IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1969

УДК–513

О НЕГОЛОНОМНОМ КОМПЛЕКСЕ

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС

В последние годы неголономной геометрией заинтересовались многие геометры как в СССР, так и в других странах.

Геометрия неголономных поверхностей хорошо освещена в работах В.В. Вагнера [1], С.С. Бюшгенса [2] и других. Задачи неголономной геометрии тесно связаны с геометрией систем дифференциальных уравнений. Эта статья посвящается неголономному комплексу.

В работе основным аппаратом исследования является теоретико-групповой метод дифференциально-геометрического исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым [3].

Определение. Фундаментальный геометрический объект $H(3, 1, 3)$ первого порядка [3] луча l комплекса прямых $G(3, 1, 3)$ в трехмерном проективном пространстве P_3 определяет проективное соответствие K между точками луча l и плоскостями, проходящими через l [4].

Если комплекс прямых, описываемый лучом $l \equiv A_1A_2$, задан дифференциальными уравнениями [5] (после фиксации трех вторичных параметров)

$$\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0,$$

$$[\omega_3^4 - \omega_2^1,\ \omega_1^3] + [\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4,\ \omega_1^4] + [\omega_4^3 - \omega_1^2,\ \omega_2^4] = 0,$$

то проективное соответствие K принимает вид:

$$K: A_1 + tA_2 \rightleftarrows x^3 - tx^4 = 0, \qquad (1)$$

где $\{A_i\}$ – подвижной репер, x^i – координаты точки относительно $\{A_i\}$,

$$dA_i = \omega_i^j A_j,\ D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]\ (i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Неголономным комплексом назовем четырехмерное многообразие прямых l пространства P_3, для прямых которого задано проективное соответствие K между точками прямой l и плоскостями, проходящими через l .

Дифференциальные уравнения. Будем считать, что проективное соответствие K в случае неголономного комплекса приведено к виду (1). Тогда неподвижность прямой l в P_3 и инвариантность соответствия (1) определяются уравнениями

$$\omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_3^4 - \omega_2^1 = \omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = \omega_4^3 - \omega_1^2 = 0.$$

Эта система вполне интегрируема, и первые интегралы ее являются координатами образующего элемента

{прямая A_1A_2, соответствие $K: A_1 + tA_2 \rightleftarrows x^3 - tx^4 = 0$}

неголономного комплекса $NG(3, 1, 3)$.

Для неголономного комплекса базисными формами целесообразно считать

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4-\omega_2^3,\ \omega_2^4 \text{ и } \omega_1^4+\omega_2^3.$$

Тогда неголономный комплекс определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_3^4-\omega_2^1=h_{3333}\omega_1^3+\left(h_{3334}-\frac{1}{4}h_{33}\right)(\omega_1^4-\omega_2^3)+$$
$$+\left(h+\frac{1}{2}h_{34}-h_{3344}\right)\omega_2^4+g_{33}(\omega_1^4+\omega_2^3),$$
$$\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4=\left(2h_{3334}+\frac{1}{2}h_{33}\right)\omega_1^3+(2h_{3344}+h)(\omega_1^4-\omega_2^3)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}h_{44}-2h_{3444}\right)\omega_2^4+2g_{34}(\omega_1^4+\omega_2^3),$$
$$\omega_4^3-\omega_1^2=\left(h-\frac{1}{2}h_{34}-h_{3344}\right)\omega_1^3-\left(h_{3444}+\frac{1}{4}h_{44}\right)(\omega_1^4-\omega_2^3)+$$
$$+h_{4444}\omega_2^4-g_{44}(\omega_1^4+\omega_2^3); \qquad (2)$$

$$[\nabla h_{3333}+\omega_{3333},\ \omega_1^3]+\left[\nabla h_{3334}-\frac{1}{4}(\nabla h_{33}+\omega_{33}),\ \omega_1^4-\omega_2^3\right]+$$
$$+\left[dh+\frac{1}{2}h(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha)-\omega_4^1-\omega_3^2+\omega+\frac{1}{2}(\nabla h_{34}+\omega_{34})-(\nabla h_{3344}+\right.$$
$$\left.+\omega_{3344}),\ \omega_2^4\right]+\left[\nabla g_{33}-\omega_3^1+\Omega_{33}-\frac{h}{2}(\omega_3^4-\omega_2^1),\ \omega_1^4+\omega_2^3\right]=0, \qquad (2а)$$

$$\left[2(\nabla h_{3334}+\omega_{3334})+\frac{1}{2}(\nabla h_{33}+\omega_{33}),\ \omega_1^3\right]+$$
$$+\left[2(\nabla h_{3344}+\omega_{3344})+dh+\frac{1}{2}h(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha)-\omega_4^1-\omega_3^2+\omega,\ \omega_1^4-\omega_2^3\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}(\nabla h_{44}+\omega_{44})-2(\nabla h_{3444}+\omega_{3444}),\ \omega_2^4\right]+$$
$$+\left[2(\nabla g_{34}+\Omega_{34})+\omega_3^2-\omega_4^1+\frac{h}{2}(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4),\ \omega_1^4+\omega_2^3\right]=0, \qquad (2б)$$

$$\left[dh+\frac{1}{2}h(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha)-\omega_4^1-\omega_3^2+\omega-\frac{1}{2}(\nabla h_{34}+\omega_{34})-\nabla h_{3344}-\omega_{3344},\ \omega_1^3\right]-$$
$$-\left[\nabla h_{3444}+\omega_{3444}+\frac{1}{4}(\nabla h_{44}+\omega_{44}),\ \omega_1^4-\omega_2^3\right]+[\nabla h_{4444}+\omega_{4444},\ \omega_2^4]-$$
$$-\left[\nabla g_{44}+\Omega_{44}+\omega_4^2+\frac{h}{2}(\omega_4^3-\omega_1^2),\ \omega_1^4+\omega_2^3\right]=0, \qquad (2в)$$

где

$$\nabla L_{\alpha\beta}=dL_{\alpha\beta}-2L_{\gamma(\beta}\omega_{\alpha)}^\gamma+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}(\omega_p^p+\omega_\gamma^\gamma),$$
$$\nabla h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}=dh_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}-4h_{\iota(\beta\gamma\varepsilon}\omega_{\alpha)}^\iota+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}(\omega_p^p+3\omega_\iota^\iota);$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \iota=3,\ 4; \qquad p,\ q=1,\ 2;$$
$$2\Theta_3^4=\omega_3^4-\omega_2^1,\ 4\Theta_4^4=-4\Theta_3^3=\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4,\ 2\Theta_4^3=\omega_4^3-\omega_1^2,$$
$$\omega_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}=4h_{\iota(\beta\gamma\varepsilon}\Theta_{\alpha)}^\iota+h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}(g_{3\iota}\omega_1^\iota-g_{4\iota}\omega_2^\iota),$$
$$\omega_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}(g_{3\gamma}\omega_1^\gamma-g_{4\gamma}\omega_2^\gamma)+2h_{\gamma(\beta}\Theta_{\alpha)}^\gamma-8g_{\gamma(\beta}\Theta_{\alpha)}^\gamma,$$
$$\omega=h(g_{3\gamma}\omega_1^\gamma-g_{4\gamma}\omega_2^\gamma),$$
$$\Omega_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(g_{3\gamma}\omega_1^\gamma-g_{4\gamma}\omega_2^\gamma)+2h_{\alpha\beta\gamma[4}\Theta_{3]}^\gamma-\frac{1}{2}h_{\gamma(\beta}\Theta_{\alpha)}^\gamma+2g_{\gamma(\beta}\Theta_{\alpha)}^\gamma.$$

Будем считать, что $h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$, $h_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ являются симметричными относительно всех индексов. Дифференциальные формы

$$\omega_{\alpha\beta\gamma\varepsilon},\ \omega_{\alpha\beta},\ \Omega_{\alpha\beta} \text{ и } \omega$$

зависят линейно только от базисных форм, т.е. не зависят от дифференциалов вторичных параметров.

Развернув квадратичные уравненя (2а), (2б), (2в) линейными уравнениями по лемме Картана, получаем:

$$\nabla h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}+(\ldots)=0, \tag{3}$$

$$\nabla h_{\alpha\beta}+(\ldots)=0, \tag{4}$$

$$\nabla g_{\alpha\beta}-\epsilon_{p(\alpha}\omega^{p}_{\beta)}+(\ldots)=0, \tag{5}$$

$$dh+\frac{1}{2}h\,(\omega^{p}_{p}-\omega^{\alpha}_{\alpha})-\omega^{1}_{4}-\omega^{2}_{3}+(\ldots)=0, \tag{6}$$

где $\epsilon_{p\alpha}=5-p-\alpha$, а все выражения $(\ldots)$ зависят линейно только от базисных форм, т.е. не зависят от дифференциалов вторичных параметров.

Геометрические объекты. Из уравнений (3)–(6) следует, что системы величин:

$$h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}, \tag{7}$$

$$h_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

$$g_{\alpha\beta}, \tag{9}$$

$$h \tag{10}$$

являются линейными геометрическими объектами. Если в некоторой окрестности прямой l имеет место $h_{\alpha\beta}=0$, то линейное дифференциальное уравнение $\omega^{4}_{1}+\omega^{3}_{2}=0$ вполне интегрируемо, и неголономный комплекс, определяемый уравнениями (2), (2а), (2б) и (2в), вырождается в однопараметрическое семейство комплексов (голономных) прямых.

Свертывая $h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ с координатами t^4, t^3 точки $t^4A_1+t^3A_2$ луча l, получаем относительный инвариант, равенство нулю которого

$$h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}t^{\alpha}t^{\beta}t^{\gamma}t^{\varepsilon}=0 \tag{11'}$$

определяет четыре точки

$$B_i=t^4_iA_1+t^3_iA_2 \tag{11''}$$

на луче l ($t^4_i : t^3_i$ являются корнями уравнения (11′)).

В случае $h_{\alpha\beta}=0$ этими точками являются инфлекционные центры луча комплекса прямых. Поэтому точки, определяемые уравнением четвертой степени (11′), будем называть инфлекционными центрами и в случае неголономного комплекса.

По формуле (1) инфлекционным центрам соответствуют четыре плоскости

$$h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\varepsilon}=0, \tag{12}$$

проходящие через луч l. Эти четыре плоскости будем называть инфлекционными плоскостями.

Свертывая $h_{\alpha\beta}$ с координатами t^4, t^3 точки $t^4A_1+t^3A_2$, получаем относительный инвариант, равенство нулю которого

$$h_{\alpha\beta}t^{\alpha}t^{\beta}=0 \tag{13'}$$

определяет две точки

$$E_p=t^4_pA_1+t^3_pA_2 \tag{13''}$$

на луче l (t_p^4: t_p^3 являются корнями уравнения (13′)). Эти две точки будем называть точками неголономности.

По формуле (1) точкам неголономности соответствуют две плоскости

$$h_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0, \tag{14}$$

проходящие через луч l. Для голономного комплекса точки и плоскости, аналогичные определенным уравнениями (13′) и (14), не выделяются.

Линейный неоднородный геометрический объект (9), в силу (5), определяет в P_3 инвариантную квадрику

$$x^1x^3-x^2x^4+g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0, \tag{15}$$

проходящую через луч l.

Величины $H_{\alpha\beta}(e)$, определяемые равенствами

$$H_{\alpha\beta}(e)=g_{\alpha\beta}+eh_{\alpha\beta},$$

где e-постоянное или инвариант, удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (5). Следовательно, имеем пучок инвариантных квадрик

$$x^1x^3-x^2x^4+H_{\alpha\beta}(e)\,x^\alpha x^\beta=0. \tag{16}$$

Величина h из системы (2) образует однокомпонентный линейный не однородный геометрический объект и, в силу (6), определяет линейный комплекс прямых

$$p^{13}+p^{42}-hp^{34}=0 \tag{17}$$

в P_3, где $p^{ij}=x^iy^j-x^jy^i$ — координаты прямой, проходящей через точки x^iA_i и y^iA_i.

Выражения

$$\Delta=\begin{vmatrix} h_{3333} & h_{3334} & h_{3344} \\ h_{3334} & h_{3344} & h_{3444} \\ h_{3344} & h_{3444} & h_{4444} \end{vmatrix},$$

$$B=h_{3333}h_{4444}-4h_{3334}h_{3444}+3h_{3344}^2,$$

$$K=h_{33\alpha\beta}h_{44\gamma\varepsilon}h^{\alpha\beta}h^{\gamma\varepsilon}-(h_{34\gamma\varepsilon}h^{\gamma\varepsilon})^2,$$

$$M=h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}h^{\alpha\beta}h^{\gamma\varepsilon}$$

и

$$N=h^{33}h^{44}-(h^{34})^2,$$

где

$$h^{33}=h_{44},\quad h^{34}=-h_{34}\quad \text{и}\quad h^{44}=h_{33},$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям соответственно:

$$d\Delta=\frac{3}{2}\,\Delta\,(\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p)+(\dots), \tag{18}$$

$$dB=B\,(\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p)+(\dots), \tag{19}$$

$$dK=2K\,(\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p)+(\dots), \tag{20}$$

$$dM=\frac{3}{2}\,M\,(\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p)+(\dots), \tag{21}$$

и

$$dN=N\,(\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p)+(\dots). \tag{22}$$

Из уравнений (18) – (22) следует, что выражения:

$$B^3 : \Delta^2, \tag{23}$$

$$KN : M^2, \tag{24}$$

$$BN^2 : M^2, \tag{25}$$

$$B : N \tag{26}$$

являются инвариантами.

От трех инвариантов (23) – (25) зависит расположение инфлекционных центров и точек неголономности на луче l. Например:

1) сложное отношение $\mu = (B_1B_2B_3B_4)$ является корнем уравнения

$$4\,(B^3 - 27\Delta^2)\,(\mu^6 - 3\mu^5 + 5\mu^3 - 3\mu + 1) - (3B^3 + 648\Delta^2)\,(\mu - 1)^2\mu^2 = 0;$$

2) сумма двенадцати сложных отношений

$$\sum_{i \neq j} (E_1E_2B_iB_j) = \frac{12M^2 - 64BN^2}{M^2 - 16KN + 16BN^2};$$

3) подсчитав

$$\sum_{i \neq j} (E_1E_2B_iB_j)^2,$$

получим, что эта сумма выражается через инварианты (23) – (25).

Инвариант $B^3 : \Delta^2$ имеет аналогичный смысл и для голономного комплекса прямых.

Пучок линейных комплексов. Пусть линейному комплексу прямых

$$a_{ij}p^{ij} = 0, \qquad a_{ij} = -a_{ji}, \tag{27}$$

принадлежит прямая A_1A_2, т.е.

$$a_{12} = 0.$$

Требуем, чтобы нулевой системе линейного комплекса (27) принадлежало соответствие, определенное формулой (1), т.е. чтобы прямые линейного комплекса (27), проходящие через точку $A_1 + tA_2$, лежали в плоскости $x^3 - tx^4 = 0$ для любого t. Это приводит к тому, что

$$a_{23} = a_{14} = 0, \quad a_{13} + a_{24} = 0.$$

В таком случае, полагая $a_{13} \neq 0$, получаем однопараметрическое семейство линейных комплексов, заданных уравнением

$$p^{13} + p^{42} - \sigma\, p^{34} = 0, \tag{28}$$

где σ — параметр семейства (пучка). Линейные комплексы (28) для голономного комплекса прямых (в случае $h_{\alpha\beta} = 0$) являются касательными.

Линейные комплексы (28) являются инвариантными тогда, когда σ удовлетворяет уравнению вида (6). Таким образом, пучку (28) принадлежит линейный комплекс (17).

Все выражения:

$$h + \sqrt[3]{\Delta}I, \quad h + \sqrt{|B|}\,I, \quad h + \sqrt[4]{|K|}\,I, \quad h + \sqrt[3]{M}\,I, \quad h + \sqrt{|N|}\,I,$$

где I — инвариант, в силу (18) – (22), удовлетворяют дифференциальному уравнению вида (6), следовательно, пучок линейных комплексов (28) соотношением

$$\sigma = h + \sqrt[3]{\Delta}\,I, \text{ если } \Delta \neq 0,$$

или

$$\sigma = h + \sqrt{|B|}\, I, \text{ если } B \neq 0,$$

или

$$\sigma = h + \sqrt[4]{|K|}\, I, \text{ если } K \neq 0,$$

или

$$\sigma = h + \sqrt[3]{M}\, I, \text{ если } M \neq 0,$$

или

$$\sigma = h + \sqrt{|h|}\, I, \text{ если } N \neq 0$$

можно взаимно однозначно отобразить на интервал $(-\infty, +\infty)$ значеній параметра I.

Первые два из этих отображений определены и для голономного комплекса прямых (отображение $\sigma = h + \sqrt[3]{\Delta}\, I$ рассматривалось автором в [6]).

Инфлекционные центры. Фиксируем любую точку $N = \tau^4 A_1 + \tau^3 A_2$ на луче l и любую плоскость $t^4 x^3 - t^3 x^4 = 0$, проходящую через l. Неподвижность точки N характеризуется вполне интегруруемой системой:

$$\tau^4 \omega_1^\alpha + \tau^3 \omega_2^\alpha = 0,$$

$$\tau^4 (d\tau^3 + \tau^4 \omega_1^2 + \tau^3 \omega_2^2) = \tau^3 (d\tau^4 + \tau^4 \omega_1^1 + \tau^3 \omega_2^1), \tag{29}$$

а неподвижность плоскости $t^4 x^3 - t^3 x^4 = 0$ – вполне интегрируемой системой

$$t^4 \omega_p^3 - t^3 \omega_p^4 = 0,$$

$$t^4 (dt^3 + t^\alpha \omega_\alpha^3) = t^3 (dt^4 + t^\alpha \omega_\alpha^4). \tag{30}$$

Из уравнений (29) и (30) следует, что

$$\omega_1^\alpha = t^\alpha \tau^3 \Theta,$$

$$\omega_2^\alpha = -t^\alpha \tau^4 \Theta, \tag{31}$$

где Θ – дифференциальная форма, не равная нулю. Следовательно, прямая A_1A_2, вращаясь около точки N в плоскости $t^4 x^3 - t^3 x^4 = 0$, описывает пучок прямых. Точка $M = t^4 A_1 + t^3 A_2$, соответствующая плоскости $t^4 x^3 - t^3 x^4 = 0$ по формуле (1), в силу (2), (30) и (31), описывает кривую, касательной к которой в точке M является прямая

$$\left(M, \left\{h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t^\alpha t^\beta t^\gamma \tau^\varepsilon + (t^4\tau^3 - t^3\tau^4)\left(g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} h_{\alpha\beta}\right) t^\alpha t^\beta\right\} A_2 + t^4 (t^4\tau^3 - t^3\tau^4)\, t^\alpha A_\alpha\right). \tag{32}$$

Прямая (32) в случае $\tau^\alpha = t^\alpha$ (точки M и N совпадают) примет вид

$$(M,\ h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\varepsilon A_2).$$

Предыдущая прямая не определена тогда и только тогда, когда координаты t^4 и t^3 точки $M = N = t^4 A_1 + t^3 A_2$ удовлетворяют уравнению четвертой степени (11′). Итак, пришли геометрически к инфлекционным центрам B_i (см. (11″)).

Квадрика I. Будем рассматривать случай, когда точки $M = t^4 A_1 + t^3 A_2$ и $N = \tau^4 A_1 + \tau^3 A_2$ находятся в соответствии

$$h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t^\alpha t^\beta t^\gamma \tau^\varepsilon = 0,$$

индуцируемой инфлекционными центрами (это соответствие рассматривалось автором в [5] (лемма 1)). В этом случае точку M будем считать произвольной точкой луча l, а точка N — соответствующая точке M, и прямая (32) примет вид

$$\left(M,\ \left(g_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}h_{\alpha\beta}\right)t^{\alpha}t^{\beta}A_2+t^4t^{\alpha}A_{\alpha}\right).$$

Если $t^4:t^3$ является переменным параметром, то предыдущая прямая описывает поверхность второго порядка

$$x^1x^3-x^2x^4+\left(g_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}h_{\alpha\beta}\right)x^{\alpha}x^{\beta}=0, \tag{33}$$

принадлежащую пучку (16).

Пучок поверхностей третьего порядка. Прямая (32), когда $t^4:t^3$ является переменным параметром, а $\tau^4:\tau^3$ — постоянное, описывает линейчатую поверхность третьего порядка

$$h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}\tau^{\varepsilon}+(\tau^3x^4-\tau^4x^3)+\left\{x^1x^3-x^2x^4+\left(g_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}h_{\alpha\beta}\right)x^{\alpha}x^{\beta}\right\}=0. \tag{34}$$

При переменном $\tau^4:\tau^3$ уравнение (34) означает пучок поверхностей третьего порядка.

Все точки плоскости

$$T^4x^3-T^3x^4=0, \tag{35}$$

проходящей через прямую A_1A_2, принадлежат поверхности (34) тогда и только тогда, когда

$$\tau^3T^4-\tau^4T^3=0 \text{ и } h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}T^{\alpha}T^{\beta}T^{\gamma}\tau^{\varepsilon}=0,$$

т.е. тогда, когда плоскость (35) является инфлекционной плоскостью (см. (12)).

Касательные корреляции. Будем рассматривать корреляции

$$a_{ij}u^ix^j=0,\ \det\|a_{ij}\|\neq 0 \tag{36}$$

(u^i и x^i — координаты точек), которым принадлежат проективные соответствия (1) на луче A_1A_2 и те же самые соответствия на луче $A_1A_2+d\,(A_1A_2)$ по некоторым направлениям (для любого t).

Требование, чтобы корреляциям (36) принадлежали проективные соответствия (1) на луче A_1A_2 для всякого t, приводит к равенствам

$$a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{14}=0,$$
$$a_{13}=1,\ a_{24}=-1, \tag{37}$$

и корреляции (36) принимают вид

$$u^1x^3-u^2x^4+a_{\alpha i}u^{\alpha}x^i=0. \tag{38}$$

Требование, чтобы корреляциям (38) принадлежали проективные соответствия (1) на луче $A_1A_2+d\,(A_1A_2)$, т.е. точке

$$A_1+dA_1+(t+dt)\,(A_2+dA_2)$$

соответствовала плоскость

$$x^3+dx^3-tx^4-dt\cdot x^4-tdx^4=0$$

для всякого t, приводит к семи равенствам

$$a_{\alpha p}\omega_q^{\alpha}+\epsilon_{q\alpha}\omega_p^{\alpha}=0,$$
$$a_{\alpha 4}\omega_1^{\alpha}+\omega_4^3-\omega_1^2=0,\ a_{\alpha 3}\omega_2^{\alpha}-\omega_3^4+\omega_2^1=0,$$
$$a_{\alpha 3}\omega_1^{\alpha}+a_{\alpha 4}\omega_2^{\alpha}+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=0. \tag{39}$$

Уравнения (39) для всяких ω_p^α не совместны, поэтому будем рассматривать касательные корреляции вдоль линейчатых поверхностей

$$\omega_p^\alpha=\lambda_p^\alpha\Theta,\quad D\Theta=0. \tag{40}$$

Подставляя выражения (40) в (39), в силу (2), получим

$$(\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3)\,a_{31}=-\lambda_1^3\lambda_2^4-(\lambda_1^4)^2, \tag{41$_1$}$$

$$(\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3)\,a_{42}=\lambda_1^3\lambda_2^4+(\lambda_2^3)^2, \tag{41$_2$}$$

$$(\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3)\,a_{41}=\lambda_1^3(\lambda_1^4+\lambda_2^3), \tag{41$_3$}$$

$$(\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3)\,a_{32}=-\lambda_2^4(\lambda_1^4+\lambda_2^3), \tag{41$_4$}$$

$$\lambda_2^\alpha a_{\alpha 3}=h_{\alpha 333}\lambda_1^\alpha-\lambda_{\alpha 334}\lambda_2^\alpha-\frac{1}{4}\,h_{33}\,(\lambda_1^4-\lambda_2^3)+$$

$$+\left(h+\frac{1}{2}\,h_{34}\right)\lambda_2^4+g_{33}\,(\lambda_1^4+\lambda_2^3), \tag{41$_5$}$$

$$\lambda_1^\alpha a_{\alpha 3}+\lambda_2^\alpha a_{\alpha 4}=2h_{\alpha 334}\lambda_1^\alpha-2h_{\alpha 344}\lambda_2^\alpha+\frac{1}{2}\,h_{33}\lambda_1^3+$$

$$+h\,(\lambda_1^4-\lambda_2^3)+\frac{1}{2}\,h_{44}\lambda_2^4+2g_{34}\,(\lambda_1^4+\lambda_2^3), \tag{41$_6$}$$

$$\lambda_1^\alpha a_{\alpha 4}=h_{\alpha 344}\lambda_1^\alpha-h_{\alpha 444}\lambda_2^\alpha+\left(\frac{1}{2}\,h_{34}-h\right)\lambda_1^3+$$

$$+\frac{1}{4}\,h_{44}\,(\lambda_1^4-\lambda_2^3)+g_{44}\,(\lambda_1^4+\lambda_2^3). \tag{41$_7$}$$

В случае $\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3\neq 0$ (это означает, что линейчатая поверхность не является развертывающейся) из уравнений $(41_1)-(41_4)$ однозначно определяем a_{31}, a_{42}, a_{41}, и a_{32}. Что касается остальных четырех коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ корреляции (38), то они связаны тремя независимыми уравнениями $(41_5)-(41_7)$. Следовательно, существует пучок касательных корреляций вдоль любой не развертывающейся линейчатой поверхности.

Квадрика II. Будем рассматривать такие касательные корреляции, для которых

$$a_{ij}=a_{ji},\quad \det\|a_{ij}\|\neq 0$$

(такие корреляции являются полярными соответствиями). Тогда, в силу (37), имеем

$$a_{32}=a_{41}=0,\quad a_{31}=1,\quad a_{42}=-1. \tag{42}$$

Подставляя значения (42) в $(41_1)-(41_4)$, получаем

$$\lambda_1^3=\lambda_2^4=0,\quad \lambda_1^4=\lambda_2^3\neq 0. \tag{43}$$

Из $(41_5)-(41_7)$, в силу (43), найдем, что

$$a_{\alpha\beta}=2g_{\alpha\beta}. \tag{44}$$

Подставляя значения (42) и (44) в (38), получим касательное полярное соответствие

$$u^1x^3-u^2x^4+u^3x^1-u^4x^2+2g_{\alpha\beta}u^\alpha x^\beta=0,$$

которое индуцирует квадрику II, определенную уравнением (15). Геометрически полученные квадрики I и II определяют пучок квадрик (16).

Точки неголономности. Все точки прямой A_1A_2 принадлежат квадрикам пучка (16). Кроме того, все квадрики, определяемые уравнением (16), содержат еще две общие прямые

$$h_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,$$
$$x^1x^3-x^2x^4+g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0. \tag{45}$$

Прямые, определяемые уравнениями (45), пересекаются с лучом l в точках E_1, E_2 (см. (13′) и (13″)) и лежат в плоскостях (14), соответствующих точкам E_1, E_2 по формуле (1).

Касательные линейные комплексы. Рассматриваем такие касательные корреляции, для которых

$$a_{ij}=-a_{ji},\quad \det\|a_{ij}\|\neq 0.$$

Такие корреляции являются нулевыми системами индуцируемыми линейными комплексами прямых. Тогда, в силу (37), имеем

$$a_{33}=a_{44}=a_{32}=a_{41}=0,\quad a_{31}=-1,\quad a_{42}=1 \tag{46}$$

и из $(41_1)-(41_4)$ найдем

$$\lambda_1^4+\lambda_2^3=0. \tag{47}$$

Линейчатая поверхность (40), для которой имеет место уравнение (47), является интегральной поверхностью неголономного комплекса.

Из $(41_5)-(41_7)$, в силу (47), следует, что

$$h_{3333}\lambda_1^3+\left(2h_{3334}-\frac{1}{2}h_{33}\right)\lambda_1^4+\left(s+\frac{1}{2}h_{34}-h_{3344}\right)\lambda_2^4=0,$$
$$\left(h_{3334}+\frac{1}{2}h_{33}\right)\lambda_1^3+(s+2h_{3344})\lambda_1^4+\left(\frac{1}{4}h_{44}-h_{3444}\right)\lambda_2^4=0,$$
$$\left(-s+\frac{1}{2}h_{34}+h_{3344}\right)\lambda_1^3+\left(2h_{3444}+\frac{1}{2}h_{44}\right)\lambda_1^4-h_{4444}\lambda_2^4=0, \tag{48}$$

где

$$s=h+a_{34}, \tag{48′}$$

откуда получаем уравнение третьей степени относительно s

$$\begin{vmatrix} h_{3333} & h_{3334}-\frac{1}{4}h_{33} & s-h_{3344}+\frac{1}{2}h_{34} \\ h_{3334}+\frac{1}{4}h_{33} & \frac{1}{2}s+h_{3344} & -h_{3444}+\frac{1}{2}h_{44} \\ s-h_{3344}-\frac{1}{2}h_{34} & -h_{3444}-\frac{1}{2}h_{44} & h_{4444} \end{vmatrix}=0. \tag{49}$$

Уравнение (49) имеет место и для голономного комплекса прямых, с помощью которого Н. И. Кованцов рассматривает главные линейчатые поверхности комплекса [7].

Если корни уравнения (49) обозначить

$$s_1,\ s_2,\ \text{и}\ s_3,$$

то три касательные нуль-системы, в силу (38), (46) и (48′), примут вид

$$T^1x^3-T^3x^1-T^2x^4+T^4x^2+(s_a-h)(T^3x^4-T^4x^3)=0,$$
$$a=1,\ 2,\ 3, \tag{50′}$$

а соответствующие этим трем нуль-системам линейные комплексы прямых будут определяться уравнениями

$$p^{13}+p^{42}+(h-s_a)\,p^{43}=0. \tag{50''}$$

Линейные комплексы прямых (50″) будем называть касательными к неголономному комплексу. Направления (линейчатые поверхности), по которым линейные комплексы (50″) касаются с неголономным комплексом, заданным уравнениями (2), (2а), (2б) и (2в), определяются соотношениями (40), в силу (47), (48) и (49).

Линейные комплексы прямых (50″) определены и для голономного комплекса прямых. В. А. Петин в [8] и [9] рассматривал геометрическую связь между тремя линейными касательными комплексами (50″) (для голономного комплекса прямых) и линейным касательным комплексом M, рассмотренным автором в [5]. Эта геометрическая связь В. А. Петина, с помощью которой получаем геометрически линейный комплекс (17), имеет место и в случае неголономного комплекса.

Квадратные касательные комплексы прямых. Квадратный комплекс прямых

$$a_{ijkl}p^{ij}p^{kl}=0, \text{ где } a_{ijkl}=a_{klij}=-a_{jikl}=-a_{ijlk}, \tag{51}$$

проходит через прямую A_1A_2 тогда и только тогда, когда

$$a_{1212}=0. \tag{52}$$

Квадратному комплексу (51) принадлежит прямая, проходящая через точки

$$A_1+dA_1 \text{ и } A_2+dA_2,$$

тогда и только тогда, когда

$$a_{121\alpha}\omega_2^\alpha+a_{12\alpha2}\omega_1^\alpha=0. \tag{53'}$$

Будем требовать, чтобы соотношение (53′) имело место для каждой интегральной линейчатой поверхности неголономного комплекса. Тогда, в силу (40) и (47), имеем

$$a_{1214}=a_{1223}=0,\ a_{1213}=a_{1242}\neq0. \tag{53''}$$

Уравнение квадратного комплекса (51), в силу (52) и (53″), примет вид

$$p^{12}\,(p^{13}+p^{42})+a_{q\alpha i\beta}p^{q\alpha}p^{i\beta}+a_{3434}\,(p^{34})^2=0.$$

Квадратному комплексу (51) принадлежит прямая интегральной линейчатой поверхности, проходящая через точки

$$A_1+dA_1+\frac{1}{2}\,d^2A_1 \text{ и } A_2+dA_2+\frac{1}{2}\,d^2A_2,$$

когда

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\omega_1^3\,(\omega_3^4-\omega_2^1)+\frac{1}{2}\,\omega_1^4\,(\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)+\\&+\frac{1}{2}\,\omega_2^4\,(\omega_4^3-\omega_1^2)+a_{1\alpha1\beta}\omega_2^\alpha\omega_2^\beta+a_{2\alpha2\beta}\omega_1^\alpha\omega_1^\beta-2a_{1\alpha2\beta}\omega_2^\alpha\omega_1^\beta+\\&+2p^{34}\,(a_{1\alpha34}\omega_2^\alpha-a_{2\alpha34}\omega_1^\alpha)=0.\end{aligned} \tag{54'}$$

Будем требовать, чтобы соотношение (54') имело место для каждой интегральной линейчатой поверхности неголономного комплекса. Тогда, в силу (40), (47) и (2), из (54') получаем:

$$\begin{aligned}
&2a_{2323}+h_{3333}=0,\\
&2a_{1414}+h_{4444}=0,\\
&2a_{1423}+h_{3344}-h=0,\\
&a_{1323}+a_{2324}+h_{3334}=0,\\
&a_{1314}+a_{1424}+h_{3444}=0,\\
&a_{1313}+2a_{1324}+a_{2424}+2h_{3344}+h=0. \qquad (54'')
\end{aligned}$$

Квадратный комплекс прямых (51) зависит от 19 коэффициентов (в [10] дается широкая классификация квадратных комплексов прямых). Так как коэффициенты a_{ijkl} квадратного комплекса (51), имеющего касание не ниже второго порядка с каждой интегральной линейчатой поверхностью неголономного комплекса, удовлетворяют 10 независимых соотношений (52), (53'') и (54''), то совокупность всех касательных квадратных комплексов

$$(p^{13}+p^{42}-hp^{34})(p^{12}+\lambda_{q\alpha}p^{q\alpha})+p^{34}(\mu_{q\alpha}p^{q\alpha}+\mu p^{34})-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta44}p^{1\alpha}p^{1\beta}-$$
$$-h_{\alpha\beta34}p^{1\alpha}p^{2\beta}-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta33}p^{2\alpha}p^{2\beta}=0 \qquad (55)$$

зависит от 9 произвольных параметров

$\lambda_{q\alpha}$, $\mu_{q\alpha}$ и μ.

Прямая A_1A_2 принадлежит каждому квадратному комплексу (55).

Квадратные комплексы (55) являются касательными к неголономному комплексу, заданному уравнениями (2), (2а), (2б) и (2в), по любой интегральной линейчатой поверхности вдоль прямой A_1A_2. В уравнение (55) не входят компоненты $h_{\alpha\beta}$ геометрического объекта (8). Следовательно, квадратные комплексы (55) являются касательными и для комплекса (голономного) прямых, рассмотренного автором в [5].

Если значения компонент $h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ и h в уравнениях (2) совпадают с соответствующими значениями компонент в уравнениях (3), заданных в заметке [5], то каждый квадратный комплекс (55) и комплекс прямых, рассмотренный автором в [5], вдоль луча A_1A_2 имеет общую дифференциальную окрестность второго порядка. В [5] дана геометрическая интерпретация линейного касательного комплекса M, уравнение которого совпадает с уравнением (17). Следовательно, линейный комплекс (17) является касательным линейным комплексом M для каждого квадратного комплекса (55). Таким же образом можно геометрически охарактеризовать и точки B_1, B_2, B_3 и B_4, которые определены уравнением (11'), ибо они являются инфлекционными центрами на луче A_1A_2 для каждого квадратного комплекса (55).

Направления I. Касательной плоскостью к интегральной линейчатой поверхности (40) (имеет место соотношение (47)) в точке

$$M_1=t_1^pA_p \qquad (56')$$

является плоскость

$$(A_1,\ A_2,\ \lambda_p^\alpha t_1^p A_\alpha).$$

Эта плоскость соответствует точке

$$M_2 = t_2^p A_p \tag{56''}$$

по формуле (1), если

$$\lambda_p^3 t_1^p p_2^1 - \lambda_p^4 t_1^p t_2^2 = 0. \tag{57}$$

Это соответствие, в силу (47), является инволюцией, двойные точки $t^p A_p$ которой определяются уравнением

$$(\lambda_p^3 t^1 - \lambda_p^4 t^2)\, t^p = 0.$$

Двойные точки инволюции (57) назовем точками прикосновения луча линейчатой поверхности (в случае голономного комплекса прямых это название дано Н. И. Кованцовым в [7]).

Точки M_1 и M_2, в силу (57), гармонически разделяют точки прикосновения на луче A_1A_2.

Пусть аналогично точки

$$M_1 + dM_1 \text{ и } M_2 + dM_2$$

гармонически разделяют точки прикосновения на луче $A_1A_2 + d\,(A_1A_2)$ интегральной линейчатой поверхности. Тогда направления

$$(M_1,\ M_1 + dM_1) \text{ и } (M_2,\ M_2 + dM_2),$$

в силу (47) и (57), запишутся так:

$$(M_1,\ \tau_1 A_2 + t_2^2 A_3 + t_2^1 A_4) \tag{58'}$$

и

$$(M_2,\ \tau_2 A_1 + t_1^2 A_3 + t_1^1 A_4), \tag{58''}$$

где

$$\tau_1 = t_2^2\left(t_1^1 d\,\frac{t_1^2}{t_1^1} + t_1^p\omega_p^2 - \frac{t_1^2}{t_1^1}\, t_1^p\omega_p^1\right) : t_1^q\omega_q^3$$

и

$$\tau_2 = t_1^1\left(t_2^2 d\,\frac{t_2^1}{t} + t^p\omega_p^1 - \frac{t_2^1}{t_2^2}\, t_2^p\omega_p^2\right) : t_2^q\omega_q^4.$$

Будем требовать, чтобы направления (58′) и (58″) были асимптотическими на линейчатой интегральной поверхности. Тогда, в силу (57), имеем

$$(t_2^2)^2\, t_1^1\, (\omega_3^4 - \omega_2^1) + t_1^1 t_2^1 t_2^2\, (\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4) - t_1^1\, (t_2^1)^2\, (\omega_4^3 - \omega_1^2) +$$
$$+ \lambda_p^4 t_2^p\, (t_1^1\tau_1 + t_2^2\tau_2)\, \Theta = 0 \tag{59'}$$

и

$$(t_1^2)^2\, t_2^2\, (\omega_3^4 - \omega_2^1) + t_1^1 t_1^2 t_2^2\, (\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4) - (t_1^1)^2\, t_2^2\, (\omega_4^3 - \omega_1^2) -$$
$$- \lambda_p^3 t_1^p\, (t_1^1\tau_1 + t_2^2\tau_2)\, \Theta = 0, \tag{59''}$$

где дифференциальная форма Θ та же, что и в уравнениях (40).

Соотношение (59′), в силу (2), примет вид

$$\lambda_p^4 t_2^p t_2^2\, \{(t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)\,(t_1^1\tau_1 + t_2^2\tau_2) - H_1\} + t_1^1\lambda_p^3 t_1^p \cdot \varphi\,(t_2^2,\ t_2^1) = 0, \tag{60'}$$

а соотношение (59″) – вид

$$\lambda_p^3 t_1^\rho t_1^1 \cdot \{ (t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)(t_1^1 \tau_1 + t_2^2 \tau_2) - H_2 \} + \lambda_p^4 t_2^\rho t_2^2 \cdot \varphi(t_1^2, t_1^1) = 0, \tag{60″}$$

где

$$\varphi(t^2, t^1) = h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t^{5-\alpha} t^{5-\beta} t^{5-\gamma} t^{5-\varepsilon}, \tag{61′}$$

$$H_1 = h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t_1^{5-\alpha} t_1^{5-\beta} t_2^{5-\gamma} t_2^{5-\varepsilon} - h\,(t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)^2 -$$
$$- \frac{1}{2}(t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)\, h_{\alpha\beta} t_1^{5-\alpha} t_2^{5-\beta}, \tag{61″}$$

$$H_2 = h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t_1^{5-\alpha} t_1^{5-\beta} t_2^{5-\gamma} t_2^{5-\varepsilon} - h\,(t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)\, h_{\alpha\beta} t_1^{5-\alpha} t_2^{5-\beta}. \tag{61‴}$$

Из (60′) и (60″), исключая λ_p^α, получаем соотношение

$$\{ (t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)(t_1^1 \tau_1 + t_2^2 \tau_2) - H_1 \} \cdot \{ (t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1)(t_1^1 \tau_1 + t_2^2 \tau_2) - H_2 \} -$$
$$- \varphi(t_1^2, t_1^1) \cdot \varphi(t_2^2, t_2^1) = 0. \tag{62}$$

Уравнения (60′) и (60″), которые получаются в силу требования, чтобы направления (58′) и (58″) были асимптотическими на линейчатой интегральной поверхности (40) (имеет место соотношение (47)) в точках M_1 и M_2 (см. (56′) и (56″)), от дифференциалов $d\lambda_p^\alpha$ не зависят, а зависят только от коэффициентов λ_p^α. Это следует из того, что точки M_1 и M_2 являются соответственными точками инволюции (57). Кроме того, заметим, что уравнения (60′) и (60″) не определяют τ_1 и τ_2, но устанавливают зависимость между ними. Ввиду этого дифференциальная окрестность первого порядка линейчатой интегральной поверхности (40) (в силу (47)) устанавливает соответствие между направлениями (58′) и (58″). Это соответствие и будет определено уравнением (62).

Можно считать, что точки (56′) и (56″) являются произвольными точками на луче A_1A_2 (в этом случае λ_p^α из системы (40) будут удовлетворять, кроме соотношения (47), еще соотношению (57)).

Так как уравнение (62) относительно выражения $t_1^1\tau_1 + t_2^2\tau_2$ является квадратным, то направлению (58′) (соответственно (58″)) в M_1 (соответственно в M_2) соответствуют два направления (58″) (соответственно (58′)) в M_2 (соответственно в M_1), которые совпадают тогда и только тогда, когда точки M_1 и M_2 находятся в соответствии

$$\varphi({}_1^2, t_1^1) \cdot \varphi(t_2^2, t_2^1) + (H_1 - H_2)^2 = 0. \tag{63}$$

Уравнение (63) определяет соответствие между точками $M_p = t_p^q A_q$ (см. (56′) и (56″)), причем каждой точке M_1 ставит в соответствие четыре точки M_2 и наоборот, ($\varphi(t^2, t^1)$ и H_1, H_2 определены соотношениями (61′) (61″) и (61″)). Если точкой M_1 является один из инфлекционных центров, заданных уравнением (11′), т.е. $\varphi(t_1^2, t_1^1) = 0$, то две из точек M_2, соответствующих точке M_1, совпадают с точкой M_1. Имеет место и обратное предложение, т. е. если одна из четырех соответственных точек M_2 совпадает с точкой M_1, то точка M_1 является инфлекционным центром.

Если точка M_1 является инфлекционным центром, т.е.

$$\varphi(t_1^2, t_1^1) = 0, \tag{64′}$$

то, в силу (63), остальные две соответствующие ей точки M_2, кроме двух совпадающих с точкой M_1, также совпадают и эта двойная точка $M_2=t_2^pA_p$ определяется соотношением

$$h_{\alpha\beta}t_1^{5-\alpha}t_2^{5-\beta}=0. \tag{64''}$$

Уравнения (64′) и (64″) определяют четыре пары соответственных точек

$$M_1=t_1^pA_p \text{ и } M_2=t_2^pA_p,$$

принадлежащих одной инволюции

$$h_{\alpha\beta}t_1^{5-\alpha}t_2^{5-\beta}=0. \tag{65}$$

Таким образом, геометрически получена инволюция (65), определяемая компонентами геометрического объекта (8). Двойными точками инволюции (65) являются точки E_1 и E_2 (см. 13′) и (13″)).

Направления II. Два направления (58″), которые, в силу (62), являются соответственными направлению (58′), и прямая A_1A_2 лежат на одной плоскости $t_1^1x^3-t_1^2x^4=0$, соответственной точке $M_1=t_1^pA_p$ по формуле (1).

Если направлению (58′) в точке M_1 поставить в соответствие такое направление в M_2, которое лучом A_1A_2 разделяют гармонически соответственные два направления (58″) в M_2, то это соответствие определяется следующим образом (сравн. (17)–(19) в [6]):

$$(M_1,\ T_1A_2+t_2^2A_3+t_2^1A_4), \tag{66'}$$

$$(M_2,\ T_2A_1+t_1^2A_3+t_1^1A_4), \tag{66''}$$

$$(t_1^1t_2^2-t_1^2t_2^1)(t_1^1T_1+t_2^2T_2)-H=0, \tag{66'''}$$

где

$$H=\frac{H_1+H_2}{2}=h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}t_1^{5-\alpha}t_1^{5-\beta}t_2^{5-\gamma}t_2^{5-\varepsilon}-h\,(t_1^1t_2^2-t_1^2t_2^1)^2.$$

Соответствие (66‴) между направлениями (66′) и (66″) ничем не отличается от аналогичного соответствия для комплекса (голономного) прямых, рассмотренного автором в [5]. Следовательно, та конструкция, с помощью которой автор геометрически получил линейный касательный комплекс прямых M в [5], применима без изменения для линейного комплекса прямых, определенного уравнением (17).

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
11.X.1968

Литература

1. В. В. Вагнер, Дифференциальная геометрия неголономных многообразий, Казань, 1939.
2. С. С. Бюшгенс, Геометрия векторного поля, Известия Академии Наук, сер. матем., 10, 1946, 73—96.
3. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического о-ва, 2, 1953, 275—382.
4. В. И. Близникас, К. И. Гринцевичюс, О неголономной линейчатой геометрии, Третья Прибалтийская геометрическая конференция, Паланга, 1968, 21—25.

5. К. И. Гринцевичюс, Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса, Успехи математических наук, 1958, XIII, вып. 2(80), 175—180.
6. К. И. Гринцевичюс, О пучке линейных касательных комплексов, Лит. матем. сб., VI, № 4, 1966, 621.
7. Н. И. Кованцов, К проективной теории комплекса прямых, Доклады Академии Наук СССР, 95, 1954, 917—920.
8. В. А. Петин, Некоторые вопросы теории комплексов, Материалы II Прибалтийской геометрической конференции, Тарту, 1965, 142—145.
9. В. А. Петин, Подмногообразия линейчатого комплекса в трехмерном проективном пространстве, Труды Томского гос. ун-та, 191, 1967, 48—61.
10. K. Zindler, Algebraische Liniengeometrie, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, 2, 1905–1915, 973–1228.

APIE NEHOLONOMINĮ KOMPLEKSĄ

K. GRINCEVIČIUS

(*Reziumė*)

Neholonominis kompleksas trimatėje projektyvinėje erdvėje P_3 yra keturmatė daugdara kurios elementu yra tiesė A_1A_2 ir projektyvinis atvaizdavimas $A_1+tA_2\rightleftarrows x^3-tx^4=0$. Darbe tiriama neholonominio komplekso pirmos eilės diferencialinė aplinka.

ÜBER EINEN NICHT-HOLONOMEN KOMPLEX

K. GRINCEVIČIUS

(*Zusammenfassung*)

Der nicht-holonome Komplex ist eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit im projektiven Raume P_3. Ein Element dieser Mannigfaltigkeit ist von einer Gerade A_1A_2 und einer projektiven Abbildung $A_1+tA_2\rightleftarrows x^3-tx^4=0$ beschaffen. In dem vorliegenden Artikel wird mit Hilfe der Methode von G. Laptev die Geometrie des nicht-holonomen Komplexes untersucht.