VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК – 513.836

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КАТЕГОРИЙ МИКРОПУЧКОВ

А. МАТУЗЯВИЧЮС

§1. Категория G — микропучков

1. Понятие категопии. Изложение материала мы будем проводить на языке категорий, так как такое изложение выделяет некоторые общие свойства определенного множества объектов и их отображений, а также упрощает формулировки предложений. Поэтому в начале работы мы коротко напомним определение категории и другие смежные понятия.

Категорией называется такой набор объектов $\{X, Y, Z, \ldots\}$, когда для двух объектов X, Y задано множество $\mathrm{Hom}(X, Y)$, элементы которого называются *морфизмами* (или гомоморфизмами) объекта X в Y. Вместо $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ часто пишут $f: X \to Y$. Для любых трех объектов X, Y, Z определено отображение

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z),$$

которое обозначается $(f^\circ g) \to g^\circ f$ и называется композицией морфизмов.

При этом должны выполняться следующие аксиомы:

1. Множества $\mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\mathrm{Hom}(X', Y')$ пересекаются только тогда, когда $X = X'$ и $Y = Y'$; в этом случае они совпадают.
2. В каждом множестве $\mathrm{Hom}(X, X)$ содержится элемент id_x, который действует как левая и правая единица относительно композиции.
3. Композиция морфизмов ассоциативна.

Морфизм $f: X \to Y$, заданный в любой категории, мы назовем *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $g: Y \to X$, что $f \circ g = id_Y$ и $g \circ f = id_X$.

Мы здесь перечислим только те примеры категорий, с которыми придется встречаться.

Категория множеств. Объекты – все множества, морфизмы – все отображения одного множества в другое.

Категория топологических пространств. Объекты – все топологические пространства, морфизмы – все непрерывные отображения одного пространства в другое.

Категория групп. Объекты – все группы, морфизмы – все гомоморфизмы групп. Абелевы группы образуют также категорию.

Категория пучков. Объекты – все пучки векторных пространств, морфизмы – все отображения одного пучка в другое.

Категория микропучков. Объекты – все микропучки, морфизмы – все отображения одного микропучка в другое.

Категория G-микропучков. Объекты – все G-микропучки, морфизмы – все G – отображения одного G-микропучка в другое.

Эти категории будем коротко обозначать греческими буквами соответствено Λ, Σ, Γ, Φ, Ψ, Ψ_G.

В этой работе мы будем заниматься последними двумя категориями. Для их определения нам нужны еще две категории: категория кусочно-линейных пространств Σ_{PL} и категория G-пространств Σ_G.

Объектами категории *кусочно-линейных пространств* Σ_{PL} являются PL – пространства, т.е. топологические пространства, имеющие согласованные системы локально конечных подразделений; морфизмами являются PL – отображения $f: B \to E$ PL–пространств B в E, т.е. непрерывные отображения, которые любой симплекс подразделенного пространства B линейно переводят в симплекс пространства E.

Пусть G-топологическая группа. *G-пространством* является топологическое пространство B на которое непрерывно действует группа G, т.е. имеет место непрерывное отображение $G \times B \to B$, удовлетворяющее условие ассоциативности $q_1(q_2 b)=(q_1 q_2) b$, $q_1, q_2 \in G$ и $b \in B$. *G-отображением* G-пространства B в G-пространство E называется непрерывное отображение $f: B \to E$, которое согласовано с действием группы G, т.е. $f(q, b)=q f(b)$, где $q \in G$, $b \in B$.

Определим здесь *категорию G-пространств* Σ_G. Ее объектами являются G-пространства, а морфизмами – G-отображения этих G-пространств.

Теперь имеем возможность дать более подробные определения категорий микропучков Ψ и G-микропучков Ψ_G.

2. Категория микропучков Ψ. Пусть имеем категорию пучков Φ. Объектами этой категории являются векторные пучки $\varphi(E, B, p)$, только здесь пространства и отображения являются соответственно объектами и морфизмами категории Σ или Σ_{PL}. Нулевую секущую поверхность в этих пучках мы обозначим s.

Два пучка $\varphi_1(E_1, B, p_1)$ и $\varphi_2(E_2, B, p_2)$ будем называть *микросовпадающими*, если $s_1(B)=S_2(B)$ и для $s_i(B)$ $(i=1, 2)$ существует такая общая окрестность V в пространствах E_1, E_2, чтобы $p_{1/V}=p_{2/V}$. Пусть U_1 и U_2 любые окрестности пространства B. Два пучка φ_{1/U_1}, и φ_{2/U_2} *микросогласованы* над $U=U_1 \cap U_2$, если они являются микросовпадающими над U.

Возьмем открытое покрытие пространства $B=\cup_j U_j$. *Микропучком* над B будем называть такое множество $\{\varphi_i\}$ пучков φ_j над U_j, чтобы любые два пучка из этого множества были бы микросогласованными. Его обозначим Ψ.

Примеры и определение отображения двух микропучков приводится в работе [4].

Таким образом, получаем категорию микропучков Ψ. Объектами этой категории являются микропучки, а морфизмами их отображения.

3. Категория G-микропучков Ψ_G. *G-микропучек* представляет собой микропучек $\psi(E, B, i, j)$, где E и B являются G-пространствами, а i и j – G отображениями, а также любой элемент $q \in G$ линейно отображает слой в слой, т.е. $q: E_b \to E_{q(b)}$. G-микропучек будем обозначать ψ_G. *G-отображением* G-микропучка $\psi'_G(E', B', i', j')$ в G-микропучек $\psi_G(E, B, i, j)$ называется отображение микропучков $f:\psi'\to\psi$, где $f=(f_{E'},f_{B'})$ и оба отображения $f_{E'}$ и $f_{B'}$ являются G-отображениями.

Теперь убедимся, что получаем новую категорию Ψ_G, объектами которой являются G-микропучки, а морфизмами G-отображения этих G-микропучков.

Предложение 1.1. Для G-микропучка $\Psi_G(E, B, i, j)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
G\times B \arrow[r, "\bar i"] \arrow[d, "g_B"'] & G\times E \arrow[r, "\bar j"] \arrow[d, "g_E"'] & G\times B \arrow[d, "g_B"'] \\
B \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "j"] & B
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Отображения q_B, q_E, $\bar i$, $\bar j$ определяются формулами $q_B(q, b)=qb$, $q_E(q, e)=qe$, $\bar i(q, b)=(q, i(b))$, $\bar j(q, e)=(q, j(e))$, где $q\in G$, $b\in B$, $e\in E$.

Действительно, так как i является G-отображением имеем равенство $qi(b)=iq(b)$. Тогда получаем

$$q_E\cdot\bar i(q,\ b)=q_E\big(q,\ i(b)\big)=qi(b)=iq(b)=iq_B(q,\ b).$$

Итак, коммутативность в первом квадрате имеет место. Коммутативность во втором квадрате показывается аналогично.

Замечание. Микропучек является G-микропучком тогда и только тогда, когда имеет место коммутативная диаграмма (1).

Предложение 1. 2. Для G-отображения G-микропоучка $\psi'_G(E', B', i', j')$ в G-микропучке $\psi_G(E, B, i, j)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
& G\times B' \arrow[rr, "\bar i'"] \arrow[dl, "g_{B'}"'] \arrow[dd, "\bar f_{B'}" near start] & & G\times E' \arrow[rr, "\bar j'"] \arrow[dl, "g_{E'}"'] \arrow[dd, "\bar f_{E'}" near start] & & G\times B' \arrow[dl, "g_{B'}"'] \arrow[dd, "\bar f_{B'}"] \\
B' \arrow[rr, "i'" near start, crossing over] \arrow[dd, "f_{B'}"'] & & E' \arrow[rr, "j'" near start, crossing over] & & B' & \\
& G\times B \arrow[rr, dashed, "\bar i" near start] \arrow[dl, dashed, "g_B"] & & G\times E \arrow[rr, dashed, "\bar j" near start] \arrow[dl, dashed, "g_E"] & & G\times B \arrow[dl, "g_B"] \\
B \arrow[rr, "i"] & & E \arrow[rr, "j"] \arrow[from=uu, crossing over, "f_{E'}"' near end] & & B \arrow[from=uu, crossing over, "f_B"' near end] &
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

В самом деле, коммутативность диаграммы в „горизонтальных квадратах“ следует из предложения 1.1. Остается показать коммутативность в „вертикальных квадратах“. Проверим коммутативность в двух вертикальных квадратах.

Отображения в диаграмме (2) определяются естественными формулами. Например,

$$\bar{f}_{B'}(q,\ b')=\left(q,\ f_{B'}(b')\right),\quad \bar{f}_{E'}(q,\ e')=\left(q,\ f_{E'}(e')\right),$$

$$\bar{i}'(q,b')=\left(q,\ i'(b')\right)\ \text{и т.д., где } b'\in B',\ e'\in E',\ q\in G.$$

Тогда

$$f_{B'}q_{B'}(q,\ b')=f_{B'}(qb')=qf_{B'}(b')=q_B\left(q,\ f_{B'}(b')\right)=q_B\bar{f}_{B'}(q,\ b').$$

Таким образом, получаем равенство $f_{B'}q_{B'}=q_B\bar{f}_{B'}$.

Далее имеем

$$\bar{i}\bar{f}_{B'}(q,\ b')=\bar{i}\left(q,\ f_{B'}(b')\right)=\left(q,\ if_{B'}(b')\right),$$

$$\bar{f}_{E'}\bar{i}'(q,\ b')=\bar{f}_{E'}\left(q,\ i'(b')\right)=\left(q,\ f_{E'}i'(b')\right).$$

Так как по определению отображения $f=(f_{E'},f_{B'})$ микропучка ψ' в микропучок ψ имеем $if_{B'}(b')=f_{E'}i'(b')$, то и в этом случае получаем равенство $\bar{i}\bar{f}_{B'}=\bar{f}_{E'}\bar{i}'$.

Коммутативность в других горизонтальных квадратах проверяется аналогично.

Замечание. Когда $B=B'$ получается частный случай. Тогда

$$f_{B'}=id_B\quad \text{и}\quad \bar{f}_{B'}=id_{G\times B}.$$

Теперь можем превратить множество всех G-микропучков в категорию Ψ_G. Для этого очевидным образом определим композицию двух G-отображений G-микропучков. Легко себе представить коммутативную диаграмму (2) двухэтажной.

Из этого следует, что композиция двух G-отображений G-микропучков также является G-отображением. При этом аксиомы категории выполняются. Таким образом, получаем категорию Ψ_G.

Рассмотрим два частных случая G-микропучков.

В первом случае, когда группа G состоит только из одного элемента, тогда любое пространство является G-пространством, любое отображение этих пространств – G-отображением и, таким образом, любой микропучек будет G-микропучком. В этом случае получаем $\psi_G=\psi$. В другом случае, когда база B микропучка состоит только из одной точки, тогда B будет G-пространством для любой группы G и любой G-микропучек (конечной размерности) является пространством представлений группы G.

4. Индуцированный G-микропучек. Пусть $\psi(E,B,i,j)$ есть G-микропучек и $f_{B'}:B'\to B$ морфизм категории Σ_G или $\Sigma_{G,PL}$. Тогда обычным образом индуцируются микропучек $\psi'(E',B',i',j')$ и отображение микропучков $f:\psi'\to\psi$.

Тогда имеет место предложение.

Предложение 1.3. Микропучек ψ' и отображение $f=(f_{E'}f_{B'})$ являются соответственно объектом и морфизмом категории Ψ_G.

Для доказательства этого предложения нам очевидно достаточно определить все те отображения диаграммы (2), которых мы не имеем, а также показать коммутативность диаграммы с этими отображениями.

Отображение $q_{E'} : G\times E'\to E'$ определим по формуле

$$q_{E'}\big(q,\ (b',\ e)\big)=(qb',\ qe),\quad \text{где}\quad b'\in B',\quad e\in E,\ q\in G.$$

Теперь проверим коммутативность диаграммы (2) в „горизонтальном верхнем левом квадрате".

Напомним определения инъекции и проекции индуцированного микропучка, которые в дальнейшем будем использовать. Как известно, они определяются соответственно формулами

$$i'(b')=\big(b',\ if_{B'}(b')\big),\quad j'(b',\ e)=b'.$$

Таким образом, с одной стороны, имеем

$$i'\,q_{B'}(q,\ b')=i'(qb')=\big(qb',\ if_{B'}(qb')\big),$$

а с другой стороны

$$q_{E'}\ \bar{i}'(q,\ b')=q_{E'}\big(q,\ i'(b')\big)=q_{E'}\big(b',\ if_{B'}(b')\big)=\big(qb',\ qif_{B'}(b')\big)=$$

$$=\big(qb',\ iqf_{B'}(b')\big)=\big(qb',\ if_{B'}(qb)\big).$$

Здесь можно коммутировать с отображениями i и $f_{B'}$, так как оба они являются G-отображениями. Итак, $i'q_{B'}=q_{E'}\bar{i}'$.

Еще покажем коммутативность диаграммы (2) в горизонтальном верхнем правом квадрате.

Так как любой e' является пара $(b,\ e)$, для которой имеет место равенство $f_{B'}(b)=j(e)$, поэтому имеем

$$j'\,q_{E'}(q,\ e')=j'\,q_{E'}\big(q,\ (b,\ e)\big)=j'(qb,\ qe)=qb,$$

$$q_{B'}\bar{j}'(q,\ e')=q_{B'}\big(q,\ j'(e')\big)=q_{B'}\big(q,\ j'(b,\ e)\big)=q_{B'}(q,\ b)=qb.$$

Таким образом, $j'q_{E'}=q_{B'}\bar{j}'$.

Нетрудно проверяется коммутативность диаграммы (2) и в других квадратах.

§2. Функторы микропучков

1. Индуцированные G-микропучки. Пусть группа G действует без неподвижных точек на пространство B. Естественным образом получаем непрерывное отображение $B\xrightarrow{f_B}B/G$, где B/G есть пространство орбит.

Теперь возьмем любой микропучек $\psi\,(E,B/G,i,j)$ с базисным пространством B/G. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 2.1. Микропучком ψ и отображением f_B индуцированный микропучек $\psi'(E', B, i', j')$ является G-микропучком.

Для доказательства этого предложения нам очевидно достаточно определить отображение $q_{E'}$ и доказать для индуцированного микропучка ψ' коммутативность аналитичной диаграммы (1).

Как известно, пространство E' состоит из пар (b, e), $(b\in B, e\in E)$, для которых имеет место равенство $f_B(b)=j(e)$.

Таким образом, отображение $p_{E'}: G\times E'\to E'$ определим формулой $q_{E'}\big(q, (b, e)\big)=(qb, e)$. Диаграмма (1) коммутативна, так как

$$q_{E'}\bar{i}(q, b)=q_{E'}\big(q, i'(b)\big)=q_{E'}\big(q, b, if_B(b)\big)=\big(qb, if_B(b)\big),$$

$$i'q_B(q, b)=i'(qb)=\big(qb, if_B(qb)\big).$$

Из определения f_B следует $f_B(qb)=f_B(b)$. Поэтому $q_{E'}\bar{i}=i'q_B$.
Имеем также

$$q_B\bar{j}'(q, e')=q_B\big(q, j'(b, e')\big)=q_B(q, b)=qb,$$

$$jq_{E'}(q, e')=jq_{E'}\big(q, (b, e)\big)=j(qb, e)=qb.$$

Рассмотрим теперь два микропучка $\psi_1(E_1, B/G, i_1, j_1)$ и $\psi_2(E_2, B/G, i_2, j_2)$ над пространством B/G и отображение $f=(f_{E_1}, f_{B/G})$ микропучка ψ_1 в микропучек ψ_2. Тогда согласно предложению 2.1. микропучки ψ_1 и ψ_2 и отображение $B\xrightarrow{f_B} B/G$ индуцируют соответственно G-микропучки $\psi'_1(E'_1, B, i'_1, j'_1)$ и $\psi'_2(E'_2, B, i'_2, j'_2)$. Определим отображение $f=(f'_{E'_1}, f'_B)$ G-микропучка ψ'_1 в G-микропучек ψ'_2, а также отображение $\bar{f}_{E'_1}: G\times E'_1\to G\times E'_2$ соответственно по формулам

$$f_{E'_1}(b, e_1)=\big(b, f_{E_1}(e_1)\big),\quad f'_B=id_B,\quad \bar{f}_{E'_1}(q, e'_1)=\big(q, f'_{E'_1}(e'_1)\big).$$

Предложение 2.2. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& G\times E'_2 \arrow[rr, "q_{E'_2}"] \arrow[dd, dashed, shift left] & & E'_2 \arrow[rr, "f'_{E_2}"] \arrow[dd, dashed, shift left, "j'_2"] & & E_2 \arrow[dd, shift left, "j_2"] \\
G\times E'_1 \arrow[ur, "\bar{f}_{E'_1}"] \arrow[rr, "q_{E'_1}"] \arrow[dr, shift left] & & E'_1 \arrow[ur, "f_{E'_1}"] \arrow[rr, "f'_{E_1}"] \arrow[dr, shift left, "j'_1"] & & E_1 \arrow[ur, "f_{E_1}"] \arrow[dr, shift left, "j_1"] & \\
& G\times B \arrow[uu, dashed, shift left] \arrow[ul, shift left] \arrow[rr, "q_B"'] & & B \arrow[uu, dashed, shift left, "i'_2"] \arrow[ul, shift left, "i'_1"] \arrow[rr, "f_B"'] & & B/G \arrow[uu, shift left, "i_2"] \arrow[ul, shift left, "i_1"]
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Для доказательства коммутативности диаграммы (3) в силу предложения 2.1 нам достаточно проверить коммутативность в верхних квадратах, т.е. $f_{E_1}f_{E'_1}=f_{E'_2}f'_{E'_1}$ и $f'_{E'_1}q_{E'_1}=q_{E'_2}f'_{E'_1}$. Коммутативность в других квадратах следует из коммутативности диаграммы (2).

Так как пространство E_1' состоит из пар (b, e_1), то используя определения в соотношениях встречающихся отображений, получаем

$$f_{E_1} f_{E_1'}(b, e_1) = f_{E_1}(e_1) \quad f_{E_1'} f'_{E_1'}(b, e_1) = f_{E_1'}\left(b, f_{E_1}(e_1)\right) = f_{E_1}(e_1).$$

Далее также имеем

$$f'_{E_1'} q_{E_1'}(q, e_1') = f'_{E_1'} q_{E_1'}\left(q, (b, e_2)\right) = f'_{E_1'}(qb, e_1) = \left(qb, f_{E_1}(e_1)\right),$$

$$q_{E_1'} \bar{f}_{E_1'}(q, e_1') = q_{E_1'}\left(q, f'_{E_1'}(e_1')\right) = q_{E_1'}\left(q, f'_{E_1'}(b, e_1)\right) =$$

$$= q_{E_1'}\left(q, b, f_{E_1}(e_1)\right) = \left(qb, f_{E_1}(e_1)\right).$$

2. **Функторы.** Пусть Σ и Σ' произвольные категории. *Ковариантным функтором* из категории Σ в категорию Σ' называется отображение $T: \Sigma \to \Sigma'$, ставящее в соответствие каждому объекту X из Σ объект $T(X)$ из Σ' и каждому морфизму f: $X \to Y$ морфизм $T(f): T(X) \to T(Y)$ таким образом, что если для морфизмов f и q определена композиция, то $T(f \circ q) = T(f) \circ T(q)$ и для всех X выполнено равенство $T(id_X) \geqslant id_{T(X)}$. Контравариантный функтор определяется обращением стрелок (так что $T(f): T(Y) \to T(X)$ и $T(\psi \circ q) = T(q) \circ T(f)$.

Пусть Σ и Σ' две категории, T_1 и T_2 — два коваариантных функтора из Σ в Σ'. *Функторным морфизмом* p функтора T_1 в T_2 называется функция, которая каждому объекту $A \in \Sigma$ сопоставляет морфизм $p(A): T_1(A) \to T_2(A)$ таким образом, что для любого f: $A \to B$ из Σ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} T_1(A) \arrow[r, "T_1(f)"] \arrow[d, "p(A)"'] & T_1(B) \arrow[d, "p(B)"] \\ T_2(A) \arrow[r, "T_2(f)"] & T_2(B) \end{tikzcd} \tag{4}$$

Композиция функторных морфизмов $T_1 \to T_2$ и $T_2 \to T_3$ определяется очевидным образом.

Эквивалентностью категории Σ с категорией Σ' называется система (T_1, T_2, u, v), образованная ковариантными функторами $T_1: \Sigma \to \Sigma'$, $T_2: \Sigma' \to \Sigma$ и функторными морфизмами $u: 1_\Sigma \to T_2 T_1$, $v: 1_{\Sigma'} \to T_1 T_2$ (где 1_Σ, $1_{\Sigma'}$ суть тождественные функторы в Σ, соответственно в Σ') такими, что для всех $A \in \Sigma$ и $A' \in \Sigma'$ композиции морфизмов

$$\begin{gathered} T_1(A) \xrightarrow{T_1(u(A))} T_1 T_2 T_1(A) \xrightarrow{v^{-1}(T_1(A))} T_1(A) \\ T_2(A') \xrightarrow{T_2(v_2(A'))} T_2 T_1 T_2(A) \xrightarrow{u^{-1}(T_2(A'))} T_2(A') \end{gathered} \tag{5}$$

являются тождественными морфизмами объектов $T_1(A)$ и $T_2(A')$, соответственно. Две категории называются *эквивалентными*, если между ними существует эквивалентность.

3. Эквивалентность категорий Ψ_G и $\Psi_{(B/G)}$. В первом пункте этого параграфа мы рассмотрели две категории: категорию микропучков над B/G — $\Psi_{(B/G)}$ и категорию индуцированных (отображением $f_B: B \to B/G$) G-микропучков Ψ_G. Если любому микропучку $\psi \in \Psi_{(B/G)}$ сопоставим индуцированный G-микропучек $\psi' \in \Psi_G$ и любому отображению $f \in \Psi_{(B/G)}$ сопоставим индуцированное отображение $f' \in \Psi_G$, то используя предложения 2.1 и 2.2 нетрудно видеть, что это сопоставление является ковариантным функтором категории $\Psi_{(B/G)}$ в категорию Ψ_G. Его мы обозначим $T_1: \Psi_{(B/G)} \to \Psi_G$.

Далее покажем, что имеет место „обратный" функтор категории Ψ_G в категорию $\Psi_{(B/G)}$. Для этого сформулируем два (аналогичных 2.1, 2.2) предложения.

Предложение 2.3. Пусть $\Psi'(E', B, i', j')$ является G-микропучком, тогда $\psi(E'/G, B/G, i, j)$ микропучек, где E'/G и B/G — пространства орбит.

В самом деле инъекцию и проекцию микропучка ψ определим естественным образом. Для доказательства предложения нам остается показать „локальную тривиальность" этого микропучка.

Если группа G состоит только из одного элемента, предложение имеет место, т.к. тогда $\psi' = \psi$. Теперь возьмем $B = G \times B/G$. Для окрестностей $W \subset G$ и $U \subset B/G$ в пространстве E' существует окрестность $V' \subset E'$ гомеоморфная $W \times U \times R^n$. Рассматриваем ограничение этого гомеоморфизма на $U \times R^n$, получаем гомеоморфизм $h: U \times R \longleftrightarrow V$, где $V \subset E'/G$. Нетрудно видеть, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "j/U"] \arrow[dd, leftrightarrow, "h"] & \\ U \arrow[ur, "i/U"] \arrow[dr] & & U \\ & U \times R \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd} \qquad (6)$$

Рассмотрим два G-микропучка $\Psi'_1(E'_1, B, i'_1, j'_1)$ и $\Psi'_2(E'_2, B, i'_2, j'_2)$ над пространством B и G-отображение $f' = (f_{E'_1}, f_B)$ G-микропучка Ψ'_1 в G-микропучек Ψ'_2. Тогда, согласно предложению 2.3, получаем два микропучка $\Psi_1(E'_1/G, B/G, i_1, j_1)$ и $\Psi_2(E'_2/G, B/G, i_2, j_1)$. Естественно определяется отображение этих микропучков $f = (f_{E_1}, f_{(B/G)})$.

Если обозначим $E'_1/G = E_1$, $E'_2/G = E_2$, то и для этих микропучков имеет место

Предложение 2.4. Диаграмма (3) коммутативна.

Таким образом, получаем функтор категории Ψ_G в категорию $\Psi_{(B/G)}$, который мы обозначим $T_2: \Psi_G \to \Psi_{(B/G)}$.

Теорема 2.5. *Категории Ψ_G и $\Psi_{(B/G)}$ эквивалентны.*

Доказательство. Мы покажем, что (T_1, T_2, u, v) является эквивалентностью категории Ψ_G с категорией $\Psi_{(B/G)}$. Здесь T_1, T_2 — вышеопределенные функторы, а $u: 1_{\Psi_G} \to T_1T_2$, $v: 1_{\Psi_{B/G}} \to T_2T_1$ — функторные морфизмы, где 1_{Ψ_G} и $1_{\Psi_{B/G}}$ — тождественные функторы, соответственно Ψ_G и $\Psi_{(B/G)}$. Для доказательства теоремы нам достаточно убедиться, что имеет место тождественная композиция факторных морфизмов диаграммы (5).

В свою очередь, нетрудно видеть, что это, если T_2T_1 и T_1T_2 — тождественные функторы, соответственно, категорий $\Psi_{(B/G)}$ и Ψ_G, имеет место.

Рассмотрим любой G-микропучек $\Psi'(E', B, i', j')$. Тогда функтор T_1 сопоставляет G-микропучку $\psi' \in \Psi_G$ микропучек $\psi(E'/G, B/G, i, j)$, где $\psi = T_1(\psi')$. Далее функтор индуцирования T_2 микропучек ψ переводит в индуцированный G-микропучек $\psi''(E'', B, i'', j'')$, где $\psi'' = T_2T_1(\psi')$. Так как тотальные пространства E' и E'', соответственно, G-микропучков ψ' и ψ'' гомеоморфны, а инъекции и проекции этих G-микропучков согласованы с геоморфизмом, то G-микропучки ψ' и ψ'' изоморфны. Таким образом, композиция T_2T_1 является тождественным функтором категории Ψ_G.

Теперь микропучек ψ вначале функтором T_2 переводится в G-микропучек $T_2\psi = \psi''$, а потом функтор T_1 его переводит опять в микропучек $T_1T_2\psi = T_1\psi''$. Ввиду того, что пространства E' и E'' гомеоморфны, то и тотальные пространства E'/G, E''/G, соответственно, микропучков ψ и $T_1T_2\psi$ будут также гомеоморфны. Нетрудно видеть, что инъекции и проекции этих микропучков согласованы с гомеоморфизмом. Тогда и композиция T_1T_2 является тождественным функтором категории $\Psi_{(B/G)}$. Этим теорема доказана.

4. Эквивалентность категорий Ψ'_G и $\Psi_{G'}$. Рассмотрим еще одну эквивалентность категорий. Пусть G' — подгруппа группы G и B есть G'-пространство. Тогда G-пространство $G \times_{G'} B$ получаем из произведения $G \times B$ с помощью отождествления $(q, b) \sim (qq^{-1}, q_1 b)$, где $q \in G$, $q_1 \in G'$ и $b \in B$. G-структуру в пространстве $G \times_{G'} B$ определим по формуле $q'(q, b) = (q'q, b)$. Она определена корректно, так как

$$q'(qq_1^{-1}, q_1 b) = (q' q q_1^{-1}, q_1 b) \sim (q' q, b) = q'(q, b).$$

Теперь пусть $\psi(E, G \times_{G'} B, i, j)$ — G-микропучек над $G \times_{G'} B$. Тогда имеет место

Предложение 2.6. Ограничение G-микропучка ψ над $G' \times_{G'} B$ является G'-микропучком над B.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $G' \times_{G'} B$ пространства $G \times_{G'} B$. Так как $G' \times_{G'} B$ получаем из произведения $G' \times B$ факторизацией его по эквивалентности $(q', b) \sim (q'(q_1')^{-1}, q_1' b)$, где $q', q_1' \in G'$, $b \in B$, то очевидно, что все эквивалентные между собой элементы составляют группу G'. Таким образом, $G' \times_{G'} B = (G' \times B)/G' = B$. Согласно определению действий группы G' на B получаем, что B остается стабильной относительно этих действий. Следовательно ограничение G-микропучка ψ над $G' \times_{G'} B$ суть G'-микропучек $\psi_{G'}(E_{/B}, B, i_{/B}, j_{/B})$.

Получаем функтор категории Ψ'_G в категорию $\Psi_{G'}$, которого мы обозначим $T'_1: \Psi'_G \to \Psi_{G'}$.

Теперь построим „обратный“ функтор $T_2' : \Psi_{G'} \to \Psi_G'$. Для этого рассмотрим G'-микропучек $\psi_{G'}'$ (E', B, i', j'). Тогда $G\times_{G'}B$ является G-пространством. Действие группы G определим формулой $q(q', b)=(qq', b)$, где $q\in G$, $q'\in G'$, $b\in B$.

Предложение 2.7. Продолжение G'-микропучка $\psi_{G'}'$, над $G\times_{G'}B$ является G-микропучек.

Доказательство. Тотальным G-пространством искомого G-микропучка Ψ_G' будет $G\times_{G'}E'$ с действием группы G, определенной по формуле $q(q', e')=(qq', e')$, где $e'\in E'$. Инъекцию i и проекцию j G-микропучка ψ_G' $(G\times_{G'}E', G\times_{G'}B', i_1, j_1)$ определим соответственно по формуле

$$i_1(q, b)=\left(q, i'(b)\right), \quad j_1(q, e')=\left(q, j'(e')\right).$$

Очевидно, что они являются G-отображениями.

Таким образом, получаем функтор $T_2'(\psi_{G'}')=\psi_G'$.

Теорема 2.8. Категории $\Psi_{G'}$ и Ψ_G' эквивалентны.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что композиции функторов $T_1'T_2'$ и $T_2'T_1'$ являются тождественными функторами, соответственно, категорий $\Psi_{G'}$ и Ψ_G'.

Так как имеет место коммутативная диаграмма,

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, "j'"] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\
G\times_{G'}B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & G\times_{G'}B \\
 & G\times_{G'}E_{1B} \arrow[ur, "j_1"'] &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

то G-микропучки ψ и $T_2'\psi'$ изоморфны (здесь $\psi'=T_1'\psi$) и композиция $T_2'T_1'$ является тождественным функтором категории Ψ_G'.

$$\begin{tikzcd}
 & E' \arrow[dr, "j'"] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\
B \arrow[ur, "i'"] \arrow[dr, "i_{1B}"'] & & B \\
 & G\times_{G'}E_{1B'}\times_{G'}B \arrow[ur, "j_{1E}"'] &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Далее, как нетрудно видеть, имеем также коммутативную диаграмму, которая показывает, что G-микропучки $\psi'_{G'}$ и $T'_1\psi'_G$ изоморфны. Так как $\psi_G' = T_2'\psi'_G$, то и композиция $T'_1 T'_2$ является тождественным функтором категории Ψ'_G. Теорема доказана.

Вильнюсский государственный университет им В. Капсукаса

Поступило в редакцию 20.2.1968

Литература

1. M. F. Atiyah, Lectures on K-theory (mimeographed), 1964.
2. N. H. Kuiper and R. K. Lashof, Microbundles and Bundles, Invent. math., 6, F. 1, 1—17, 1966.
3. С. Маклейн, Гомология, Москва, 1962.
4. А. Матузявичюс, Нестабильная полугруппа микропучков, Лит. мат. сб., VII, № 3 (1967), 439-457.

APIE MIKROIŠSLUOKSNIAVIMŲ KATEGORIJŲ EKVIVALENTIŠKUMĄ

A. MATUZEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama G-mikroišsluoksniavimų kategorija, kurios objektais yra G-mikroišsluoksniavimai, o morfizmais — G-atvaizdavimai.

Tarp kitų rezultatų įrodomas mikroišsluoksniavimų ant orbitų erdvės $^B/_G$ kategorijos ekvivalentiškumas G-mikroišsluoksniavimų kategorijai, kurią indukuoja faktorizacijos atvaizdavimas $B \to {}^B/_G$.

ON EQUIVALENCE CATEGORIES OF MICROBUNDLES

A. MATUZEVIČIUS

(Summary)

In this article we consider some category of G-microbundles, whose objects are G-microbundles and whose morphisms are G-maps.

It proves that the category of microbundles over $^B/_G$ is equivalent to the category of G-microbundles over B, which induced the quotient map $B \to {}^B/_G$.