УДК – 513

РОМБОЭДРИЧЕСКИЕ СЕТИ ИЗ СФЕР В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. ПАДЕРВИНСКАС

Определения ромбических и ромбоэдрических сетей даны Либманом [1]. В статье [2] исследованы некоторые общие вопросы (существование, автоморфизмы и др.) ромбических и ромбоэдрических сетей. В этой заметке исследуются ромбоэдрические сети из сфер.

Пусть даны три однопараметрические семейства сфер

$$\vec{r}^2 - 2\vec{a}_i\vec{r} + 2b_i = 0, \tag{1}$$

$\vec{a}_i = \{a_i^1,\ a_i^2,\ a_i^3\}$ и a_j^i, b_j являются функциями u^j $(i,j = 1, 2, 3)$.

Вектор $\vec{r}$ описывает трехмерную сеть, если сферы (1) пересекаются, $(\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{r}_3) \neq 0$ $\left(\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right)$, и точки пересечений этих сфер заполняют некоторую трехмерную область.

Дифференцируя равенства (1) по u^i, получаем

$$\vec{r}_i(\vec{r} - \vec{a}_i) = \vec{r}\frac{d\vec{a}_i}{du^i} - \frac{db_i}{du^i},$$

$$\vec{r}_i(\vec{r} - \vec{a}_j) = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Так как

$$(\vec{r} - \vec{a}_1)\ (\vec{r} - \vec{a}_2)\ (\vec{r} - \vec{a}_3) \neq 0,$$

то

$$\vec{r}_i = \frac{\left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_i}{du^i} - \frac{db_i}{du^i}\right)[(\vec{r} - \vec{a}_k) \times (\vec{r} - \vec{a}_l)]}{(\vec{r} - \vec{a}_1)(\vec{r} - \vec{a}_2)(\vec{r} - \vec{a}_3)}$$

$(i, k, l$ – различны).

Так как сеть ромбоэдрическая, то должны выполняться равенст ва [1]:

$$\vec{r}_1^2 = \vec{r}_2^2 = \vec{r}_3^2$$

или

$$\left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_i}{du^i} - \frac{db_i}{du^i}\right)^2 [(\vec{r} - \vec{a}_k) \times (\vec{r} - \vec{a}_l)]^2 = \left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_k}{du^k} - \frac{db_k}{du^k}\right)^2 [(\vec{r} - \vec{a}_i) \times (\vec{r} - \vec{a}_l)]^2 = 0. \tag{2}$$

Обозначим

$$d_i=[(\vec{r}-\vec{a}_k)\times(\vec{r}-\vec{a}_l)]^2=-\begin{vmatrix} 0 & b_k & b_l & 1 \\ b_k & \vec{a}_k^2 & \vec{a}_k\vec{a}_l & 1 \\ b_l & \vec{a}_k\vec{a}_l & \vec{a}_l^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Так как $d_i>0$, то равенства (2) можно записать в виде:

$$\left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_i}{du^i}-\frac{db_i}{du^i}\right)\sqrt{d_i}=\pm\left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_j}{du^j}-\frac{db_j}{du^j}\right)\sqrt{d_j}.$$

Соответствующей заменой параметров ($u^{i'}=-u^i$) эти уравнения всегда можно привести к виду:

$$\left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_i}{du^i}-\frac{db_i}{du^i}\right)\sqrt{d_i}=\left(\vec{r}\frac{d\vec{a}_j}{du^j}-\frac{db_j}{du^j}\right)\sqrt{d_j}. \tag{2a}$$

Из уравнений (1) получаем:

$$\vec{r}\vec{a}_i-b_i=\vec{r}\vec{a}_j-b_j. \tag{4}$$

Так как $\vec{r}$ тот же самый в уравнениях (2*a*) и (4), то

$$\frac{\frac{da_k^i}{du^k}\sqrt{d_k}-\frac{da_l^i}{du^l}\sqrt{d_l}}{a_k^i-a_l^i}=\frac{\frac{db_k}{du^k}\sqrt{d_k}-\frac{db^l}{du^l}\sqrt{d_l}}{b_k-b_l} \tag{5}$$

или

$$\left[\frac{da_k^i}{du^k}(b_k-b_l)-\frac{db_k}{du^k}(a_k^i-a_l^i)\right]\sqrt{\frac{d_k}{d_l}}=$$

$$=\frac{da_k^i}{du^l}(b_k-b_l)-\frac{db_l}{du^l}(a_k^i-a_l^i). \tag{6}$$

Если коэффициент при $\sqrt{\frac{d_k}{d_l}}$ и правая часть этого равенства равны нулю, то получаем, что все точки пересечений сфер лежат в одной плоскости и сферы не образуют сеть. Так как правая часть равенства (6) не зависит от u^j $(j\neq k, j\neq l)$, то

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{d_k}{d_l}\right)=0. \tag{7}$$

Отсюда следует:

$$d_i=C_i\varphi_k(u^k)\,\varphi_l(u^l)$$

(i, k, l — различны).

Вводим новые параметры

$$u^{i'}=\int_{u_0^i}^{u^i}\sqrt{\frac{\varphi_i}{C_i}}\,du^i. \tag{8}$$

Дальше $u^{i'}$ будем писать через u^i и обозначим a_1^i, a_2^i, a_3^i в новых параметрах соответственно U_i, V_i, W_i, а b_1, b_2, b_3 – через U_4, V_4, W_4. После замены (8) из уравнений (5) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{U'_\alpha - V'_\alpha}{U_\alpha - V_\alpha} &= \frac{U'_\beta - V'_\beta}{U_\beta - V_\beta}, \\ \frac{U'_\alpha - W'_\alpha}{U_\alpha - W_\alpha} &= \frac{U'_\beta - W'_\beta}{U_\beta - W_\beta}, \\ \frac{V'_\alpha - W'_\alpha}{V_\alpha - W_\alpha} &= \frac{V'_\beta - W'_\beta}{V_\beta - W_\beta}. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

$(\alpha,\ \beta = 1, 2, 3, 4)$.

Выясним некоторые зависимости, существующие между решениями системы (9) (решения одного уравнения вида

$$\frac{U'_1 - V'_1}{U_1 - V_1} = \frac{U'_2 - V'_2}{U_2 - V_2}$$

указаны в [3]).

Сначала докажем, что ни один из векторов $\vec{a}_i$ не может быть постоянным. Действительно, пусть $\vec{a}_1$ постоянный. Не нарушая общности, можем считать $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Тогда

$$d_2 = 2b_1\vec{a}_3^2 + (b_1 - b_3)^2,$$

$$d_3 = 2b_1\vec{a}_2^2 + (b_1 - b_2)^2.$$

Из этих равенств и равенств (7) получаем:

$$[b_1^2(\vec{a}_2^2 - \vec{a}_3^2 - b_2 + b_3) + b_1(b_2^2 - b_3^2) + b_2^2\vec{a}_3^2 - b_2^2 b_3 - b_3^2\vec{a}_2^2 + b_2 b_3^2]\frac{db_1}{du^1} = 0. \tag{10}$$

Так как b_1 не постоянный (в противном случае ни одно семейство сфер не зависело бы от u^1), то $\frac{db_1}{du^1} \neq 0$, и из (10) получаем:

$$b_2^2 = b_3^2,$$

$$\vec{a}_2^2 - \vec{a}_3^2 - b_2 + b_3 = 0.$$

Отсюда следует, что b_2, b_3, $\vec{a}_2^2$, $\vec{a}_3^2$ – постоянны. Но тогда d_2 не зависит от u^3 и из уравнений (5) получаем

$$\frac{\frac{da_2^i}{du^3}}{a_2^i} = \frac{\frac{db_1}{du'}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}}{b_1 - b_2} = \text{const}.$$

Отсюда следует:

$$a_2^i = e^{ku^3 + c_i}.$$

Так как $\vec{a}_2^2 = \text{const}$, то $k = 0$, и $\frac{da_2^i}{du^3} = 0$; но тогда и $\frac{db_1}{du_1} = 0$. Таким образом, если $\vec{a}_1$ постоянный, то и b_1 постоянный, чего вместе не может быть.

Так как векторы $\vec{a}_i$ не постоянные, то для каждого частного решения системы (9) можно так направить координатные оси, чтобы U_i, V_i, W_i не были постоянными.

Исследуем часть системы (9), получаемую при $\alpha=1$, $\beta=2$. Запишем уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned}&(U_1'-V_1')(U_2-V_2)-(U_2'-V_2')(U_1-V_1)=0,\\&(U_1'-W_1')(U_2-W_2)-(U_2'-W_2')(U_1-W_1)=0,\\&(V_1'-W_1')(V_2-W_2)-(V_2'-W_2')(V_1-W_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Продифференцируем первое уравнение по U_1, V_1, второе по U_1, W_1 третье по V_1, W_1; получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dU_1'}{dU_1}\frac{dV_2}{dV_1}+\frac{dV_1'}{dV_1}\frac{dU_2}{dU_1}-\frac{dU_2'}{dU_1}-\frac{dV_2'}{dV_1}=0,\\&\frac{dU_1'}{dU_1}\frac{dW_2}{dW_1}+\frac{dW_1'}{dW_1}\frac{dU_2}{dU_1}-\frac{dU_2'}{dU_1}-\frac{dW_2'}{dW_1}=0,\\&\frac{dV_1'}{dV_1}\frac{dW_2}{dW_1}+\frac{dW_1'}{dW_1}\frac{dV_2}{dV_1}-\frac{dV_2'}{dV_1}-\frac{dW_2'}{dW_1}=0.\end{aligned}\right| \tag{12}$$

Аналогично продифференцируем еще раз:

$$\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}\frac{d^2V_2}{dV_1^2}+\frac{d^2V_1'}{dV_1^2}\frac{d^2U_2}{dU_1^2}=0, \tag{13а}$$

$$\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}\frac{d^2W_2}{dW_1^2}+\frac{d^2W_1'}{dW_1^2}\frac{d^2U_2}{dU_1^2}=0, \tag{13б}$$

$$\frac{d^2V_1'}{dV_1^2}\frac{d^2W_2}{dW_1^2}+\frac{d^2W_1'}{dW_1^2}\frac{d^2V_2}{dV_1^2}=0. \tag{13в}$$

Пусть ни одно из слагаемых в уравнениях системы (13) не равно нулю. Тогда из уравнения (13а) следует:

$$\frac{d^2U_2}{dU_1^2}=k\frac{d^2U_1'}{dU_1^2},$$

$$\frac{d^2V_2}{dV_1^2}=-k\frac{d^2V_1'}{dV_1^2},$$

$k=\mathrm{const}\neq 0$.

Из (13б) следует:

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2}=-k\frac{d^2W_1'}{dW_1^2}.$$

Наконец из (13в) получаем:

$$\frac{d^2V_1'}{dV_1^2}\frac{d^2W_1'}{dW_1^2}=0.$$

Таким образом, допущение не верно, остается, что хотя бы одно слагаемое системы (13) равно нулю.

Пусть

$$\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}=0. \tag{14}$$

Тогда из уравнения (13а) следует:

$$1)\quad \frac{d^2U_2}{dU_1^2}=0 \tag{15}$$

или

$$2)\quad \frac{d^2V_1'}{dV_1^2}=0.$$

1) Пусть $\frac{d^2U_2}{dU_1^2}=0.$

Из (14) и (15) получаем:

$$U_1'=C_1U_1+C_2,$$
$$U_2=C_3U_1+C_4,$$
$$U_2'=C_1C_3U_1+C_2C_3.$$

Из этих равенств и (11) следует:

$$\left.\begin{aligned}&C_1C_3V_1-C_3V_1'-C_1V_2+V_2'+C_1C_4=0,\\&C_2C_3V_1-C_4V_1'-C_2V_2+V_1'V_2-V_1V_2'+C_2C_4=0.\end{aligned}\right\}$$

Следствием этой системы является равенство

$$(V_1+C_2)\,V_2'-(V_2+C_2C_4-C_1C_4)\,V_1'=0$$

или

$$\left(\frac{V_2+C_2C_4-C_1C_4}{V_1+C_2}\right)'=0,$$

откуда следует

$$V_2=cV_1+k$$

(c и k постоянные).

Видим, что

$$\frac{d^2V_2}{dV_1^2}=0.$$

Аналогичным образом из (11) получаем

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2}=0.$$

Но если

$$\frac{d^2U_2}{dU_1^2}=0,\quad \frac{d^2V_2}{dV_1^2}=0,\quad \frac{d^2W_2}{dW_1^2}=0, \tag{16}$$

то условие $\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}=0$ является излишним.

2) $\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}=0,\quad \frac{d^2V_1'}{dV_1^2}=0.$

Из (13б) получаем

$$1)\quad \frac{d^2U_2}{dU_1^2}=0,$$

или

$$2)\quad \frac{d^2W_1'}{dW_1^2}=0.$$

1) Этот случай исследован выше;

2) $$\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}=0,\quad \frac{d^2V_1'}{dV_1^2}=0,\quad \frac{d^2W_1'}{dW_1^2}=0. \tag{17}$$

Если же $\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}\neq 0$, но равна нулю какая-нибудь другая производная системы (13), то результаты получим те же самые, т.е. будут справедливы (16) или (17) равенства. Таким образом, каждое решение системы (11) удовлетворяет или равенствам (16) или равенствам (17).

Пусть справедливы равенства (17). В этом случае, если ни одна производная U_1', V_1', W_1', не является константой, получаем:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= m_1 e^{k_1 u^1} + m_1', \\ V_1 &= m_2 e^{k_2 u^2} + m_2', \\ W_1 &= m_3\, e^{k_3 u^3} + m_3'. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(k_i, m_i, m_i' – постоянные).

Так как U_2, V_2, W_2, не постоянные, то аналогичным образом (если ни одна производная U_2', V_2', W_2', не является константой) получаем:

или

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= n_1 e^{g_1 u^1} + n_1', \\ V_2 &= n_2 e^{g_2 u^2} + n_2', \\ W_2 &= n_3 e^{g_3 u^3} + n_3', \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

или

$$\frac{d^2 U_1}{dU_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 V_1}{dV_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 W_1}{dW_1^2} = 0,$$

т.е. справедливы равенства (16).

Пусть справедливы равенства (18) и (19). В этом случае из (11) получаем

$$k_i = g_i.$$

Отсюда и из (18) и (19) следует, что выполняются равенства (16), т.е. этим равенствам удовлетворяет любое решение системы (11).

Таким образом:

$$\begin{aligned} U_2 &= a_1 U_1 + a_1', \\ V_2 &= a_2 V_1 + a_2', \\ W_2 &= a_3 W_1 + a_3'. \end{aligned}$$

Если

$$\frac{dU_1'}{dU_1} = \frac{dV_1'}{dV_1} = \frac{dW_1'}{dW_1} = C \neq 0, \tag{20}$$

то из системы (11) следует

$$a_1' = a_2' = a_3'.$$

Параллельным переносом координатных осей можно достичь, того что

$$a_i' = 0.$$

Если же равенства (20) не справедливы, то из системы (12) дополнительно получаем

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= a_1 U_1, \\ V_2 &= a_2 V_1, \\ W_2 &= a_3 W_1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Аналогичным образом получаем:

$$U_3=e_1U_1,$$
$$V_3=e_2V_1,$$
$$W_3=e_3W_1.$$

Если U_4', V_4' W_4' не постоянные, то

$$\left.\begin{aligned}U_4&=m_1U_1+m,\\V_4&=m_2V_1+m,\\W_4&=m_3W_1+m.\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Пусть некоторые из U_4, V_4, W_4 постоянные, например $U_4=C$; но U_i', V_i', W_i' не постоянные. Из уравнений (9) получаем:

$$(U_1'-V_1')(C-V_4)+V_4'(U_1-V_1)=0.\tag{24}$$

Продифференцировав это уравнение два раза по U_1 получаем:

$$\frac{d^2U_1'}{dU_1^2}(C-V_4)=0,$$

откуда

а) $\dfrac{d^2U_1'}{dU_1^2}=0,$

или

б) $C-V_4=0.$

а) $U_1=C_1e^{ku^1}+C_2.$

Подставляя U_1 в уравнение (24) и требуя, чтобы оно обращалось в тождество, получаем:

$$V_4'=kV_4-kC,$$

или

$$V_4=C_3e^{ku^1}+C,$$
$$V_1'=kV_1-kC_2,$$

или

$$V_1=C_4e^{ku^1}+C_2.$$

Аналогичным образом получаем:

$$W_4=C_5e^{ku^1}+C,$$
$$W_1=C_6e^{ku^1}+C_2.$$

Перенесем параллельно координатные оси так, чтобы было $C_2=0$. Тогда

$$V_4=\frac{C_3}{C_4}V_1+C,$$

$$W_4=\frac{C_5}{C_6}W_1+C,$$

т.е. те же самые равенства (23), только теперь $m_1=0$.

б) $U_4=C,\ V_4=C.$

Аналогичным образом из системы (9) получаем:

$$W_4 = m_3 W_1 + C,$$

т.е. те же самые равенства (23), только $m_1 = 0$, $m_2 = 0$.

Если $U_4 = C_1$, $V_4 = C_2$ или $U_4 = C_1$, $V_4 = C_2$, $W_4 = C_3$, то из соответствующих уравнений системы (9) получаем, что справедливы равенства (23), только соответственно $m_1 = m_2 = 0$ или $m_1 = m_2 = m_3 = 0$.

Исследуем случай, когда некоторые из производных U'_α, V'_α, W'_α постоянные.

Пусть

$$U'_1 = C_1, \text{ т.е. } U_1 = C_1 U^1 + C'_1. \tag{25}$$

Из (13а):

1) $\dfrac{d^2 V'_1}{dV_1^2} = 0,$

2) $\dfrac{d^2 U_2}{dU_1^2} = 0.$

1) а) $V_1 = C_2 U^2 + C'_2$, если $V'_1 = \text{const}$;

б) $V_1 = e_1 e^{ku^2} + e_2$, если $V'_1 \neq \text{const}$. (26)

а) Из (12) получаем:

$$\frac{dU'_2}{dU_1} + \frac{dV_2}{dV_1} = 0.$$

Отсюда и из (11) следует:

$$U_2 = C_2 U^1 + C'_2 = \frac{C_2}{C_1} U_1 + C''_2,$$

$$V_2 = e_2 u^2 + e'_2 = \frac{e_2}{e_1} V_1 + e''_2.$$

Из уравнений (11) получаем:

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{C_2}{C_1},$$

т.е.

$$V_2 = \frac{C_2}{C_1} V_1 + e''_2.$$

б) В этом случае

$$\frac{dV'_1}{dV_1} = k,$$

и из уравнений (12) получаем:

$$k \frac{dU_2}{dU_1} - \frac{dU'_2}{dU_1} - \frac{dV'_2}{dV_1} = 0,$$

или

$$k \frac{dU_2}{dU_1} - \frac{dU'_2}{dU_1} = \frac{dV'_2}{dV_1} = m.$$

Отсюда и из (25), (26) получаем:

$$V_2=\frac{me_1}{k}e^{ku^1}+m_1u^2+m_2,$$

$$U_2=Ce^{ku^1}+\frac{C_1m}{k}u^1+m_3.$$

Подставляя U_1, V_1, U_2, V_2 в первое уравнение системы (11) и требуя, чтобы оно обращалось в тождество, получаем:

$$CC_1k=0.$$

$C_1\neq0$, так как U_1 не постоянный, $k\neq0$, так как $V_1'\neq\text{const}$, поэтому $C\neq0$ и $U_2'=\text{const}$, следовательно получаем 2) случай.

2) $U_1=C_1u^1+C_1'$,

$$U_2=C_2u^1+C_2'=\frac{C_2}{C_1}U_1+C_2''.$$

Из уравнений (11) следует:

$$(C_1-V_1')(C_2u^1+C_2'-V_2')-(C_2-V_2')(C_1u^1+C_1'-V_1)=0.$$

Отсюда получаем

$$V_2=\frac{C_2}{C_1}V_1+m_2.$$

Таким образом, если $U_1'=C_1$, то

$$U_2=\frac{C_2}{C_1}U_1+C_2'',$$

$$V_2=\frac{C_2}{C_1}V_1+m_2.$$

Аналогичным образом получаем:

$$W_2=\frac{C_2}{C_1}W_1+C_2,$$

$$U_3=\frac{C_3}{C_1}U_1+C_3',$$

$$V_3=\frac{C_3}{C_1}V_1+m_3,$$

$$W_3=\frac{C_3}{C_1}W_1+e_3,$$

$$U_4=\frac{C_4}{C_1}U_1+C_4',$$

$$V_4=\frac{C_4}{C_1}V_1+m_4,$$

$$W_4=\frac{C_4}{C_1}W_1+e_4.$$

Если не только U_1', но и некоторые другие производные постоянны, то результаты получим те же самые.

Введем новые параметры:

$$u = \frac{U_1}{C_1},$$

$$v = \frac{V_1}{C_1},$$

$$w = \frac{W_1}{C_1}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} U_\alpha &= C_\alpha u + C'_\alpha, \\ V_\alpha &= C_\alpha v + m_\alpha, \\ W_\alpha &= C_\alpha w + e_\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Окончательные итоги получим, потребовав, чтобы выполнялись равенства (7). Докажем, что $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Пусть справедливы равенства (21), (22), (23). Введем новые параметры

$$U^{1'} = \frac{U_1}{C_{11}}$$

$$U^{2'} = \frac{V_1}{C_{22}},$$

$$U^{3'} = \frac{W_1}{C_{33}},$$

и обозначим

$$a_i c_{ii} = c_{i2}, \quad e_i c_{ii} = c_{i3}, \quad m_i c_{ii} = c_{i4}.$$

Константы c_{ii} возьмем такие, что

$$c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + c_{i3}^2 = 1.$$

Тогда

$$U_\alpha = c_{1\alpha} u^{1'} + \delta_\alpha^4 m,$$

$$V_\alpha = c_{2\alpha} u^{2'} + \delta_\alpha^4 m,$$

$$W_\alpha = c_{3\alpha} u^{3'} + \delta_\alpha{}^4 m.$$

Обозначим

$$c_{i1}c_{j1} + c_{i2}c_{j2} + c_{i3}c_{j3} = A_{ij}.$$

Тогда

$$-d_i = (1 - A_{jk})(u^{j'})^2 (u^{k'})^2 + 2(c_{k4}A_{jk} - c_{j4}) u^{j'} (u^{k'})^2 +$$

$$+ 2(c_{j4}A_{jk} - c_{k4})(u^{j'})^2 u^{k'} - (2m + c_{j4}^2)(u^{j'})^2 -$$

$$-(2m + c_{k4}^2)(u^{k'})^2 + 2(2mA_{jk} + c_{j4}c_{k4}) u^{j'} u^{k'},$$

(i, j, k — различны).

Подставляя d_i в уравнения (7) и, требуя, чтобы они обращались в тождества, среди других соотношений получим и следующие:

1) $(c_{24}A_{23}-c_{34})(1-A_{13}^2)-(c_{14}A_{13}-c_{34})(1-A_{23}^2)=0$,

2) $(2mA_{23}+c_{24}c_{34})(1-A_{13}^2)-2(c_{14}A_{13}-c_{34})(c_{34}A_{23}-c_{24})=0$,

3) $(2m+c_{24}^2)(c_{34}A_{13}-c_{14})=0$,

4) $(2m+c_{34}^2)(c_{14}A_{13}-c_{34})=0$,

5) $(2m+c_{34}^2)(c_{24}A_{23}-c_{34})=0$,

6) $(2m+c_{24}^2)(2m+c_{34}^2)=0$,

7) $(2m+c_{14}^2)(2m+c_{34}^2)=0$,

8) $(2m+c_{34}^2)(1-A_{12}^2)-(2m+c_{14}^2)(1-A_{23}^2)=0$,

9) $(2m+c_{34}^2)(c_{14}c_{24}+2mA_{12})=0$,

10) $(1-A_{13}^2)(2m+c_{24}^2)-(2m+c_{14}^2)(1-A_{23}^2)=0$.

Исследуем эти равенства. Пусть из 7):

1. $2m+c_{14}^2=0,\ 2m+c_{34}^2\neq 0$,

из 6) – $2m+c_{24}^2=0$.

Тогда

$$c_{24}=\pm c_{14}.$$

Если $c_{14}\neq 0$, то из 8) – $A_{12}^2=1$, из 9)

$$c_{14}c_{24}+2mA_{12}=0;$$

отсюда

$$A_{12}=1, \text{ если } c_{14}=c_{24};$$

$$A_{12}=-1, \text{ если } c_{14}=-c_{24}.$$

Так как $A_{11}=A_{22}=1$, то векторы

$$\vec{c}_1\{c_{11},\ c_{12},\ c_{13}\},\ \vec{c}_2\{c_{21},\ c_{22},\ c_{23}\}$$

коллинеарны и имеют то же самое направление, когда $c_{14}=c_{24}$, и противоположные направления, если $c_{14}=-c_{24}$. Из (1) получаем

$$\vec{r}^2-\psi_1(u^1)\vec{c}_1\vec{r}+2\left(c_{14}\psi_1(u^1)+m\right)=0,$$

$$\vec{r}^2\pm\psi_2(u^2)\vec{c}_1\vec{r}+2\left(\pm c_{14}\psi_2(u^2)+m\right)=0,$$

откуда следует

$$\vec{c}_1\vec{r}+2c_{14}=0,$$

т.е. все точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

Если $c_{14}=0$, то и $c_{24}=0$ и $m=0$; из 5) следует $c_{34}=0$, но мы допустили что $2m+c_{34}^2\neq 0$.

2. $2m+c_{14}^2=0,\ 2m+c_{34}^2=0.$ $\qquad(\alpha)$

В этом случае $c_{14}=\pm c_{34}$. Если $c_{14}\neq 0$, то из 3) получаем или $A_{13}^2=1$ (в этом случае $d_2=0$, чего не может быть) или

$$2m+c_{24}^2=0. \qquad (\beta)$$

Из (α) и (β) получаем:

$$c_{14} = \pm c_{24} = \pm c_{34}.$$

В силу этих равенств из 1) получаем: или $A_{13}^2=1$ или $A_{23}^2=1$. В обоих случаях точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

Если $c_{14}=0$, то из 10) –

$$(1-A_{13}^2)\,c_{34}^2=0.$$

Если $c_{34}\neq 0$, то $A_{13}^2=1$; так как $c_{14}=c_{34}=m=0$, то точки пересечений сфер лежат в одной плоскости. Значит, $c_{34}=0$; так как $c_{14}=c_{34}=c_{24}=m=0$, то

$$U_4=V_4=W_4=0$$

или

$$b_1=b_2=b_3=0.$$

В этом случае

$$-d_i=(1-A_{jk})\,(u^{j\prime})^2\,(u^{k\prime})^2$$

и равенства (7) выполняются.

3. $2m+c_{34}^2=0$, $2m+c_{14}^2\neq 0$.

Из 8) – $A_{23}^2=1$; из 1) или $A_{13}^2=1$, но тогда векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ коллинеарны, или

$$c_{24}A_{23}-c_{34}=0,$$

откуда следует:

$$c_{24}=c_{34}, \text{ если } A_{23}=1;$$

$$c_{24}=-c_{34}, \text{ если } A_{23}=-1.$$

Если $c_{24}\neq 0$, то в обоих случаях получаем, что точки пересечений сфер лежат в одной плоскости, значит

$$c_{24}=c_{34}=0.$$

Из 6) следует $m=0$, чего не может быть, так как допустили, что $2m+c_{14}^2\neq 0$.

Таким образом, если сеть не вырождается, то

$$b_1=b_2=b_3=0.$$

Пусть справедливы равенства (27). В этом случае центры сфер лежат на параллельных прямых. Преобразованием координатной системы эти равенства можем привести к виду:

$$\left.\begin{aligned} U_\alpha &= \delta_\alpha^1 u+\delta_\alpha^4 cu+\delta_\alpha^4 c_{1\alpha},\\ V_\alpha &= \delta_\alpha^1 v+\delta_\alpha^4 cv+c_{2\alpha},\\ W_\alpha &= \delta_\alpha^1 w+\delta_\alpha^4 cw+c_{3\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} A_{22} &= c_{22}^2+c_{23}^2,\\ A_{33} &= C_{32}^2+c_{33}^2,\\ A_{23} &= c_{22}c_{32}+c_{23}c_{33}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Тогда из (28), (29), (3), (7) среди других соотношений получим и следующие:

1) $(A_{33}-2c_{34}-c^2)(c^2+c_{14}+c_{34})=0$,
2) $(A_{33}-2c_{34}-c^2)(c^2+2c_{14})=0$,
3) $(A_{33}-2c_{34}-c^2)(A_{22}-2c_{24}-c^2)=0$,
4) $(c^2+c_{24}+c_{34}-A_{23})(c^2+2c_{14})=0$,
5) $(c^2+2c_{14})(A_{22}-2c_{24}-c^2)=0$,
6) $c(c_{14}-c_{34})(A_{22}-2c_{24}-c^2)=0$,
7) $(A_{33}-2c_{34}-c^2)(c^2+c_{14}+c_{24})=0$,
8) $(c^2+2c_{14})(c^2+c_{14}+c_{24})=0$,
9) $c(c^2+2c_{14})(c_{24}-c_{14}-A_{22})=0$,
10) $(2c_{14}c_{24}-c_{14}^2-c_{24}^2-2c_{14}A_{22})(c^2+c_{14}+c_{34})-2c^2(c_{14}-c_{34})(c_{24}-c_{14}-A_{22})=0$.

Исследуем эти уравнения. Пусть из 3)

1. $A_{22}-2c_{24}-c^2=0$, $A_{33}-2c_{34}-c^2\neq 0$,

из 2) — $c^2+2c_{14}=0$,

из 1) — $c^2+c_{14}+c_{34}=0$,

откуда $c_{14}=c_{34}$,

из 7) — $c^2+c_{14}+c_{24}=0$.

В силу этих равенств $c_{14}=c_{24}$.

Из 10) — $c_{14}A_{22}=0$.

Если $c_{14}=0$, то и $c=0$, значит $A_{22}=0$.

Пусть $A_{22}=0$. Так как $c_{14}=c_{24}$, то сферы пересекаются в одной плоскости.

2. $A_{33}-2c_{34}-c^2=0$, $A_{22}-2c_{24}-c^2\neq 0$.

Из 5) $c^2+2c_{14}=0$,

из 6) $c(c_{14}-c_{34})=0$.

Если $c=0$, то и $c_{14}=0$; из 10) следует $c_{34}=0$, получаем $A_{33}=0$ и точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

Если $c_{14}=c_{34}$, то из 10) следует $c_{14}A_{33}=0$. Если $c_{14}=0$, то $c_{34}=0$ и $c=0$, значит $A_{33}=0$. Так как $c_{14}=c_{34}$, то точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

3. $A_{33}-c_{34}-c^2=0$, $A_{22}-2c_{24}-c^2=0$.

Из 8) а) $c^2+2c_{14}=0$,

б) $c^2+c_{14}+c_{24}=0$.

а) $c^2=-2c_{14}$, $A_{22}=c^2+2c_{24}=2(c_{24}-c_{14})$.

В силу этих равенств из (10) получаем:

$$(c_{14}-c_{34})(c_{14}-c_{24})^2=0.$$

Если $c_{14}=c_{34}$, то

$$A_{33}=c^2+2c_{34}=c^2+2c_{14}=0.$$

Если $c_{14}=c_{24}$ то $A_{22}=0$.

В обоих случаях все точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

б) $c^2+c_{14}+c_{24}=0$, $c^2+2c_{14}\neq 0$.

Из 9) : α) $c=0$,

β) $A_{22}+C_{14}-c_{24}=0$.

α) $c=0$, тогда $c_{14}=-c_{24}$.

Из 4) $A_{23}=c_{24}+c_{34}=\frac{1}{2}\,(A_{22}+A_{33})$

или $(c_{22}-c_{32})^2+(c_{23}-c_{33})^2=0$.

Тогда получаем $A_{22}=A_{33}$ и $c_{24}=c_{34}$, откуда следует, что точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

β) $A_{22}+c_{14}-c_{24}=0$.

Так как $c^2=-c_{14}-c_{24}$, то из 10) следует:

$$(c_{14}^2-c_{24}^2)\,(c_{24}-c_{34})=0.$$

Если $c_{14}=-c_{24}$, то $c=0$; этот случай рассмотрели выше.

Если $c_{14}=c_{24}$, то $A_{22}=0$.

Если $c_{24}=c_{34}$, то $A_{33}=0$.

В обоих случаях точки пересечений сфер лежат в одной плоскости.

Таким образом, если центры сфер лежат на трех параллельных прямых, то ромбоэдрическая сеть из сфер вырождается.

Если центры сфер лежат на трех пересекающихся прямых и сеть не вырождается, то можно так преобразовать координатную систему, что $b_1=b_2=b_3=0$, *т.е. все сферы проходят через начало координат.* Если произведем инверсию относительно сферы с центром в начале координат, то сферы преобразуются в плоскости. Получим ромбоэдрическую сеть из плоскостей. Как известно, такие сети составляются из трех семейств параллельных прямых [4]. Значит, все сферы одного семейства прообраза соприкасаются в общей точке пересечений сфер.

Таким образом, каждая ромбоэдрическая сеть из сфер получается из соответствующей сети из плоскостей при помощи инверсии.

Естественно возникает вопрос: каков произвол аналогичных ромбических сетей на плоскости, т.е. та же самая задача в двумерном случае. Исследование П. Катилюса показали, что центры окружностей, описываемые векторами $\vec{a}_1\,(u)$ и $\vec{a}_2\,(v)$, лежат на кривых второго порядка, а радиусы являются функциями u и v.

В заключение искреннее благодарю П. Катилюса за внимание к работе и советы.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 14. III. 1968

Литература

1. H. Liebmann, Rhombische Geradennetze im Raum Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss. math.-nat. Kl. Jahrgang 1927.
2. В. Падервинскас, Ромбические и ромбоэдрические сети в трехмерном евклидовом пространстве, Лит. мат. сб., VII, № 3 (1967), 497–504.
3. O. Volk, Über Speziele Kreisnetze, Sitzungsbericht Bayrischen Akad. d. Wiss. zu München math.-nat. 1928.
4. P. Katilius, Über Kurvennetze und Zellteilungen, Mémoires de la Fakulté des Sciences de Z'Universite de Lithuanie, V, 1930.

ROMBOEDRINIAI TINKLAI IŠ SFERŲ TRIMATĖJE EUKLIDINĖJE ERDVĖJE

V. PADERVINSKAS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjami romboedriniai tinklai iš sferų trimatėje euklidinėje erdvėje. Įrodoma, kad kiekvieną romboedrinį tinklą iš sferų galima gauti inversijomis iš atitinkamo romboedrinio tinklo iš plokštumų.

RHOMBOEDRISCHE NETZE AUS KUGELN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

V. PADERVINSKAS

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Artikel ist gezeigt, dass man alle rhomboedrische Netze aus Kugeln im dreidimensionalen euklidischen Raum aus rhomboedrischen Ebenennetzen mittels Inversion erhalten kann.