XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–513

К ГЕОМЕТРИИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Р. В. ВОСИЛЮС

В этой работе результаты статьи [2] обобщаются на случай редуктивных однородных пространств. Будем рассматривать факторпространство

$$M=\mathfrak{G}/g$$

связной группы Ли $\mathfrak{G}$ относительно замкнутой подгруппы g. Как известно [1], в этом случае пространство M является связным.

Факторпространство $\mathfrak{G}/g$ называется редуктивным, если в алгебре Ли $\overline{\mathfrak{G}}$ группы Ли $\mathfrak{G}$ существует подпространство $\mathfrak{M}$ вместе с подалгеброй $\bar{g}$ подгруппы g, удовлетворяющее следующим двум соотношениям:

$$\overline{\mathfrak{G}}=\bar{g}+\mathfrak{M} \qquad \text{(прямая сумма)}$$

и

$$Ad_{\mathfrak{G}}(g)\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}.$$

Подпространство $\mathfrak{M}$ называется оснащающим подпространством подалгебры $\bar{g}$. Любая подалгебра полупростой группы оснащаема. В частности, она оснащаема, если подгруппа g компактна, или, в более общем случае, если $Ad_{\mathfrak{G}}(g)$ компактна. Факторпространство $\mathfrak{G}/g$ редуктивно и в том случае, если $(\mathfrak{G}, g)$ является симметрической парой.

С геометрической точки зрения редуктивные однородные пространства можно охарактеризовать как однородные пространства, обладающие каноническими инвариантными аффинными связностями. Эти связности изучались Рашевским [5, 6], Номидзу [4] и другими авторами. Геодезические линии канонических связностей являются траекториями однопараметрических подгрупп группы движений (т. е. группы $\mathfrak{G}$) этого пространства.

Обобщая этот случай, мы будем рассматривать такие инвариантные аффинные связности редуктивного однородного пространства, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп нормальных расширений группы движений. В случае групп Ли этот вопрос был подробно рассмотрен в статье [2]. Здесь мы найдем необходимые и достаточные условия существования таких связностей.

Пусть нам задана некоторая группа Ли G автоморфизмов группы Ли $\mathfrak{G}$, относительно которых подгруппа g инвариантна. Как и в статье [2], через Γ будем обозначать полупрямое произведение этих групп. При этом группы $\mathfrak{G}$ и G мы будем рассматривать как подгруппы полупрямого произведения Γ, вложенные в это пространство при помощи соотношения

$$\Gamma=\mathfrak{G}\times G \qquad \text{(прямое произведение пространств).}$$

Через π_0 будем обозначать естественную проекцию группы Ли $\mathfrak{G}$ в однородное пространство $M=\mathfrak{G}/g$.

Мы видели, что формулой

$$(\beta_0)(a, \beta)=a(\beta_0)\cdot\beta,$$

где

$$a\in G,\ \beta_0,\ \beta\in\mathfrak{G},\ (a, \beta)\in\Gamma,$$

определяется правостороннее действие группы Ли Γ в пространстве группы Ли $\mathfrak{G}$. Используя это мы определили правостороннее действие этой группы в однородном пространстве M.

Пусть $x\in M$ и $\beta_0\in\pi_0^{-1}x$. Точку $y\in M$ будем считать полученной из точки x при помощи сдвига, соответствующего элементу (a, β) группы Ли Γ, если

$$y=\pi_0\Big((\beta_0)(a, \beta)\Big).$$

Покажем, что y не зависит от выбора элемента β_0 в множестве $\pi_1^{-0}(x)$. Пусть β_1 другой элемент этого множества. Это значит, что

$$\beta_1=a\cdot\beta_0,$$

где a — некоторый элемент подгруппы g. Тогда

$$y'=\pi_0\Big((\beta_1)(a, \beta)\Big)=\pi_0\Big(a(a\cdot\beta_0)\cdot\beta\Big)=\pi_0\Big(a(a)\cdot\Big(a(\beta_0)\cdot\beta\Big)\Big).$$

Используя инвариантность подгруппы g относительно группы Γ окончательно имеем:

$$y'=\pi_0\Big(a(a)\cdot\Big(\alpha(\beta_0)\cdot\beta\Big)\Big)=\pi_0\Big(a(\beta_0)\cdot\beta\Big)=y.$$

Легко проверить, что таким образом действительно определено правостороннее действие группы Γ в пространстве M.

В этой статье найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы в пространстве M существовали инвариантные аффинные связности, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Γ относительно этого право-стороннего действия.

Пусть $\Big(a(t), \beta(t)\Big)$ некоторая однопараметрическая подгруппа группы Ли Γ, $x\in M$ и $\beta_0\in\pi_0^{-1}(x)$. Тогда траектория точки x относительно этой однопараметрической подгруппы состоит из точек $y(t)$, задаваемых соотношением такого вида:

$$y(t)=\pi_0\Big(\Big(a(t)(\beta_0)\Big)\cdot\beta(t)\Big).$$

С другой стороны, класс смежности рассматриваемой подгруппы в пространстве Γ с начальной точкой (a_0, β_0) (т. е. орбита этой точки относительно однопараметрической подгруппы) состоит из точек

$$\Big(a_0\cdot a(t),\ \Big(a(t)(\beta_0)\cdot\beta(t)\Big).$$

Это следует из закона умножения в полупрямом произведении [2].

Пусть $\pi_1:\Gamma\to\mathfrak{G}$ означает естественную проекцию пространства Γ в сомножитель $\mathfrak{G}$. Из вышесказанного следует, что траекториями однопараметрических подгрупп в пространстве M являются кривые, получаемые из однопараметрических подгрупп и их классов смежности в группе Ли Γ при помощи проектирования $\pi : \Gamma \to M$, определенного соотношением $\pi = \pi_0 \circ \pi_1$.

Таким образом, кривая пространства M тогда и только тогда является траекторией однопараметрической подгруппы нормального расширения Γ группы движения $\mathfrak{G}$ этого пространства, если в группе Γ существует класс смежности однопараметрической подгруппы π-проектирующийся в эту кривую.

Для заданной в однородном пространстве инвариантной аффинной связности мы найдем кривые пространства M π-проектирующиеся в геодезические линии этой связности. Из вышесказанного следует, что геодезическая линия пространства M тогда и только тогда будет траекторией однопараметрической подгруппы группы Ли Γ, если среди кривых π-проектирующихся в эту геодезическую линию будет содержаться и класс смежности рассматриваемой однопараметрической подгруппы.

Для того, чтобы определить кривые π-проектирующиеся в геодезические линии, мы будем рассматривать формы связностей пространства M, перенесенные в пространство Γ при помощи отображения π. Тогда искомые кривые будут удовлетворять уравнению геодезических линий, написанному относительно перенесенных форм.

Проведем некоторые предварительные построения.

Мы знаем, что

$$\bar{\Gamma} = \bar{\mathfrak{G}} + D,$$

где, кроме того,

$$[D\bar{\mathfrak{G}}] = D\,(\bar{\mathfrak{G}}).$$

В правой части здесь D рассматривается как алгебра дифференцирований алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$, а в левой части D и $\bar{\mathfrak{G}}$ рассматриваются как подалгебры в алгебре Ли $\bar{\Gamma}$ [2].

Используя редуктивную структуру, получаем разложение

$$\bar{\Gamma} = \bar{g} + \mathfrak{M} + D$$

с соотношениями

$$D(\bar{g}) \subseteq \bar{g}, \quad D(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}, \quad [\bar{g}, \mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M}, \tag{1}$$

означающими инвариантность этой структуры относительно группы автоморфизмов.

Пусть $\mathbf{X}$ любое правоинвариантное векторное поле на группе Ли $\mathfrak{G}$. Соотношением

$$\bar{\Omega}\,(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$$

в пространстве группы $\mathfrak{G}$ определим каноническую правоинвариантную 1 — форму $\bar{\Omega}$. Аналогичным образом в пространстве группы Ли G определим каноническую форму $\bar{\Theta}$.

Сущестует естественный изоморфизм t между касательным пространством $T_{(\alpha,\beta)}$ группы Ли Γ в точке (α, β) и касательными пространствами T_α и T_β групп Ли G и $\mathfrak{G}$ в точках α и β:

$$t\,(\dot{\mathbf{X}}) = d\pi_2\,(\dot{\mathbf{X}}) + d\pi_1\,(\dot{\mathbf{X}}).$$

Здесь $\dot{X} \in T_{(\alpha,\beta)}$, $\pi_1 : \Gamma \to \mathfrak{G}$ и $\pi_2 : \Gamma \to G$ естественные проекции произведения Γ на свои сомножители. Для простоты значок t мы будем опускать, т. е. будем писать так:

$$\mathbf{X} = d\pi_2(\mathbf{X}) + d\pi_1(\mathbf{X})$$

для любого поля $\mathbf{X}$ группы Ли Γ.

Это разложение позволяет в пространстве Γ определить формы Ω и Θ:

$$\Omega(\mathbf{X}) = \bar{\Omega}\left(d\pi_1(\mathbf{X})\right),$$

$$\Theta(\mathbf{X}) = \bar{\Theta}\left(d\pi_2(\mathbf{X})\right).$$

Формы Ω и Θ являются π_1 и π_2 – перенесенными в пространство Γ каноническими формами групп $\mathfrak{G}$ и G, соответственно. Отождествляя $\Omega(\mathbf{X})$ и $\Theta(\mathbf{X})$ с соответствующими инвариантными полями на группах $\mathfrak{G}$ и G для любого поля $\mathbf{X}$ группы Ли Γ мы получим следующее соотношение:

$$\mathbf{X} = \Omega(\mathbf{X}) + \Theta(\mathbf{X}). \tag{2}$$

В частности, если $\mathbf{X}$ – правоинвариантное поле группы Γ, то левая часть этого уравнения постоянна, тогда как слагаемые правой части могут меняться. Нам важно найти закон их изменения.

Пусть $\mathbf{X} \in \bar{\Gamma}$, $\left(a(t), \beta(t)\right)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли Γ с этим касательным вектором в единице группы. Траекторией точки $(a_0, \beta_0) \in \Gamma$ относительно этой однопараметрической подгруппы является кривая, состоящая из точек

$$\left(a_0 \cdot a(t), \left(a(t)(\beta_0)\right) \cdot \beta(t)\right).$$

Ее проекцией при π_1 – проектировании является кривая

$$\left(a(t)(\beta_0)\right) \cdot \beta(t)$$

и проекция при π_2 – проектировании кривая

$$a_0 \cdot a(t).$$

Следовательно, $d\pi_1(\mathbf{X})$ в точках подгруппы совпадает с вектором, касательным к кривой

$$\left(a(t)(\beta_0)\right) \cdot \beta(t),$$

а $d\pi_2(\mathbf{X})$ – с вектором, касательным к кривой

$$a_0 \cdot a(t).$$

Однако кривая группы Ли G, состоящая из точек $a(t)$ является однопараметрической подгруппой этой группы. Следовательно $\Theta(\mathbf{X})$ постоянно, если $\mathbf{X}$ правоинвариантно на группе Ли Γ. $\Omega(\mathbf{X})$ не является постоянным и вдоль траектории однопараметрической подгруппы меняется так, как меняется касательный вектор к кривой

$$a(t)(\beta_0),$$

т.е. как меняются значения в единице группы $\mathfrak{G}$ правоинвариантных полей, касающихся этой кривой в тех точках, через которые она проходит.

Из сказанного видно, что кривая $a(t)$ в единице группы касается вектора $\Theta(\mathbf{X})$. Таким образом

$$\frac{d\Omega(\mathbf{X})}{dt} = [\Theta(\mathbf{X}),\ \Omega(\mathbf{X})], \quad \frac{d\Theta(\mathbf{X})}{dt} = 0 \tag{3}$$

вдоль рассматриваемой однопараметрической подгруппы.

Через $\tilde{B}(\mathfrak{G})$ и $B(M)$ обозначим расслоенные пространства реперов группы Ли $\mathfrak{G}$ и редуктивного однородного пространства $M = \mathfrak{G}/g$. Разложение

$$\bar{\mathfrak{G}} = g + \mathfrak{M} \tag{4}$$

позволяет определить дифференцируемое подмногообразие $B(\mathfrak{G})$ многообразия $\tilde{B}(\mathfrak{G})$, состоящее из инвариантных сечений реперов, адаптированных этому разложению. Дифференциал канонического отображения $\pi_0 : \mathfrak{G} \to M$ индуцирует изоморфизм компоненты $\mathfrak{M}$ касательного пространства в точках группы $\mathfrak{G}$ (т. е. компоненты, получаемой при помощи правых сдвигов из вышеуказанного разложения) на касательные пространства в соответствующих точках многообразия M. Следовательно, оно индуцирует отображение расслоений:

$$\pi_B : B(\mathfrak{G}) \to B(M).$$

Фиксация любого базиса алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$, адаптированного разложению (4), задает секущую поверхность

$$\mu : \mathfrak{G} \to B(\mathfrak{G})$$

расслоения $B(\mathfrak{G})$.

Мы получаем такую последовательность пространств и их отображений:

$$\Gamma \xrightarrow{\pi_1} \mathfrak{G} \xrightarrow{\mu} B(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\pi_B} B(M). \tag{5}$$

В пространстве $B(M)$, независимо от связностей, всегда существует горизонтальная 1 — форма $\bar{\omega}$, называемая формой смещения. Она определяется следующим образом: пусть $t \in B(M)_b$ (касательное пространство к $B(M)$ в точке b), тогда

$$\bar{\omega}(t) = b^{-1}(d\pi_{B(M)}\, t),$$

где $\pi_{B(M)}$ означает каноническое проектирование расслоения $B(M)$ и b рассматривается как отображение евклидового пространства $R^{\dim M}$ на касательное пространство $M_{\Pi_{B(M)}(b)}$ [7].

Как известно, аффинная связность в пространстве M задается в пространстве $B(M)$ определенной формой $\bar{\varphi}$ со значениями в алгебре Ли линейной группы, вместе с формой смещения $\bar{\omega}$ удовлетворяющей структурным уравнениям такого вида (связность с нулевым кручением):

$$d\bar{\omega} = -\bar{\varphi}\,\bar{\omega},$$

$$d\bar{\varphi} = -\frac{1}{2}\,\overline{[\bar{\varphi}\,\bar{\varphi}]} + \bar{\Phi}.$$

Теперь определим некоторое действие группы Ли $\mathfrak{G}$ в пространстве $B(M)$. Пусть $b \in B(M)$ и $b = (x;\, l_1,\ \ldots,\ l_{\dim M})$. По определению

$$\beta(b) = \Big(\beta(x);\ d\beta(l_1),\ \ldots,\ d\beta(l_{\dim M})\Big),$$

где $\beta \in \mathfrak{G}$ и $\beta(x)$ означает действие β на точку x пространства M.

Аффинная связность в пространстве M инвариантна относительно группы движения $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, если форма $\bar{\varphi}$ этой связности инвариантна в пространстве $B(M)$ относительно только что определенного в этом пространстве действия группы Ли $\mathfrak{G}$.

При помощи последовательности отображений (5) перенесем форму $\bar{\omega}$ в пространство Г. Перенесенную форму будем обозначать через ω. По определению для поля $\mathbf{X}$ пространства Г имеем:

$$\omega(\mathbf{X})=\bar{\omega}\left(d\pi_B \circ d\mu \circ d\pi_1(\mathbf{X})\right),$$

что можно написать и следующим образом:

$$\omega(\mathbf{X})=\bar{\omega}\left(d\pi_B \circ d\mu\left(\Omega(\mathbf{X})\right)\right).$$

По определению ω является $R^{\dim M}$ – значной формой. При помощи сечения μ мы можем $R^{\dim M}$ отождествить с подпространством $\mathfrak{M}$. По смыслу отображения π_B тогда $\omega(\mathbf{X})$ совпадает с проекцией вектора $\Omega(\mathbf{X})$ на подпространство $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\sigma(\mathbf{X})$ проекцию этого вектора на подпространство $\bar{g}$. В таких обозначениях

$$\Omega(\mathbf{X})=\omega(\mathbf{X})+\sigma(\mathbf{X})$$

для любого поля $\mathbf{X}$ на группе Ли Г. Аналогично

$$\mathbf{X}=\omega(\mathbf{X})+\sigma(\mathbf{X})+\Theta(\mathbf{X}). \tag{6}$$

Посредством последовательности отображений (5) снесенную в пространство Г форму связности $\bar{\varphi}$ будем обозначать через φ, а форму кручения через Φ. Эти формы тогда будут уровлетворять следующим соотношениям:

$$d\omega=-\varphi\omega,$$

$$d\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi\varphi]+\Phi.$$

Применяя первое структурное уравнение к полям $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ группы Ли Г, для которых $\Omega(\mathbf{X})$ и $\Omega(\mathbf{Y})$ являются инвариантными полями на группе Ли $\mathfrak{G}$, а $\Theta(\mathbf{X})$ и $\Theta(\mathbf{Y})$ инвариантными полями на группе Ли G (разложение (6) показывает, что из таких полей можно составить базис модуля касательных полей группы Г), получаем:

$$-\omega([\mathbf{XY}])=-\varphi(\mathbf{X})\,\omega(\mathbf{Y})+\varphi(\mathbf{Y})\omega(\mathbf{X}).$$

Используя разложение (6) и соотношения (1) это уравнение представим в таком виде:

$$-\omega\left(\left[\frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{X})+\sigma(\mathbf{X})+\Theta(\mathbf{X}),\ \omega(\mathbf{Y})\right]\right)+\omega\left(\left[\frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{Y})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma(\mathbf{Y})+\Theta(\mathbf{Y}),\ \omega(\mathbf{X})\right]\right)=-\varphi(\mathbf{X})\omega(\mathbf{Y})+\varphi(\mathbf{Y})\omega(\mathbf{X}).$$

Отсюда видно, что форма

$$\varphi=\omega\circ\left(\frac{1}{2}\,ad\omega+ad\sigma+ad\Theta\right) \tag{7}$$

является решением этого уравнения. Из вида формы следует, что

$$\varphi(\mathbf{X})(\mathbf{Y})=\omega\left(ad\left(\mathbf{X}-\frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{X})\right)\left(\omega(\mathbf{Y})\right)\right).$$

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ инвариантные поля на группе Ли $\mathfrak{G}$, то $\varphi(\mathbf{X})(\mathbf{Y})$ инвариантное поле. Следовательно, ограничение формы φ на группы $\mathfrak{G}$ дает инвариантную форму.

Аналогично тому, как мы определили действие группы Ли $\mathfrak{G}$ в пространстве $B(M)$, можно определить ее действие в пространстве $B(\mathfrak{G})$. По определению $B(\mathfrak{G})$ состоит из инвариантных адаптированных разложению (4) сечений, следовательно, диффеоморфно прямому произведению пространства $\mathfrak{G}$ с пространством адаптированных разложению (4) реперов алгебры Ли $\bar{\mathfrak{G}}$. Отсюда следует, что при отображении $\mu : \mathfrak{G} \to B(\mathfrak{G})$ форма пространства $B(\mathfrak{G})$ переходит в инвариантную форму пространства $\mathfrak{G}$ в том и только в том случае, если она инвариантна относительно векторных полей пространства $B(\mathfrak{G})$, касательных к этому сечению. Так как инвариантные поля пространства $B(\mathfrak{G})$ состоят из векторов, касательных к таким сечениям, а наши построения не должны зависеть от выбора отображения μ, то мы можем считать, что форма φ получается из инвариантной формы пространства $B(\mathfrak{G})$ перенесением ее в пространство $\mathfrak{G}$ при помощи отображения μ. Другими словами, так как независимо от выбора отображения μ мы в пространстве $\mathfrak{G}$ получаем инвариантную форму, то она до перенесения должна была быть инвариантной формой пространства $B(\mathfrak{G})$.

В таком случае, до перенесения в пространство $B(\mathfrak{G})$ эта форма должна была быть инвариантной в пространстве $B(M)$. Это просто следует из того что π_B — проекции инвариантных полей пространства $B(\mathfrak{G})$ являются инвариантными полями в пространстве $B(M)$. Тем самым φ является π — перенесенной в пространство Γ инвариантной формой просранства $B(M)$.

Для вышеуказанных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ имеем:

$$d\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\varphi([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = -\omega\left(ad[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \frac{1}{2}\,\omega[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right)\circ\omega$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2}[\varphi\varphi](\mathbf{X}, \mathbf{Y})\circ\omega = [\varphi(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{Y})]\circ\omega = \varphi(\mathbf{X})\left(\omega\left(ad\left(\mathbf{Y} - \frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{Y})\right)\right)\right)\circ\omega - \varphi(\mathbf{Y})\left(\omega\left(ad\left(\mathbf{X} - \frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{X})\right)\right)\right)\circ\omega.$$

Используя соотношение

$$ad[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [ad\mathbf{X}, ad\mathbf{Y}],$$

находим:

$$\frac{1}{2}[\varphi\varphi](\mathbf{X}, \mathbf{Y})\circ\omega = \omega\left(ad\left[\mathbf{X} - \frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{X}),\ \mathbf{Y} - \frac{1}{2}\,\omega(\mathbf{Y})\right]\right)\circ\omega.$$

Тем самым

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\circ\omega = \frac{1}{2}\,\omega\left(ad\omega[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - ad[\omega(\mathbf{X}), \mathbf{Y}] - ad[\mathbf{X}, \omega(\mathbf{Y})] + \frac{1}{2}\,ad[\omega(\mathbf{X}), \omega(\mathbf{Y})]\right)\circ\omega.$$

При помощи разложения (6) и соотношения (1), находим:

$$\omega[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \omega[\omega(\mathbf{X}), \omega(\mathbf{Y})] + [\omega(\mathbf{X}), \sigma(\mathbf{Y})] + [\omega(\mathbf{X}), \Theta(\mathbf{Y})] + [\sigma(\mathbf{X}), \omega(\mathbf{Y})] + [\Theta(\mathbf{X}), \omega(\mathbf{Y})].$$

Это приводит к окончательному результату:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \circ \omega = \frac{1}{2}\, \omega\left(ad\omega\, [\omega(\mathbf{X}), \omega(\mathbf{Y})] - \frac{3}{2}\, ad\, [\omega(\mathbf{X}), \omega(\mathbf{Y})]\right) \circ \omega.$$

Тем самым мы доказали, что форма (7) является снесенной в пространство Г формой инвариантной аффинной связности однородного редуктивного пространства M.

Этой формой определяется каноническая связность первого рода редуктивного пространства.

Любую другую связность редуктивного пространства можно задать добавлением к форме связности 1 – формы типа adj со значениями в алгебре Ли линейной группы [3]. π-перенесенную в пространство Г, эту форму будем обозначать через γ. Тогда

$$\left(\gamma(\mathbf{X})\right)(\mathbf{Y}) = \left(\gamma(\mathbf{X})\right)\left(\omega(\mathbf{Y})\right)$$

для любых полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ на группе Ли Г. Новая связность тоже будет связностью без кручения, если форма γ будет удовлетворять условию симметрии

$$\left(\gamma(\mathbf{X})\right)(\mathbf{Y}) = \left(\gamma(\mathbf{Y})\right)(\mathbf{X}).$$

Так как мы будем рассматривать только связности без кручения, то вместо $\left(\gamma(\mathbf{X})\right)(\mathbf{Y})$ будем писать $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Как известно [8], связность, заданная при помощи формы γ, будет инвариантной связностью однородного пространства M, если для всех полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ группы Ли Г и любого поля $\mathbf{Z}$ этой группы, удовлетворяющего соотношению

$$\Theta(\mathbf{Z}) = 0, \quad \omega(\mathbf{Z}) = 0$$

выполнено условие такого вида:

$$[\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}] - \gamma(\mathbf{X}, \omega[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]) - \gamma(\omega[\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}) = 0. \tag{8}$$

Геодезические линии рассматриваемой связности являются π-проекциями кривых пространства Г, удовлетворяющих уравнению

$$\left(\mathbf{X}_* + (\varphi + \gamma)(\mathbf{X}_*)\right)\left(\omega(\mathbf{X}_*)\right) = 0,$$

т.е. уравнению геодезических линий относительно перенесенной формы связности. Более подробно это уравнение можно написать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\, \omega(\mathbf{X}_*) = -\left([\sigma(\mathbf{X}_*), \omega(\mathbf{X}_*)] + [\Theta(\mathbf{X}_*), \omega(\mathbf{X}_*)] + \gamma(\omega(\mathbf{X}_*), \omega(\mathbf{X}_*)\right).$$

Здесь t – канонический параметр кривой, $\mathbf{X}_*$ – касательный вектор.

С другой стороны, вдоль однопараметрических подгрупп и их классов смежности в пространстве Г выполнены соотношения (3). Из разложения (6) следует

$$\frac{d}{dt}\, \omega(\mathbf{X}_*) = [\Theta(\mathbf{X}_*), \omega(\mathbf{X}_*)], \quad \frac{d}{dt}\, \Theta(\mathbf{X}_*) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\, \sigma(\mathbf{X}_*) = [\Theta(\mathbf{X}_*), \sigma(\mathbf{X}_*)]$$

вдоль однопараметрических подгрупп группы Ли Г.

Если кривые на многообразии совпадают, то совпадают производные касательных векторов вдоль этих кривых. Для совпадения геодезической линии с траекторией однопараметрической подгруппы это приводит к условию

$$[\Theta(\mathbf{X}_*),\ \omega(\mathbf{X}_*)]+\frac{1}{2}\Big([\sigma(\mathbf{X}_*),\ \omega(\mathbf{X}_*)]+\gamma\Big(\omega(\mathbf{X}_*),\ \omega(\mathbf{X}_*)\Big)\Big)=0. \qquad (9)$$

Следовательно, однопараметрическая подгруппа группы Ли Γ тогда и только тогда π – проектируется в геодезическую линию пространства M, если вдоль нее выполняется соотношение (9).

Обозначим через $\mathbf{S}_1$ левую часть этого уравнения. Построим безконечную последовательность $\mathbf{S}_\alpha$ векторов подпространства $\mathfrak{M}$ при помощи такого соотношения:

$$\frac{dS_\alpha}{dt}=S_{\alpha+1}, \qquad (10)$$

где дифференцирование в левой части уравнений происходит вдоль рассматриваемой однопараметрической подгруппы.

Так как $\Theta(\mathbf{X}_*)=\mathrm{const}$, то $\Theta(\mathbf{X}_*)$ является вектором пространства D, который мы обозначим через b. Если $\mathbf{Y}\in\bar{\Gamma}$ любой вектор этого пространства, то $[b\,\mathbf{Y}]$ будем обозначать через $a_b\,\mathbf{Y}$, $\big[b\,[b\mathbf{Y}]\big]$ – через $a_b^2\,\mathbf{Y}$ и т.д. При этом $a_b^0\,\mathbf{Y}$ будет означать вектор $\mathbf{Y}$.

Используя полную математическую индукцию можно доказать, что

$$\mathbf{S}_\alpha=a_b^\alpha\,\omega(\mathbf{X}_*)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{p,\,q\\ p+q=\alpha-1}}\Big[\binom{p}{\alpha-1}\Big([a_b^p\,\sigma(\mathbf{X}_*),\ a_b^q\,\omega(\mathbf{X}_*)]+$$
$$+\gamma\Big(a_b^p\,\omega(\mathbf{X}_*),\ a_b^q\,\omega(\mathbf{X}_*)\Big)\Big)\Big],$$

для

$$\alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Как это следует из уравнений (10), не только вектор $\mathbf{S}_1$, но и все векторы $\mathbf{S}_\alpha$ должны тождественно обратиться в нуль вдоль рассматриваемой однопараметрической подгруппы.

Пусть через заданную начальную точку, в которой канонический параметр обращается в нуль, геодезическая линия проходит по направлению заданного вектора. При соответствующем изоморфизме, отождествляя касательное пространство многообразия M с соответствующим подпространством касательного пространства группы Ли $\mathfrak{G}$ в точке π_0 – проектирующейся в начальную точку, будем считать, что через эту точку геодезическая линия проходит по направлению вектора

$$a\in\mathfrak{M}.$$

Это имеет смысл, так как векторы, $d\pi_0$ – связанные с данным вектором пространства M, принадлежащие к касательным пространствам группы Ли $\mathfrak{G}$ в точках, π_0 – проектирующихся в одну точку, принадлежит одному правоинвариантному полю группы Ли $\mathfrak{G}$.

Совершенно также, как в статье [2], можно доказать, что среди векторов последовательности S_α только r первых являются линейно независимыми, а остальные через эти векторы выражаются линейно с постоянными относительно канонического параметра коэффициентами. Таким образом, как это видно из системы (10), достаточно, чтобы в начальной точке эти векторы обратились в нуль для того, чтобы все векторы последовательности S_α были тождественно равны нулю вдоль однопараметрической подгруппы, т. е. чтобы однопараметрическая подгруппа π–проектировалась в геодезическую линию однородного пространства M.

Следовательно, если геодезическая линия через начальную точку проходит по направлению вектора a, то однопараметрические подгруппы группы Ли Г, траекторией которых она является, проходят через единицу группы Ли Г по направлениям векторов $\mathbf{X}$, таких, что

$$\omega(\mathbf{X})=a$$

в точках π–проектирующихся в начальную точку геодезической линии ($\mathbf{X}$ рассматривается как правоинвариантное поле группы Ли Г) и таких, что

$$S_1(\mathbf{X})=0, \ \ldots, \ S_r(\mathbf{X})=0$$

в этих точках. Это имеет смысл, т. к. инвариантное поле группы Ли Г при помощи проекции π_1 отображается в поле на группе Ли $\mathfrak{G}$ (π_1 – проекция кривой $\left(a_0 \cdot a(t), \left(a(t)(\beta_0)\right) \cdot \beta(t)\right)$ не зависит от a_0). Таким образом, вектор $\mathbf{X}$ определяется выбором вектора $b=\Theta(\mathbf{X}_*)$ и вектора $c=\sigma(\mathbf{X})$, где последнее равенство рассматривается в точке π–проектирующейся в начальную точку геодезической линии.

Мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Множество однопараметрических подгрупп группы Ли Г, траекторией которых является геодезическая линия инвариантной аффинной связности однородного редуктивного пространства M, в начальной точке проходящая по направлению вектора a, находится во взаимно–однозначном соответствии с множеством решений системы уравнений*

$$S_1(b, c)=0, \ \ldots, \ S_r(b, c)=0, \tag{11}$$

левые части которых построены по формуле

$$S_\alpha(b, c)=a_b^\alpha a+\frac{1}{2}\sum_{\substack{p,\, q\\ p+q=\alpha-1}}\binom{p}{\alpha-1}\left([a_b^p c, a_b^q a]+\gamma(a_b^p a, a_b^q a)\right).$$

Через единицу группы Ли Г эти подгруппы проходят по направлению векторов $a+b+c$.

Сейчас мы переходим к связностям, все геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Г. Это значит, что для любого вектора $a\in\mathfrak{M}$ можно найти такие векторы $b\in D$ и $c\in\bar{g}$, чтобы все они удовлетворяли уравнениями (11). Это определяет неявные функции

$$b=b(a), \ c=c(a).$$

Как и в случае [2], мы предполагаем, что существует точка $(0, b_0, c_0) \in D \times \bar{g}$ такая, что в некоторой ее окрестности эти функции аналитичны. Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} b^\sigma = b_0^\sigma + b_K^\sigma a^K + b_{KL}^\sigma a^K a^L + \ldots \\ c^\mu = c_0^\mu + c_K^\mu a^K + c_{KL}^\mu a^K a^L + \ldots \\ K = 1,\ 2,\ \ldots,\ \dim \mathfrak{G},\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ \dim G, \\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \dim g \end{array}\right\} \qquad (12)$$

для любого вектора a окрестности нуля в пространстве $\mathfrak{M}$.

Подставляя выражения (12) в соотношения (11), мы должны получить тождества относительно векторов a из указанной окрестности. Подставляя эти выражения для b^σ и c^μ в уравнение $S_1(b, c) = 0$ и приравнивая нулю коэффициент при произведении $a^K a^L$ получаем:

$$\gamma(x, y) = [x, \xi(y)] + [y, \xi(x)] + \frac{1}{2}\Big([x, \lambda(y)] + [y, \lambda(x)]\Big) \qquad (13)$$

для произвольных векторов x и $y \in \mathfrak{M}$. Здесь ξ означает линейное преобразование пространства $\mathfrak{M}$ в пространство D, заданное матрицей b_K^σ, а λ означает линейное преобразование этого же пространства в пространство $\bar{g}$, заданное при помощи матрицы c_K^μ.

Используя это соотношение, получаем:

$$S_\alpha(a, b) = a_b^\alpha a + \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,\, q \\ p+q=\alpha-1}} \binom{p}{\alpha-1} \Big[[a_b^p c,\ a_b^q a] + [a_b^p a,\ \xi(a_b^q a)] +$$

$$+ [a_b^q a,\ \xi(a_b^p a)] + \frac{1}{2}\Big([a_b^p a,\ \lambda(a_b^q a)] + [a_b^q a,\ \lambda(a_b^p a)]\Big)\Big].$$

Эти выражения должны тождественно обратиться в нуль. Выберем в них члены, содержащие только линейные части разложения (12). Они имеют такой вид:

$$a_{\xi(a)}^\alpha a + \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,\, q \\ p+q=\alpha-1}} \binom{p}{\alpha-1} \Big[[a_{\xi(a)}^p \lambda(a),\ a_{\xi(a)}^q a] + [a_{\xi(a)}^p a,\ \xi(a_{\xi(a)}^q a)] +$$

$$+ [a_{\xi(a)}^q a,\ \xi(a_{\xi(a)}^p a)] + \frac{1}{2}\Big([a_{\xi(a)}^p a,\ \lambda(a_{\xi(a)}^q a)] + [a_{\xi(a)}^q a,\ \lambda(a_{\xi(a)}^p a)]\Big)\Big]. \qquad (14)$$

По смыслу разложения (12) [2], точка $(a_0, b_0, c_0) \in \bar{\Gamma}$ $\Big($где b_0 и c_0 векторы с компонентами b_0^σ и c_0^μ соответственно, а вектор a_0 связан с ними ссотношениями $b_0 = b(a_0)$, $c_0 = c(a_0)\Big)$, является точкой этого пространства, в которой якобиан

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial S_\alpha^I}{\partial b^\sigma} \\ \dfrac{\partial S_\alpha^I}{\partial c^\mu} \end{Vmatrix}$$

имеет максимальный ранг. Мы будим считать, что в этой точке $c_0 = 0$. Класс таких связностей условно назовем аналитическим. В таком случае член (14), как моном относительно a^I, не имеет себе подобных членов. Действительно, приравнивая нулю коэффициент в уравнении $S_1 = 0$ при a^K получаем

$$[b_0, a] = 0 \qquad (15)$$

для всех векторов a указанной окрестности нуля, а в виду однородности соотношения и для всех векторов пространства. Как моном относительно a^I, выражение (14) является $\mathfrak{a}+1$-вой степени. Следовательно, все мономы, подобные этому выражению, должны содержать $b_0^{\mathfrak{a}}$. В виду соотношения (15), все они равны нулю.

Таким образом, выражение (14) должно обращаться в нуль. При этом член $a^{\mathfrak{a}}_{\xi(a)}\, a$ сокращается с членами, которые получаются из

$$[a^p_{\xi(a)} a,\ \xi(a^q_{\xi(a)} a)] \text{ и } [a^q_{\xi(a)} a,\ \xi(a^p_{\xi(a)} a)]$$

при $p=0$ в первом и $q=0$ во втором.

Мы получаем условие

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{(p,\,q)\\ p+q=\mathfrak{a}-1\\ p\neq 0,\ q\neq 0}} \binom{p}{\mathfrak{a}-1} \Big([a^{(p}_{\xi(a)} a,\ \xi(a^{q)}_{\xi(a)} a)] + [a,\ \xi(a^{\mathfrak{a}-1}_{\xi(a)} a)] +$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{\substack{(p,\,q)\\ p+q=\mathfrak{a}-1}} \binom{p}{\mathfrak{a}-1} [a^{(p}_{\xi(a)} a,\ \lambda(a^{q)}_{\xi(a)} a)] +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{\substack{p,\,q\\ p+q=\mathfrak{a}-1}} \binom{p}{\mathfrak{a}-1} [a^p_{\xi(a)} \lambda(a),\ a^q_{\xi(a)} a] = 0, \tag{16}$$

которое должно выполняться для любого вектора $a \in \mathfrak{M}$.

Таким образом, если все геодезические линии инвариантной аффинной связности редуктивного однородного пространства M являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Г, то существуют линейные отображения

$$\xi : \mathfrak{M} \to D,\ \lambda : \mathfrak{M} \to \bar{g} \tag{17}$$

такие, что рассматриваемая связность определяется этими отображениями формулой (13), а сами отображения удовлетворяют условию (16). Условия (8) инвариантности этой связности налагают на отображения ξ и λ еще одно соотношение:

$$\Big[y\,[\xi(x),\ z]\Big] + \Big[x\,[\xi(y),\ z]\Big] + \Big[\xi([y,\ z])\,x\Big] + \Big[\xi([x,\ z])\ y\Big] +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Big[y\,[\lambda(x),\ z]\Big] + \Big[x\,[\lambda(y),\ z]\Big] + \Big[\lambda([y,\ z])\,x\Big] + \Big[x\,[\lambda([x,\ z])\,y\Big]\right) = 0. \tag{18}$$

Здесь x, y — произвольные векторы пространства $\mathfrak{M}$, z — произвольный вектор подпространства $\bar{g}$.

Сейчас легко доказать обратное утверждение: если существуют отображения (17) и они удовлетворяют условиям (18), (16), то формула (13) в пространстве M определяет инвариантную аффинную связность, геодезические линии которой являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли Г.

Действительно, определим функции $b=b(a)$ и $c=c(a)$ посредством соотношений

$$b=\xi(a),\ c=\lambda(a).$$

Тогда выражения $S_{\mathfrak{a}}(b,\ c)$ будут содержать только члены вида (14), которые, в силу условия (16) равны нулю. Это и доказывает утверждение.

Теорема 2. *В случае аналитичности тогда и только тогда геодезические линии инвариантной аффинной связности редуктивного однородного пространства являются траекториями однопараметрических подгрупп полупрямого произведения* Г *группы движений* $\mathfrak{G}$ *этого пространства с некоторой группой* G *ее автоморфизмов, если существуют линейные отображения* (17), *удовлетворяющие условиям* (16) и (13). С *другой стороны в редуктивном однородном пространстве* M *тогда и только тогда существуют инвариантные аффинные связности, геодезические линии которых являются траекториями однопараметрических подгрупп группы Ли* Г *и которые аналитичны, если существуют линейные отображения* (17), *удовлетворяющие условиям* (16) и (18).

Следствие. Инвариантная аффинная связность однородного редуктивного пространства имеет геодезические линии, совпадающие с траекториями однопараметрических подгрупп группы движения $\mathfrak{G}$, если существует линейное отображение

$$\lambda : \mathfrak{M} \to \bar{g}$$

такое, что

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2}\left([x, \lambda(y)] + [y, \lambda(x)]\right)$$

для всех векторов $x, y \in \mathfrak{M}$.

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакции 3.VII.1968

Литература

1. Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры, Из-во физ. мат. литературы, 1958.
2. Р. В. Восилюс, Об одном классе инвариантных аффинных связностей на группах Ли, Лит. матем. сб., **VIII**, № 4 (1968).
3. Лихнерович, Теория связаностей в целом и группы голономий, Из-во иностранной литературы, Москва, 1960.
4. K. Nomizu, Amer. Journ. Math., vol. 76, N 1 (1954), 33—65.
5. П. К. Рашевский, ДАН СССР, 80, № 2, (1951), 169—171.
6. П. К. Рашевский, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, т. **VIII**, М. (1950), 82—92.
7. Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, «Мир», Москва, 1967.
8. А. М. Васильев, Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах, известия высших учебных заведений, Математика, 1959, № 9.

HOMOGENINIŲ ERDVIŲ GEOMETRIJOS KLAUSIMU

R. VOSYLIUS

(*Reziumė*)

Darbe [2] straipsnio rezultatai yra apibendrinami reduktyvinių homogeninių erdvių atvejui.

ZUR FRAGE DER GEOMETRIE DER HOMOGENEN RÄUME

R. VOSYLIUS

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden Arbeit wer den die Resultaten des Artikels [2] für den Fall der reduktiven homogenen Räume verallgemeinert.