IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–513

ОБЩИЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ОСНАЩЕНИЯ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ

Ю. ЛУМИСТЕ

1. Пусть в трехмерном проективном пространстве P_3 задана дифференцируемая конгруэнция прямых – двумерное дифференцируемое подмногообразие плюккерова многообразия прямых в P_3 – и пусть к каждой точке X каждой прямой x конгруэнции присоединена проходящая через X плоскость ξ_x, которая не содержит прямую x, так что возникает дифференцируемое поле ξ плоских элементов. На каждой линейчатой поверхности f конгруэнции определяется тогда поле γ направлений, являющихся пересечениями касательных плоскостей поверхности f с плоскостями поля ξ. Ставится задача выяснить каково должно быть поле ξ, чтобы интегральные линии поля γ на каждой линейчатой поверхности f установили проективные отображения каждой образующей на каждую другую образующую поверхности.

Легко указать одно тривиальное решение задачи: достаточно, чтобы плоскости поля ξ, взятые в точках произвольно фиксированной прямой конгруэнции, образовали пучек. Тогда у каждого указанного выше отображения все касательные к нему отображения являются перспективными, и оно само, следовательно, является проективным. В этом случае имеется дело с парой конгруэнции [4].

Оказывается, что это решение не является единственным.

2. Общее решение задачи дается следующей теоремой.

Отображения образующих, определяемые на линейчатых поверхностях конгруэнции полем ξ, являются проективными тогда и только тогда, когда плоскости поля ξ, взятые в точках произвольной фиксированной прямой x конгруэнции, образуют либо

(а) семейство соприкасающихся плоскостей пространственной кривой третьего порядка, которая не пересекает прямую x, и двумя соприкасающимися плоскостями которой являются касательные плоскости π_i фокальных поверхностей (F_i) конгруэнции $(i=1, 2)$; либо

(б) семейство касательных плоскостей конуса K_2 второго порядка, который имеет с плоскостью π_2 касание вдоль образующей, проходящей через точку F_2 поверхности (F_2) (через фокус), так что эта точка не является вершиной конуса, либо

(в) пучек с осью, не имеющей общих точек с прямой x.

3. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, необходимо сделать некоторые общие замечания относительно метода доказательства*). Рассмотрим множество пар (x, X), где x — произвольная прямая конгруэнции, и X — произвольная инцидентная с ней точка. Из общей теории погруженных однородных расслоений [2] следует, что это множество является дифференцируемым расслоенным пространством E с двумерной базой, типовым слоем которого является проективная прямая, а структурной группой — группа проективных преобразований этой прямой. Оно ассоциировано с главным расслоенным пространством P проективных реперов (упорядоченных троек попарно различных точек) на его слоях и получается из P факторизацией по стационарной подгруппе H некоторой точки, т.е. $E=P/H$.

Требование задачи равносильно тому, что ξ должно быть образом горизонтального распределения некоторой линейной связности в E при естественном отображении E в P_3, ставящем паре $(x, X)\in E$ в соответствие точку $X\in P_3$. С другой стороны каждое такое распределение на E является образом горизонтального распределения соответствующей линейной связности в P при факторизующем отображении P на $E=P/H$ [2].

Поэтому при решении задачи (т.е. при доказательстве теоремы) можно пользоваться следующим сильным результатом (теоремой Картана-Лаптева) из теории связностей в главных расслоенных пространствах. Пусть на P заданы 1-форма ω со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ структурной группы G, так что в каждой точке $z\in P$ аннулирующее ее подпространство Γ_z касательного пространства $T_z(P)$ (т.е. множество векторов Z, для которых $\omega(Z)=0$) является дополнительным к касательному пространству слоя, проходящего через z. Тогда распределение Γ этих подпостранств Γ_z является горизонтальным распределением некоторой связности в P тогда и только тогда, когда 2-форма $\Omega=d\omega+\frac{1}{2}[\omega\omega]$ является полубазовой, т.е. когда $\Omega(Z, Z')=0$, если хотя бы один из векторов Z и Z' является касательным к слою [3].

Если в $\mathfrak{G}$ выбран базис $\{\varepsilon_\rho\}$, а база B расслоения P покрыта областями U тривиальности (т.е. такими U, что $p^{-1}(U)$ диффеоморфно с $U\times G$, где $p: P\to B$ — проекция расслоения), допускающими на себе n 1-форм $\theta^1, \ldots, \theta^n$, $n=\dim B$, составляющих в каждой точке $x\in U$ базис в $\Gamma_x^*(B)$, то последнее условие, можно выразить также в следующем виде: каждая компонента Ω^ρ формы

*) Общий метод решения задачи рассматриваемого типа в случае n-мерного многообразия m-мерных плоскостей в проективном пространстве P_N дан автором в статье [1]. В ней найдены условия для поля дополнительных $(N-m)$-мерных плоскостей, необходимые и достаточные, чтобы отображения плоскостей многообразия, определяемые этим полем, были проективные. В рассматриваемом здесь сравнительно простом случае, когда $m=1$ и $N=3$, полученные в [1] весьма сложные аналитические условия допускают наглядное геометрическое истолкование в виде теоремы, сформулированной выше в п. 2. Следует отметить, что данное в настоящей заметке изложение не опирается непосрдественно на [1] и имеет более самостоятельный характер. Результаты заметки были доложены на заседании Вильнюсского геометрического семинара в ноябре 1967 г. Впоследствии автору стало известно, что к этим же результатам пришел независимо и другим методом П. И. Вашкас. (См. настоящий сборник, стр. 27—34, а также Тезисы III Прибалтийской геометрической конференции, Паланга, 1968.)

$\Omega = \Omega^\rho \varepsilon_\rho$ линейно выражается только через внешние произведения $\omega^i \wedge \omega^j$ „базисных“ форм $\omega^i = p^* \theta^i$, т.е.

$$\Omega^\rho = -\frac{1}{2} R^\rho_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \tag{1}$$

(здесь R^ρ_{ij} составляют тогда объект кривизны связности, заданной в P 1-формой ω).

Для применения этого результата в рассматриваемом нами случае остается еще указать, как в случае проективной группы G составить 2-форму Ω. Отметим, что компоненты Ω^ρ этой формы вычисляются точно также как левые части уравнений Маурера-Картана группы Ли G (см., напр., [5], стр., 95). Последние в случае группы G проективных преобразований прямой являются следующими соотношениями между коэффициентами ω_i^j в формулах $dA_i = \omega_i^j A_j$ инфинитезимального перемещения проективного репера $\{A_1, A_2\}$:

$$d\omega_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 \wedge \omega_1^2 = 0,$$

$$d\tilde{\omega}_2^2 + 2\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 = 0,$$

$$d\omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \tilde{\omega}_2^2 = 0,$$

где $\tilde{\omega}_2^2 = \omega_2^2 - \omega_1^1$ (см., напр., [3]). Поэтому форма Ω в данном случае имеет компоненты Ω_1^2, $\tilde{\Omega}_2^2$, Ω_2^1, вычисляемые подобно левым частям последних трех уравнений. Если для каких-нибудь 1-форм ω_1^2, $\tilde{\omega}_2^2$, $\tilde{\omega}_2^1$, заданных на главном расслоении P, структурной группой G которого является группа проективных преобразований прямой, и образующих вместе с „базисными“ формами ω^i полный базис в $T_z^*(P)$, составленные из них 2-формы $\tilde{\Omega}_1^2, \tilde{\Omega}_2^2, \tilde{\Omega}_2^1$ выражаются в виде (1), то в P определяется линейная связность, горизонтальное распределение которой задается уравнениями $\tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_2^1 = 0$.

4. Перейдем теперь к доказательству теоремы. Плоскости поля ξ, взятые в точках X одной фиксированной прямой x конгруэнции, образуют 1-параметрическое семейство и являются, вообще говоря, соприкасающимися плоскостями некоторой кривой в P_3. Вершины подвижного репера выбираются следующим образом: вершина A_1 помещается в подвижную точку X, а вершина A_2 – в фокус прямой x; вершины A_3 и A_4 выбираются на касательной к указанной кривой, так что A_3 является точкой касания, а A_4 принадлежит касательной плоскости π_2 фокальной поверхности (F_2), описываемой фокусом $A_2 = F_2$. Тогда 1-формы ω_I^K $(I, K = 1, 2, 3, 4)$ – коэффициенты в формулах $dA_I = A_K \omega_I^K$ инфинитезимального перемещения репера – связаны следующими соотношениями:

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \tag{2}$$

$$\omega_2^1 \equiv \omega_3^2 \equiv \omega_4^2 \equiv \omega_4^3 \equiv \omega_3^1 \equiv 0 \pmod{\omega_1^3, \ \omega_2^4}, \tag{3}$$

$$\omega_4^1 \equiv q\omega_1^2, \quad \omega_3^4 \equiv r\omega_1^2 \pmod{\omega_1^3, \ \omega_2^4}, \tag{4}$$

где ω_1^3 и ω_2^4 – „базисные“ формы. Соотношения (2) следуют из того, что dA_2 лежит в касательной плоскости π_2, натянутой на A_1, A_2 и A_4, а при фиксации прямой $x = A_1A_2$ справедливы $\omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_1^3 = 0$. Соотношения (3) вытекают из того, что при фиксированной x закрепляется также A_2, кроме того, A_3 смещается вдоль прямой A_3A_4, а A_4 – вдоль прямой A_1A_4, являющейся пересечением плоскости π_2 и соприкасающейся плоскости $A_3A_4A_1$ кривой. Наконец, соотношения (4) выражают тот факт, что при дополнительной фиксации вершины $A_1=X$, т.е. при $\omega_1^2=0$, фиксируются и все другие вершины.

При внешнем дифференцировании соотношения $\omega_4^1 \equiv q\omega_1^2 \pmod{\omega_1^3,\ \omega_2^4}$ и раскрытии возникающего квадратичного соотношения получается

$$dq+q\,(2\omega_1^1-\omega_2^2\quad\omega_4^4)=q_1\,\omega_1^2 \pmod{\omega_1^3,\ \omega_2^4}. \tag{5}$$

Вычисления показывают, что

$$d\omega_1^2+\tilde{\omega}_2^2\wedge\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1^4\wedge\omega_4^2,$$

где $\tilde{\omega}_2^2=\omega_2^2-\omega_1^1$; здесь правая часть, в силу (3), полубазовая. (Напомним, что „базисными“ формами в данном случае являются ω_1^3 и ω_2^4.) Далее

$$d\tilde{\omega}_2^2+2\omega_1^2\wedge\tilde{\omega}_2^1=\omega_2^4\wedge\omega_4^2-\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\varphi\omega_1^3\wedge\omega_2^4,$$

где

$$\tilde{\omega}_2^1=\omega_2^1-\frac{1}{2}\,q\omega_1^4\,,$$

и правая часть в силу (5) и (4) и (2) – полубазова. Теперь

$$d\tilde{\omega}_2^1+\tilde{\omega}_2^1\wedge\tilde{\omega}_2^2=\frac{1}{2}\,(aq_1-rq)\,\omega_1^3\wedge\omega_1^2+$$

$$+\frac{1}{2}\,(3q+bq_1)\,\omega_2^4\wedge\omega_1^2+\psi\omega_1^3\wedge\omega_2^4.$$

Отсюда видно, что $d\tilde{\omega}_2^1+\tilde{\omega}_2^1\wedge\tilde{\omega}_2^2$ является полубазовой тогда и только тогда, когда

$$rq-aq_1=0, \tag{6}$$

$$3q+bq_1=0. \tag{7}$$

В этом и состоят условия того, что поле ξ является образом горизонтального поля некоторой связности в P, т.е. что оно определяет проективные отображения образующих любой линейчатой поверхности конгруэнции.

5. Полученные условия можно рассматривать как линейную однородную систему для определения q и q_1. Следовательно, либо $q=q_1=0$, либо $rb+3a=0$.

В первом случае $\omega_4^1\equiv 0 \pmod{\omega_1^3,\ \omega_2^4}$, т.е. при фиксации прямой $x=A_1A_2$ конгруэнции фиксируется также прямая A_3A_4, потому что в силу (3) и (4) имеют место

$$dA_3\equiv\omega_3^3A_3+r\omega_1^2A_4 \pmod{\omega_1^3,\ \omega_2^4}$$

$$dA_4\equiv\omega_4^4A_4 \pmod{\omega_1^3,\ \omega_2^4}.$$

В этом случае вершину A_3 наиболее естественно поместить в точку пересечения этой прямой с касательной плоскостью π_1 фокальной поверхности (F_1). Тогда вместе с прямой x фиксируется также вершина A_3, т.е. $r=0$. Имеем дело со случаем (в) в формулировке теоремы.

Второй случай, когда $rb+3a=0$ распадается на два подслучая: либо $a=0$, либо $a\neq 0$. Оказывается, что в этом случае невозможно тождество $b=0$. Действительно, это приводило бы к $a=0$, т.е. к $\omega_1^4=0$. Отсюда после внешнего дифференцирования получилось бы

$$\omega_1^2\wedge\omega_2^4+r\omega_1^3\wedge\omega_1^2=0,$$

а это несовместимо с тем, что вершина A_1 свободно смещается на прямой x и ω_1^2 поэтому не зависит линейно от ω_1^3 и ω_2^4.

Следовательно, в первом подслучае

$$a=r=0.$$

Из (4) следует, что теперь $\omega_3^4\equiv 0 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4}$, т.е. вместе с x фиксируется вершина A_3. Так как $dA_4=q\omega_1^2A_1+\omega_4^4A_4 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4}$, то плоскости поля $\xi= =A_1A_3A_4$, взятые в точках прямой x, огибают некоторый конус с вершиной в точке A_3. Оказывается, что эта вершина лежит в плоскости π_1. Действительно, другим фокусом на прямой A_1A_2, кроме $F_2=A_2$ является, как нетрудно установить, точка

$$F_1=A_1-bA_2,$$

дифференциал dF_1 которой имеет, в силу $\omega_1^4=b\omega_2^4$, единственную компоненту, не принадлежащую прямой x, которая равна $\omega_1^3A_3$.

Остается исследовать направляющую линию указанного конуса, описываемую вершиной A_4 на плоскости π_2. После внешнего дифференцирования из $\omega_1^4=b\omega_2^4$ получается:

$$db+b(\omega_2^2-\omega_1^1)-\omega_1^2\equiv 0 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4}.$$

Если фокусы F_1 и F_2 нормировать так, чтобы точка F_1+F_2 была неподвижна, то

$$\omega_2^2\equiv\omega_1^1 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4},$$
$$\omega_1^2\equiv db \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4}.$$

Вершины репера можно нормировать так, чтобы $q=-1$. Тогда из (5) следует, в силу (7), что по mod ω_1^3, ω_2^4 справедливы

$$\omega_4^4\equiv\omega_1^1+3d\ln|b|, \tag{8}$$
$$dA_1\equiv\omega_1^1A_1+dbA_2, \tag{9}$$
$$dA_2\equiv\omega_1^1A_2, \tag{10}$$
$$dA_4\equiv dbA_1+(\omega_1^1+3d\ln|b|)A_4.$$

Если теперь к фокусам $F_1=A_1-bA_2$ и $F_2=A_2$ присоединить точку

$$F_4=\frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{2}\,bA_1+\frac{1}{2}\,b^2A_2+A_4\right),$$

то

$$dF_1\equiv\omega_1^1F_1,\quad dF_2\equiv\omega_1^1F_2,\quad dF_4\equiv\omega_1^1F_4 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4},$$

т.е. точки F_1, F_2 и F_4 неподвижно связаны с прямой x конгруэнции; при этом

$$A_4=-\frac{1}{2}\,bF_1-b^2F_2+b^3F_4.$$

Следовательно, точка A_4 описывает на плоскости $\pi_2=F_1F_2F_4$ линию

$$x^1=-\frac{1}{2}\,b,\quad x^2=-b^2,\quad x^3=b^3,$$

которая является общей линией второго порядка

$$(x^2)^2+2x^1x^3=0,$$

проходящей через фокус F_1 и имеющей в нем касание с прямой $x^2=0$ конгруэнции. Имеется дело со случаем (б) в формулировке теоремы.

Осталось изучить еще самый общий случай, когда $a\neq 0$. Из уравнения

$$\omega_1^4 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4$$

следует в силу (6), что

$$da = a(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \frac{3a}{b}\,\omega_1^2 \,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4),$$

$$db = b(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_1^2\,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4).$$

Здесь фокусы $F_1 = A_1 - bA_2$ и $F_2 = A_2$ можно по-прежнему нормировать так, чтобы точка $F_1 + F_2$ была неподвижна. Тогда

$$\omega_2^2 \equiv \omega_1^1,\quad \omega_1^2 \equiv db\,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4).$$

Кроме того вершины репера можно нормировать так, чтобы $a = q = 1$; это приводит к соотношениям

$$\omega_3^3 \equiv \omega_1^1,\quad \omega_4^4 \equiv \omega_1^1 + 3d\ln|b|\,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4).$$

Теперь к (8), (9) и (10) прибавляется еще формула

$$dA_3 \equiv \omega_1^1 A_3 - 3d\ln|b|\,A_4\,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4),$$

так как, в силу (4), (6) и (7)

$$\omega_3^4 = -q_1\omega_1^2 = -\frac{3}{b}\,db\,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4).$$

Оказывается, что кроме фокусов F_1 и F_2 вместе с прямой x неподвижны так же точки

$$F_3 = -bA_1 + \frac{1}{2}\,b^2A_2 + A_3 + A_4,$$

$$F_4 = \frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{2}\,bA_1 + \frac{1}{2}\,b^2A_2 + A_4\right),$$

потому что, как нетрудно проверить,

$$dF_3 \equiv \omega_1^1 F_3,\quad dF_4 \equiv \omega_1^1 F_4\,(\mathrm{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4).$$

При этом ·

$$A_3 = \frac{3}{2}\,bF_1 + \frac{3}{2}\,b^2F_2 + F_3 - b^3F_4;$$

следовательно, точка A_4 описывает линию

$$x^1 = \frac{3}{2}\,b,\quad x^2 = \frac{3}{2}\,b^2,\quad x^3 = 1,\quad x^4 = -b^3,$$

которая является общей пространственной линией третьего порядка. Так как после нормировки точки F_1, позволяющей положить $\omega_1^1 = 0$, имеют место формулы

$$\frac{dA_3}{db} = \frac{3}{2}\,F_1 + 3bF_2 - 3b^2F_4 = -3A_4,$$

$$\frac{d^2A_3}{db^2} = 3F_2 - 6bF_4 = -\frac{3}{b^3}\,(bA_1 + A_4),$$

то соприкасающиеся плоскости этой линии действительно, совпадают с плоскостями $A_1A_3A_4$ поля ξ, взятыми в точках $A_1 = X$ прямой x конгруэнции. При $b=0$ и $b^* = \frac{1}{b} = 0$ этими соприкасающимися плоскостями в точках F_3 и F_4 являются плоскости π_1 и π_2. Теорема доказана.

Тартусский Государственный
университет

Поступило в редакцию
5.IX.1968

Литература

1. Ю. Г. Лумисте, Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях, Уч. зап. Тартуского ун-та, вып. 177 (1965), 6—42.
2. Ю. Г. Лумисте, Однородные расслоения со связностью и их погружения, Тр. геометр. семинара, т. 1, Москва, Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, 191—237.
3. Ю. Г. Лумисте, Связаности в однородных расслоениях, Мат. сб., 69 (11), 3 (1966), 434—469.
4. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, Москва, ГИТТЛ, 1956.
5. Чжень Шэн-шень, Комплексные многообразия, Москва, ИИЛ, 1961.

BENDROS TIESIŲ KONGRUENCIJŲ PROJEKTYVINĖS NORMALIZACIJOS

J. LUMISTE

(Reziumė)

Sakykime, projektyvinėje erdvėje P_3 duota tiesių kongruencija, t. y. erdvės P_3 tiesių Plfukerio daugdaros dvimatė podaugdarė ir, tarkime, kad kiekvienos tiesės $x \in M$ kiekvienam taškui X priskirta plokštuma ξ_X taip, kad $x \cap \xi_X = \{x\}$. Tarkime, kad kongruencija M ir laukas ξ yra diferencijuojami. Tada galime įrodyti, kad ξ nustato ant kiekvieno tiesinio konguruencijos M paviršiaus projektyvinį bet kurios tiesialinijinės sudaromosios atvaizdavimą ant bet kurios tiesialinijinės sudaromosios tada ir tik tada, kai lauko ξ plokštumos, paimtos bet kurios fiksuotos tiesės $x \in M$ taškuose, sudaro arba (a) erdvinės trečios eilės kreivės, kuri nekerta tiesės, glaustinių plokštumų šeimą; dvi iš šių glaustinių plokštumų yra kongruencijos fokalinių paviršių (F_i) $(i=1, 2)$ liečiamosiomis plokštumomis π_i; arba (b) antros eilės kūgio K_2, kuris liečia plokštumą π_2 ir eina per paviršiaus (F_2) tašką F_2, nesantį jo viršūne, liečiamųjų plokštumų šeimą; arba (c) pluoštą su ašimi, neturinčia bendrų taškų su x.

ALLGEMEINE PROJEKTIVE NORMALISATIONEN FÜR GERADENKONGRUENZEN

Ü. LUMISTE

(Zusammenfassung)

Sei in projektiven Raum P_3 eine Geradenkongruenz gegeben — eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M in Plückerschen Mannigfaltigkeit von Geraden in P_3 — und sei zum beliebigen Punkt X beliebiger Geraden $x \in M$ eine Ebene ξ_X verknüpft, so daß $x \cap \xi_X = \{X\}$. Es wird bei differenzierbaren M und Ebenenfeld ξ gezeigt, daß ξ dann und nur dann für alle Regelflächen von M die projektive Abbildungen einer beliebigen Erzeugenden auf die andere beliebige Erzeugende bestimmt, wenn die Ebenenschar aller Ebenen von ξ in Punkten einer willkürlich fixierendern Geraden entweder

(a) eine Schmiegungsebenenschar für solche räumliche Kurve dritter Ordnung ist, die keine gemeinsame Punkte mit x hat und zwei Schmiegungsebenen deren mit Tangentialebenen π_i der Fokalflächer (F_i) von M zusammenfallen $(i=1, 2)$, oder

(b) eine Tangentialebenenschar für solchen Kegel zweiter Ordnüng ist, welcher die Ebene π_2 berührt und durch den Punkt F_2 der Fläche (F_2) geht, so daß dieser Punkt F_2 nicht die Spitze des Kegels ist, oder

(c) ein Ebenenbündel ist, welcher Axe keinen gemeinsamen Punkt mit x hat.