^{h\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)}-1};\tag{4.1}$$

и

$$|\sigma_2| \leqslant \sum_{n=1}^{\nu(x)-1} |a_n| e^{\lambda_n x} \leqslant \mu(x-h) \sum_{n=1}^{\nu(x)-1} e^{\lambda_n h} <$$

$$< \mu(x) e^{-h\lambda(x-h)} \sum_{n=1}^{\nu(x)-1} e^{\lambda_{\nu(x)-1} h} =$$

$$= \mu(x) e^{[\lambda(x)-\lambda(x-h)]h} e^{[\lambda_{\nu(x)-1}-\lambda(x)]h} \left(\nu(x)-1\right) <$$

$$< \mu(x) e^{[\lambda(x)-\lambda(x-h)]h} e^{-\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)h} \left(\nu(x)-1\right). \tag{4.2}$$

Заметив, что

$$\lambda_n > \lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{2}+\delta} > \lambda_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\lambda_1 + j\lambda_1^{\frac{1}{2}+\delta}\right) =$$

$$= n\lambda_1 + \frac{(n-1)n}{2} \lambda_1^{\frac{1}{2}+\delta} > C_0 \frac{n^2}{2}, \qquad C_0 = \text{const},$$

из неравенства (4.2) теперь выводим ($C_1 = \text{const}$):

$$|\sigma_2| < C_1 \mu(x) e^{[\lambda(x)-\lambda(x-h)]h} e^{-\lambda^{\frac{1}{2}+\delta}(x)h} \sqrt{\lambda(x)}. \tag{4.3}$$

Функция $\lambda(x)$ — неубывающая с $\lim\limits_{x\to 0} \lambda(x) = \infty$, ступенчатая и непрерывная справа. Следовательно $\lambda(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Применив ее к функции

$$u(x) = \lambda^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}(x),$$

полагая

$$\varphi(t) = \frac{1}{t \ln^{1+\alpha} t}, \qquad 0 < \alpha = \text{const},$$

находим, что при

$$\tau \leqslant \frac{|x|}{\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}(x) \ln^{1+\alpha} \lambda(x)} \tag{4.4}$$

имеет место неравенство

$$\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}(x+\tau) - \lambda^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}(x) < 1, \qquad x \notin E_0$$

($E_0 = E_0(\alpha)$ — некоторое множество интервалов отрезка $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры). В соответствии с теоремой Лагранжа о конечных приращениях, отсюда получаем:

$$\lambda(x+\tau) - \lambda(x) < 2\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}(x+\tau), \qquad x \notin E_0. \tag{4.5}$$

Таким образом при $x > x_0$ и указанных неравенством (4.4) τ

$$\lambda(x) > \frac{1}{2} \lambda(x+\tau),$$

если только $x \notin E_1$, где E_1 — некоторое множество интервалов из $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры, и в согласии с (4.5)

$$\lambda(x+\tau)-\lambda(x)<4\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}(x), \qquad x>x_0, \quad x \notin E_2.$$

5. Вернемся к неравенствам (4.1) и (4.3). Положим:

$$h=\frac{|x|}{\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}(x)\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}.$$

Тогда

$$|\sigma_1|<\mu(x)\,e^{\frac{|x|\lambda^{-\delta}(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}\frac{1}{e^{\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}-1}, \qquad x \notin E_2. \tag{5.1}$$

и

$$|\sigma_2|<\mu(x)\,e^{\frac{|x|}{\lambda^{\delta}(x)\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}\frac{C_1}{e^{\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}-\frac{1}{2}\ln\lambda x}}=$$

$$=\mu(x)\,e^{\frac{|x|}{\lambda^{\delta}(x)\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}\frac{C_1}{e^{\ln\lambda(x)\left[\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{2+\alpha}\lambda(x)}-\frac{1}{2}\right]}}, \quad x \notin E_2, \tag{5.2}$$

где E_2 — некоторое множество интервалов из $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры. Воспользуемся теперь условием (2.2):

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln S(x, f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>0, \tag{2.2}$$

которое в силу леммы 2 эквивалентно условию

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln\mu(x, f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>0, \qquad x \notin E$$

E — множество интервалов из $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры. Следовательно, существует последовательность точек $\{x_j\}$ $x_j \uparrow 0$, на которой при $j>j_0$ верно неравенство:

$$\ln\mu(x_j)>\left(\frac{1}{|x_j|}\right)^{\rho'}, \qquad 0<\rho'<\rho. \tag{5.3}$$

Из выпуклости функции $\ln\mu(x)$ по x вытекает, что

$$\ln\mu(x)-\ln\mu(x_0)\leqslant\lambda(x)(x-x_0)<\lambda(x),$$

т.е.

$$\ln\mu(x)<\lambda(x)\left(1-\frac{\ln\mu(x_0)}{\ln\mu(x)}\right)<2\lambda(x), \tag{5.4}$$

если только $|x|$ достаточно малы. (5.4) вместе с (5.3) дает нам теперь:

$$2\lambda(x_j) > \left(\frac{1}{|x_j|}\right)^{\rho'}$$

при $j>j_0$ при достаточно большом j_0. Или

$$|x_j| > [2\lambda(x_j)]^{-\frac{1}{\rho'}}.$$

Нетрудно показать (см [4]), что неравенство:

$$\frac{\ln[2\lambda(x)]}{\ln\frac{1}{|x|}} > \frac{\ln\ln\mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} > \rho'$$

а, следовательно, и неравенство

$$|x| > [2\lambda(x)]^{-\frac{1}{\rho'}} \tag{5.5}$$

имеет место не только в точках последовательности $\{x_j\}$ $x_j \uparrow 0$, но и на множестве F_1 интервала $(-1, 0)$ бесконечной логарифмической меры. На основании (5.5) имеем $\left(\text{если } \frac{\delta}{2} > \frac{1}{\rho'} > \frac{1}{\rho}\right)$:

$$\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{2+\alpha}\lambda(x)} > \frac{2^{-\frac{1}{\rho'}}\lambda^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{\rho'}}(x)}{\ln^{2+\alpha}\lambda(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty, \qquad x \notin F_1.$$

Последнее соотношение показывает, что для любого сколь угодно большого $N>0$, существует множество F_2 интервала $(-1,0)$ бесконечной логарифмической меры, на котором справедливо неравенство

$$|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x) > N\ln^{2+\alpha}\lambda(x), \tag{5.6}$$

а затем существует и множество F бесконечной логарифмической меры, на котором верны неравенства (5.1), (5.2), (5.6), а, следовательно, и соотношения:

$$\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{2+\alpha}\lambda(x)} - \frac{1}{2} > N - \frac{1}{2} > 0 \tag{5.7}$$

и

$$\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} > \frac{N\ln^{2+\alpha}\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty. \tag{5.8}$$

Так как

$$\mu(x) = |a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}|,$$

то (5.1) и (5.2) с учетом (5.7) и (5.8) дают нам теперь:

$$\left|\frac{\sigma_2+\sigma_1}{a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}}\right| < e^{\frac{|x|}{\lambda^{\delta}(x)\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}} \times$$

$$\times\left[2e^{-\ln\lambda(x)\left(\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{2+\alpha}\lambda(x)}-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{e^{\frac{|x|\lambda^{\frac{\delta}{2}}(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}-1}\right] \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \qquad x \notin F.$$

Итак ($x \in F$),

$$f(z)=\sigma_1+\sigma_2+a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}=$$
$$=a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}\left(1+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}}\right)=\Big(1+o(1)\Big)\,a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z},$$

что и требовалось доказать.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
1968.II.28.

Литература

1. Ш. Стрелиц, Асимптотические свойства функции, аналитической в полуплоскости, Лит. мат. сб., VIII, № 2, (1968), 297—316.
2. P. Dienes, The Taylor series, Oxford 1931, p. 352—383.
3. Е. Дагене, Асимптотические свойства функции, аналитической в полуплоскости. Лит. мат. сб., VIII, № 2, (1968), 243—264.
4. Е. Дагене, О центральном показателе ряда Дирихле, Лит. мат. сб. VIII, № 3 (1968), 503—522,
5. А. И. Маркушевич, Аналитические функции, М., 1957.

APIE DIRICHLE EILUČIŲ NEPRATĘSIAMUMĄ

E. DAGIENĖ

(Reziumė)

Sakysime,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n z}\quad(0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow\infty)\tag{1}$$

yra absoliučiai konverguojanti pusplokštumėje $x<0$ Dirichle eilutė. Skaičius

$$\mu(x)=\max_n|a_n|e^{\lambda_n x}$$

yra vadinamas maksimaliniu nariu. Didžiausia reikšmė n, prie kurios pasiekiamas maksimumas, $\nu(x)$ vadinama centriniu indeksu, o $\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ — centriniu rodikliu.

Darbe įrodoma šitokia teorema.

Teorema. *Jeigu* (1) *Dirichle eilutė tenkina sąlygas:*

$$\varlimsup_{x\to 0}\frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>0\quad\left(S(x,f)=\sup_{-\infty<y<+\infty}|f(x+iy)|\right)$$

ir

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta},\quad\frac{2}{\rho}<\delta,\qquad n=1,2,3,\ldots,$$

tai tam tikroje intervalo (—1, 0) *begalinio logaritminio mato aibėje galioja priklausomybė:*

$$f(z)=\Big(1+o(1)\Big)\,a_{\nu(x)}e^{\lambda(x)z}.$$

ON NONEXTENDILLITY OF SERIES DIRICHLET

E. DAGIENĖ

(Summary)

Let

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\lambda_n\uparrow\infty) \tag{1}$$

be the Dirichlet series converging absolutely in the half-plane $x<0$. The number

$$\mu(x)=\max_n |a_n| e^{\lambda_n x}$$

is called the maximum term. The greatest of the n under which the $\mu(x)$ is achieved is called the central index and denote $\nu(x)$. $\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ is called the central power.

The following theorem is proved.

Theorem. *Let Dirichlet series* (1) *satisfy the conditions*

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln S(x, f)}{\ln\dfrac{1}{|x|}}=\rho>0 \quad \left(S(x, f)=\sup_{-\infty<y<+\infty} |f(x+iy)|\right)$$

and

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta}, \quad \frac{2}{\rho}<\delta, \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

Then in the interval $(-1, 0)$ *there exists the set of infinite logarithmic measure, in which the relation*

$$f(z)=\left(1+o(1)\right) a_{\nu(x)} e^{\lambda(x) z}$$

is satisfied.