VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1968

УДК – 513

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЕМЕЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Д. ПЕТРУШКЕВИЧУТЕ

В работе [2] были найдены вполне геодезические семейства пространственных кривых третьего порядка k^3 пространства K_7.

Можно искать семейства кривых k^3, огибаемые вполне геодезическими семействами, т.е. в каждой точке касающиеся какого-либо из вполне геодезических семейств.

Воспроизведем некоторые положения общего метода определения таких семейств [1]:

а. Если ω^a, ω^i – базисные формы группы G, выбранные так, чтобы уравнения $\omega^a=0$ определяли подгруппу g, (то формы ω^a будут базисными формами пространства G/g). На всяком подмногообразии пространства G/g часть форм линейно независимые (их обозначим через $\omega^{\bar{a}}$), а остальные (их обозначим через $\omega^{\hat{a}}$) через них линейно выражаются

$$\omega^{\hat{a}}=\lambda^{\hat{a}}_{\bar{b}}\,\omega^{\bar{b}}, \tag{1}$$

где $\lambda^{\hat{a}}_{\bar{b}}$ – зависит от главных и вторичных параметров.

б. Для того, чтобы два m -мерных многообразия пространства G/g касались друг друга в некоторой точке, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли в этой точке соотношениям (1) с теми же λ. Для того, чтобы m-мерное многообразие касалось n -мерного $(n<m)$, необходимо и достаточно, чтобы соотношения (1) для первого были следствиями соотношений (1) для второго.

в. Если класс F подмногообразий однородного пространства G/g определен как совокупность максимальных интегральных многообразий вполне интегрируемой системы Пфаффа

$$\omega^{\hat{a}}=\lambda^{\hat{a}}_{\bar{b}}(l^\alpha)\,\omega^{\bar{b}} \tag{2}$$

$$\left(\Theta^h(l^\alpha,\ dl^\alpha,\ \omega^i,\ \omega^a)=0\right), \tag{3}$$

где l^α – независимые между собой переменные, а уравнения (3) не налагают на формы ω^a никаких зависимостей, отличных от (2); тогда верна теорема.

Теорема. *Для того, чтобы многообразие однородного пространства касалось в некоторой точке подмногообразия класса F, необходимо и достаточно, чтобы вдоль него в этой точке удовлетворялись уравнения* (2) *при некотором выборе $l^\alpha=l^\alpha_0$.*

Итак, многообразия, огибаемые многообразиями, определенными системами (2), (3) следует искать как решения системы (2). При этом имеет смысл искать максимальные интегральные многообразия.

Мы будем искать семейства кривых k^3, огибаемые вполне геодезическими семействами, разбивая уравнения, определяющие вполне геодезические семейства, на две группы (см. пункт в). Их мы обозначим $f(*)$; $*$ – соответствующее вполне геодезическое семейство:

1) $\bar{A}_4$ – совокупность кривых k^3, имеющих общую точку и общую касательную в этой точке.

Если за их общую точку принять вершину A_1, а за общую касательную – прямую A_1A_2 к кривой k^3 присоединенного проективного репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, то уравнения семейства будут [см. [2]]:

$$\begin{aligned}&2\omega_1^2-9\omega_2^3=0 \qquad (\omega_1^2+3\omega_2^3=0),\\ &\omega_1^3=0,\\ &\omega_1^4=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Их продолжение дает

$$[\omega_1^1-3\omega_2^2,\ \omega_2^3]=0, \qquad \omega_2^3=\lambda(\omega_1^1-3\omega_2^2). \tag{5}$$

Если $\lambda=0$, то получаем само вполне геодезическое семейство $\bar{A}_4$.

Если $\lambda\neq 0$, то $f(\bar{A}_4)$ задается уравнениями (4) и (5) с произволом одной функции одного аргумента. Дадим геометрическую характеристику семейству $f(\bar{A}_4)$.

Из уравнений (4) видно, что точка A_1 описывает пространственную кривую, касательные которой принадлежат линейному комплексу [см. [2]].

Эта кривая задается уравнениями

$$\begin{aligned}&\omega_1^3=0,\ \omega_1^4=0,\ 9\omega_2^3-2\omega_1^2=0,\ \omega_1^1-3\omega_2^2=0,\\ &6\omega_2^1-\omega_3^2=0,\ \omega_3^1=0,\ \omega_4^1=\omega_1^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Если зафиксируем точку этой кривой (т.е. точку A_1), то получим систему

$$\omega_1^2=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_1^4=0,\ \omega_2^3=0,\ \omega_1^1-3\omega_2^2=0,$$

которая определяет вполне геодезическое семейство B_3, т.е. в каждой точке кривой (6) наше семейство $f(\bar{A}_4)$ устроено как семейство B_3.

Значит, $f(\bar{A}_4)$ – однопараметрическое семейство семейств B_3, касающихся (касание второго порядка) пространственной кривой, касательные которой принадлежат линейному комплексу.

2) B_3 – совокупность кривых k^3, имеющих общую точку и общую касательную в этой точке; их соприкасающиеся конические сечения имеют в общей точке касание второго порядка.

Если, так же как и раньше, за общую точку принять вершину A_1 и общую касательную – прямую A_1A_2 проективного репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, то уравнения семейства

$$\begin{aligned}&2\omega_1^2-9\omega_2^3=0 \qquad (\omega_1^2+3\omega_2^3=0),\\ &\omega_1^1-3\omega_2^2=0,\\ &\omega_1^3=0,\\ &\omega_1^4=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Продолжение системы дает

$$[6\,\omega_2^1-\omega_3^2,\ \omega_2^3]=0, \quad \omega_2^3=\alpha\,(6\,\omega_2^1-\omega_3^2).$$

Если $\alpha=0$, то получаем само B_3; если $\alpha\neq 0$, то семейство $f(B_3)$ существует с произволом одной функции одного аргумента.

Точка A_1 описывает кривую (6). В каждой точке ее семейство $f(B_3)$ устроено так, как вполне геодезическое семейство H_2, которое задается уравнениями

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^3=0,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2=0,\ 6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_1^4=0.$$

Значит, $f(B_3)$ – однопараметрическое семейство семейств H_2, которые касаются пространственной кривой (касание третьего порядка).

3) E_3 – семейство кривых k^3, пересекающих прямую l_1 в точке A; их общая касательная l в точке A пересекает все соприкасающиеся плоскости кривых k^3, проведенные в точках пересечения кривых k^3 с плоскостью π, проходящей через l, в одной точке; касательные к ним, проведенные в точках пересечения кривых k^3 с плоскостью π и лежащие в соответствующих соприкасающихся плоскостях пересекают прямую l_1.

Если за точку A принять точку A_1, за прямую l – прямую A_1A_2, за l_1 – прямую A_1A_3 и за плоскость π – плоскость $A_1A_2A_4$ проективного репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, присоединенного к k^3, то уравнения семейства будут

$$\begin{aligned}
&2\,\omega_1^2-9\,\omega_2^3=0, && \begin{pmatrix}\omega_1^2+3\,\omega_2^3=0,\\ 9\,\omega_2^1+\omega_3^2=0.\end{pmatrix}\\
&6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0, &&\\
&\omega_1^3=0, &&\\
&\omega_1^4=0. &&
\end{aligned}$$

Их продолжение дает

$$[\omega_1^2,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]=0,$$

$$[\omega_2^1,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]+\frac{5}{9}\,[\omega_1^2,\ \omega_3^1]=0,$$

т.е.

$$\omega_2^1=a\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2)+b\omega_3^1,$$

$$\frac{5}{9}\,\omega_1^2=b\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2),$$

то $f(E_3)$ задается с произволом двух функций одного аргумента.

4) H_2 – семейство кривых k^3, соприкасающиеся конические сечения которых в их общей точке имеют касание третьего порядка.

Если общую точку принять за вершину A_1 репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, то получим уравнения семейства

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1-3\,\omega_2^2=0, && \begin{pmatrix}\omega_1^2+3\,\omega_2^3=0,\\ 9\,\omega_2^1+\omega_3^2=0.\end{pmatrix}\\
&2\,\omega_1^2-9\,\omega_2^3=0, &&\\
&6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0, &&\\
&\qquad\omega_1^3=0, &&\\
&\qquad\omega_1^4=0. &&
\end{aligned} \tag{8}$$

Их продолжение дает

$$[\omega_1^2\,\omega_3^1]=0, \text{ т. е. } \omega_1^2=a\omega_1^3. \tag{9}$$

Если $a=0$, то получаем само семейство H_2. Если $a\neq 0$, то $f(H_2)$ задается с произволом одной функции одного аргумента.

Из уравнений (8), (9) следует, что точка A_1 описывает кривую (6). Если фиксировать точку кривой, то семейство будет определяться вполне интегрируемой системой

$$\omega_1^1-3\,\omega_2^2=0,\ \omega_1^2=0,\ \omega_2^3=0,\ \omega_3^1=0,\ \omega_1^3=0,$$
$$\omega_1^4=0,\ 6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0.$$

Это будет однопараметрическое семейство кривых k^3, лежащих на конусе, вершина которого находится в фиксированной точке, т.е. в точке A_1. Касательная кривой — A_1A_2 принадлежит конусу и касательная плоскость его вдоль образующей, совпадает с соприкасающейся плоскостью кривой в точке A_1.

Значит, $f(H_2)$ — однопараметрическое семейство конусов, вершины которых лежат на пространственной кривой. Кривые k^3 имеют с этой кривой касание четвертого порядка.

5) F_2 — совокупность кривых k^3, имеющих общую точку и общую касательную в этой точке, пересекающих инвариантную прямую, проходящую через их общую точку так, что в точках пересечения проведенные к кривым k^3 касательные пересекаются в одной инвариантной точке.

Если за общую точку кривых k^3 принять вершину A_1, за касательную — ребро A_1A_2, за инвариантную прямую — ребро A_1A_4 и за точку пересечения касательных — вершину A_3 проективного репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, присоединенного к k^3, то уравнения семейства примут вид:

$$\begin{gathered}
\begin{aligned} &2\,\omega_1^2-9\,\omega_2^3=0 \\ &6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0, \end{aligned}\left(\begin{aligned} &\omega_1^2+3\,\omega_2^3=0, \\ &9\,\omega_2^1+\omega_3^2=0. \end{aligned}\right) \\
\omega_3^1=0, \\
\omega_1^3=0, \\
\omega_1^4=0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Их продолжение дает

$$\begin{aligned}
&[\omega_1^2,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]=0, \\
&[\omega_2^1,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]=0, \\
&[\omega_1^2,\ \omega_4^1]=0,
\end{aligned} \tag{11}$$

т. е. если

$$\omega_1^2=0,$$
$$\omega_2^1=a\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2),$$

то $f(F_2)$ задается с произволом одной функции одного аргумента.

Из уравнений (10), (11) видно, что прямая A_1A_4 описывает конус с вершиной в точке A_1. Семейство кривых k^3 имеет общую касательную A_1A_2 в точке A_1. Касательные к кривым k^3, проведенные в точках пересечения с одной из образующих конуса, пересекаются в одной точке A_3. Эта точка описывает плоскую кривую, когда мы переходим от одной образующей к другой.

Значит, $f(F_2)$ — совокупность кривых k^3, их общая точка совпадает с вершиной конуса; в ней они имеют общую касательную; образующие конуса кривые k^3 пересекают следующим образом: точки, по которым пересекаются касательные к ним вдоль каждой образующей, лежат на одной плоской кривой.

6) G_2 — совокупность кривых k^3 пересекающих две прямые l_1 и l_2; прямую l_1 они пересекают в точке A, а их общая касательная l в точке A пересекает прямую l_2; в точках пересечения кривых k^3 с прямой l_2 проведенные касательные пересекают прямую l_1.

Если за прямые l_1 и l_2 принять соответственно ребра A_1A_3 и A_2A_4, общую точку — вершину A_1 и касательную — ребро A_1A_2 проективного репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, то уравнения семейства будут

$$\begin{aligned}&2\,\omega_1^2-9\,\omega_2^3=0, \quad \begin{pmatrix}\omega_1^2+3\,\omega_2^3=0,\\ 9\,\omega_2^1+\omega_3^2=0.\end{pmatrix}\\ &6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0,\\ &\omega_1^3=0,\\ &\omega_1^4=0,\\ &\omega_4^1=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Их продолжение дает

$$[\omega_1^2,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]=0,$$

$$[\omega_2^1,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]+\frac{5}{9}\,[\omega_1^2\,\omega_3^1]=0,$$

$$[\omega_2^1\,\omega_3^1]=0,$$

т.е.

$$\omega_2^1=a\omega_3^1,\quad \frac{5}{9}\,\omega_1^2=a\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2). \tag{13}$$

Система (12), (13) не в инволюции. Ее продолжение дает

$$\left[da+a\left(-\frac{2}{5}\,\omega_1^1-\frac{4}{5}\,\omega_2^2\right),\ \omega_3^1\right]=0, \tag{14}$$

$$\left[da+a\left(-\frac{2}{5}\,\omega_1^1-\frac{4}{5}\,\omega_2^2\right)+\frac{4}{5}\,a\left(-\frac{2}{5}\,\omega_1^1-\frac{4}{5}\,\omega_2^2\right),\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2\right]=0.$$

Если ввести обозначения

$$\Delta a=da+a\left(-\frac{2}{5}\,\omega_1^1-\frac{4}{5}\,\omega_2^3\right),$$

$$\overline{\Delta a}=\Delta a+\frac{4}{5}\,a\left(-\frac{2}{5}\,\omega_1^1-\frac{4}{5}\,\omega_2^2\right),$$

то из уравнений (14) следует

$$\Delta a=A\omega_3^1,$$

$$\overline{\Delta a}=B\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2). \tag{15}$$

Уравнения (12), (13), (14) определяющие $f(G_2)$ задаются с произволом двух функций одного аргумента.

7) C_3 — совокупность кривых k^3, каждая из которых пересекает инвариантную прямую в двух точках; касательные к ним, проведенные в точках пересечения, пересекаются соответственно в двух инвариантных точках.

Если за инвариантную прямую принять ребро A_1A_4, а инвариантные точки, в которых пересекаются соответствующие касательные, – вершины A_2, A_3 репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, то уравнения семейства будут

$$\begin{aligned} &2\,\omega_1^2-9\,\omega_2^3=0, \\ &6\,\omega_2^1-\omega_3^2=0, \\ &\omega_1^3=0, \qquad \left(\begin{aligned}&\omega_1^2+3\,\omega_2^3=0,\\ &9\,\omega_2^1+\omega_3^2=0.\end{aligned}\right) \\ &\omega_3^1=0. \end{aligned} \tag{16}$$

Их продолжение дает

$$\begin{aligned} &[\omega_1^2,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]=0, \\ &[\omega_2^1,\ \omega_1^1-3\,\omega_2^2]=0, \\ &[\omega_2^1\,\omega_1^4]=0,\ [\omega_1^2\,\omega_4^1]=0, \end{aligned} \tag{17}$$

т.е.

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^1=0.$$

Следовательно, трехмерное семейство $\bar{f}(C_3)$, т.е. то, на котором ω_1^4, ω_4^1, $\omega_1^1-3\omega_2^2$ линейно независимы, совпадает с C_3. Если мы к уравнениям (16) присоединим условие

$$\omega_1^4=\lambda\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2) \tag{18}$$

(или, в данном случае, ему симметрическое условие

$$\omega_4^1=\mu\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2)),$$

то из (17) следуют:

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^1=\alpha\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2). \tag{19}$$

Система уравнения (16), (18), (19) будет определять двумерное семейство $f(C_3)$, которое определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Из уравнений (16), (18), (19) видно, что точка A_1 описывает кривую, касательной которой служит A_1A_4, точка A_2 – кривую с касательной A_1A_2 и точка A_3 – кривую с касательной A_2A_3. Если фиксировать точку A_1, то фиксируются точки A_3, A_2 и прямая A_1A_4. Получается одномерное семейство кривых такого типа: они имеют общую точку A_1 и общую касательную A_1A_2, пересекают прямую A_1A_4 таким образом, что в точках пересечения проведенные касательные к кривым k^3 пересекаются в точке A_3; соприкасающиеся конические сечения их в точке A_1 имеют касание третьего порядка. Соприкасающаяся плоскость кривой, описанной точкой A_1 (касательная A_1A_4) пересекается с соприкасающейся плоскостью кривых k^3 в точке A_1 по прямой A_1A_3.

Если принять, что только форма $\omega_1^1-3\omega_2^2$ независима, т.е. к уравнению (18) добавить условие

$$\omega_4^1=\mu\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2), \tag{20}$$

то из (17) получим

$$\begin{aligned} &\omega_2^1=\alpha\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2), \\ &\omega_1^2=\beta\,(\omega_1^1-3\,\omega_2^2). \end{aligned} \tag{21}$$

Система уравнений (16), (18), (20), (21) определяет одномерное семейство $\bar{f}(C_3)$ с произволом четырех функций одного аргумента.

8) D_3 – совокупность кривых k^3, которые пересекают две прямые l_1 и l_2 таким образом, что, проведенная в точке пересечения кривой k^3 с прямой l_1, касательная к k^3 пересекают прямую l_2 и наоборот, т.е. в точке пересечения кривой k^3 с прямой l_2 проведенная касательная пересекает l_1.

Если за прямые l_1, l_2 принять ребра A_1A_3, A_2A_4 репера $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, то семейство примет вид

$$\begin{aligned} &2\,\omega_1^2 - 9\,\omega_2^3 = 0, \quad \begin{pmatrix} \omega_1^2 + 3\,\omega_2^3 = 0, \\ 9\,\omega_2^1 + \omega_3^2 = 0. \end{pmatrix} \\ &6\,\omega_2^1 - \omega_3^2 = 0, \\ &\omega_1^4 = 0, \\ &\omega_4^1 = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Их продолжение дает

$$\begin{aligned} &[\omega_1^2,\ \omega_1^1 - 3\,\omega_2^2] + 15\,[\omega_2^1,\ \omega_1^3] = 0, \\ &[\omega_2^1,\ \omega_1^1 - 3\,\omega_2^2] + \frac{5}{9}\,[\omega_1^2,\ \omega_3^1] = 0, \\ &[\omega_1^2,\ \omega_1^3] = 0,\ [\omega_2^1,\ \omega_3^1] = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Если считать ω_1^3, ω_3^1, $\omega_1^1 - 3\omega_2^2$ линейно независимыми, то из уравнений (23) следует

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0,$$

т.е. трехмерное $\bar{f}(D_3)$ совпадает с самим семейством D_3.

Если к уравнениям (22) добавим условие

$$\omega_1^1 - 3\,\omega_2^2 = \lambda\omega_1^3 + \mu\omega_3^1,$$

то из (23) получим $\mu = \frac{25}{3\lambda}$ и

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 = \alpha\omega_1^3, \\ &\omega_2^1 = \beta\omega_3^1, \\ &\omega_1^1 - 3\,\omega_2^2 = \lambda\omega_1^3 + \frac{25}{3\lambda}\,\omega_3^1, \end{aligned} \tag{24}$$

т.е. двумерное $f(D_3)$ (формы ω_1^3, ω_3^1 – независимы) будет определяться с произволом трех функций одного аргумента.

Из уравнений (22), (24) видно, что точка A_1 описывает кривую, ее касательная в точке A_1 определяется $(A_1, \alpha A_2 + A_3)$ и A_4 – описывает кривую, касательная которой определяется в точке A_4 $(A_4,\ A_2 + \beta A_3)$.

Если считать форму ω_1^3 независимой, то

$$\begin{aligned} &\omega_3^1 = k\,\omega_1^3, \\ &\omega_1^2 = \alpha\,\omega_1^3, \\ &\omega_2^1 = \beta\,\omega_1^3, \\ &\omega_1^1 - 3\,\omega_2^2 = p\,\omega_1^3 \end{aligned}$$

и одномерное $\bar{f}(D_3)$ определяется с произволом четырех функций одного аргумента.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
15. III. 1968

Литература

1. А. М. Васильев, Семейства линейных элементов, огибаемые вполне геодезическими семействами, Изв. ВУЗов сер. мат. № 3(40), (1964), 28–35.
2. Д. Петрушкевичуте, Вполне геодезические семейства пространственных кривых третьего порядка, Лит. мат. сб., III, № 2, 1963, 115–121.

APIE VIENĄ TREČIOS EILĖS ERDVINIŲ KREIVIŲ ŠEIMŲ KLASĘ

D. PETRUSKEVIČIŪTĖ

(Reziumė)

Darbe nusakytos aštuonios specialios erdvinių kreivių k^3 šeimos, kurios kiekviename taške liečiasi su kokia tai iš pilnai geodezinių kreivių k^3 šeimų.

ABOUT ONE CLASS FAMILIES OF SPACE CURVES ORDER THREE

D. PETRUSKEVIČIŪTĖ

(Summary)

In this note the eight special families of space curves order three k^3, which in every point touch some one family of completely geodetic families curves k^3, are discovered.