1969

УДК–517.535.4

О СТИРАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

С. Я. ХАВИНСОН, А. Н. КОЧЕТКОВ

1. Пусть E – ограниченное замкнутое множество комплексной плоскости и G – та из дополнительных к E областей, которая содержит бесконечно-удаленную точку. Обозначим через $B^1(G)$ класс однозначных аналитических в G функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$|f(z)|\leqslant 1, \quad z\in G. \tag{1}$$

Если E является в некотором смысле редким множеством, то класс $B^1(G)$ состоит только из констант (в последнем случае говорят, что класс тривиален). Условием тривиальности класса $B^1(G)$ служит равенство нулю величины

$$\Omega(E)=\sup_{f\in B^1(G)}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right|, \tag{2}$$

где Γ – какой-нибудь контур, охватывающий E. Величину $\Omega(E)$ называют аналитической емкостью множества E (см., например, обзоры [1] и [2], где содержится обширная библиография). Изучение условий при которых класс $B^1(G)$ тривиален (т. е. условий равенства $\Omega(E)=0$) составляет известную проблему Пенлеве.

Вместо условия

$$\Omega(E)=0 \tag{3}$$

тривиальность класса $B^1(G)$ можно характеризовать равенством нулю других величин, выступающих при решении других экстремальных задач. Такие величины могут быть, в частности, получены, исходя из связей класса ограниченных функций с другими классами функций, например, с классом $P(G)$ функций, имеющих положительную вещественную часть, или с классом $B_R(G)$ функций, у которых вещественная часть ограничена ($f(z)=u(z)+$ $+iv(z)\in B_R(G)$, если $|u(z)|\leqslant 1$).

Если к упомянутым величинам применить так называемые соотношения двойственности экстремальных задач ([3], [4]), то тривиальность класса $B^1(G)$ оказывается эквивалентной возможности определенных аппроксимационных процессов в окрестности множества E (в этом отношении результаты настоящей заметки дополняют результаты из [5] и [6]).

Рассмотрим еще некоторые классы функций. Пусть $G_n\subset G$ – возрастающая последовательность областей, $G_n\ni\infty$, исчерпывающая область G. Границы Γ_n областей G_n предполагаются аналитическими кривыми. Через $g_n(\zeta, z)$ обозначается функция Грина области G_n.

Введем класс $E_p(G)$, $p>0$:

$f(z)\in E_p(G)$, если

$$\int_{\Gamma_n} |f(\zeta)|^p\, ds \leqslant N(f) < +\infty, \quad n=1, 2, \ldots \tag{4}$$

Класс $H_p(G)$, $p>0$, выделяется следующим неравенством:

$$\int_{\Gamma_n} |f(\zeta)| \frac{|\partial g_n|(\zeta,\infty)}{\partial \nu} ds \leqslant N(f), \qquad n=1, 2, \ldots \tag{5}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает производную по нормали к Γ_n.

Условие (5) эквивалентно тому, что $|f(z)|^p$ имеет в G гармоническую мажоранту (см. [7, 8]). В работе [9] показано, что условие (3) влечет тривиальность всех классов $E_p(G)$, $p>1$. В то же время класс $E_1(G)$ всегда нетривиален.

Оказывается, что если $\Omega(E)=0$, то на Γ_n можно выделить малые подмножества γ_n, mes $\gamma_n \to 0$ — при $n\to\infty$, такие, что из условия $f(z)\in E_1(G)$ и дополнительного условия

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|^p\, ds \leqslant M(f), \qquad p>1, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{6}$$

вытекает: $f(z)\equiv \mathrm{const}$. Таким образом, для заключения: $f(z)\equiv\mathrm{const}$ нет нужды требовать выполнения условия (4) при $p>1$ для целых контуров Γ_n; достаточно, чтобы (4) выполнялось при $p=1$ и выполнялось условие (6) при $p>1$ на малых дугах γ_n (эти дуги не зависят от $f(z)$).

В работе [7] Рудин поставил вопрос относительно совместной нетривиальности классов $H_p(G)$ и $B^1(G)$. Вопрос этот до настоящего времени открыт. Однако мы показываем, что если $f(z)\in H_1(G)$ и дополнительно выполняется (6) на дугах γ_n, малых теперь в том смысле, что их гармонические меры

$$\int_{\gamma_n} \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu} ds$$

стремятся к нулю при $n\to\infty$, то $f(z)=\mathrm{const}$ (при условии $\Omega(E)=0$, конечно). В частности, вместо условия (6) можно предполагать выполненным условие: $|f(z)|\leqslant M(f)$, $z\in\gamma_n$, $n=1, 2, \ldots$

2. Сначала мы рассмотрим вопросы, связанные с тривиальностью некоторых классов гармонических функций и сформулируем один критерий для множества нулевой аналитической емкости в терминах функций Грина и гармонических мер. При этом мы будем пользоваться уже введенными обозначениями.

Для удобства ссылок сформулируем ряд лемм, имеющих совершенно элементарный характер.

Лемма 1. *Классы $P(G)$ и $B^1(G)$ тривиальны или нетривиальны одновременно.*

Доказательство. Функция $w(\zeta)=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ конформно отображает правую полуплоскость на единичный круг, причем

$w(1)=0$, $w^{-1}(\Theta)>1$, если $0<\Theta<1$.

Если $P(G)$ — нетривиален и $f(z) \in P(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, то $g(z) = w[f(z)] \in B^1(G)$ и $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Наоборот, если $B^1(G)$ нетривиален и $g(z) \in B^1(G)$, $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то $f(z) = w^{-1}[g(z)] \in P(G)$ и $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, ч.т.д.

Лемма 1 показывает, что равенство $\Omega(E) = 0$ эквивалентно тривиальности класса $P(G)$.

Если класс $B^1(G)$ нетривиален, то существует

$$g(z) \in B^1(G),\ g(z) \not\equiv \mathrm{const},\ g(\infty) = 0.$$

В самом деле, в этом случае нетривиален класс $P(G)$ и существует $f(z) \in P(G)$, $f(z) \neq \mathrm{const}$, $f(\infty) = 1$, тогда $g(z) = w[f(z)]$ будет требуемой функцией.

Пусть теперь z_0 — фиксированная точка области G, $z_0 \neq \infty$.

Лемма 2. *Если $B^1(G)$ нетривиален, то существует $g^*(z) \in B^1(G)$ такая, что $g^*(\infty) = 0$, $g^*(z_0) > 0$.*

Доказательство. Пусть $g(z) \in B^1(G)$, $g(\infty) = 0$ и z_0 — нуль функции $g(z)$ порядка m. Тогда при достаточно малом d и некотором $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ функция $g^*(z) = e^{i\alpha} \cdot d \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ является требуемой.

Лемма 3. *Если $P(G)$ нетривиален, то существует $f^*(z) \in P(G)$, $f^*(\infty) = 1$, $f^*(z_0) > 1$.*

Доказательство. Существует, по леммам 1 и 2, функция $g^*(z) \in B^1(G)$ такая, что $g^*(\infty) = 0$, $g^*(z_0) = \Theta > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f^*(z) = w^{-1}[g^*(z)].$$

Тогда $f^*(z) \in P(G)$, $f^*(\infty) = w^{-1}(0) = 1$, $f^*(z_0) = w^{-1}(\Theta) > 1$ ч т.д.

Следствие. *Из леммы 3 вытекает, что если класс $P(G)$ нетривиален и $f(z) = u(z) + iv(z)$, то*

$$\sup_{f \in P(G)} [u(z_0) - u(\infty)] > 0, \tag{7}$$

в противном случае, т.е. когда $P(G)$ тривиален,

$$\sup_{f \in P(G)} [u(z_0) - u(\infty)] = 0.$$

Здесь полезно заметить, что в неравенстве (7) вместо бесконечно удаленной точки можно взять любую точку из G, отличную от z_0.

Условимся для удобства через $P(G)$ обозначать не только множество однозначных аналитических в G функций с положительной вещественной частью, но и класс действительных частей этих функций.

Лемма 4. *Пусть $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots$ возрастающая последовательность областей, $G_n \subset G_0$, $G_n \to G_0$ при $n \to \infty$. Пусть, далее, в областях G_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ определены классы $\mathfrak{M}(G_n)$ функцией $f(z)$, удовлетворяющие условиям:*

а) $\mathfrak{M}(G_0) = \bigcap\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{M}(G_n)$;

б) *из любой последовательности функций $f_{n_k}(z) \in \mathfrak{M}(G_{n_k})$, $k = 1, 2, \ldots$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри G_0 к некоторой функции из $\mathfrak{M}(G_0)$;*

в) *если $\mathfrak{M}(G_0)$ нетривиален, то для любых точек $z_1, z_2 \in G_0$ существует такая функция $f(z) \in \mathfrak{M}(G_0)$, что $f(z_1) \neq f(z_2)$.*

Тогда для того, чтобы $\mathfrak{M}(G_0)$ был тривиален, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых точек $\bar z_1$ и $\bar z_2$ из G_0

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathfrak{M}(G_n)} |f(\bar z_1)-f(\bar z_2)|=0. \tag{8}$$

Доказательство. Если $\mathfrak{M}(G_0)$ нетривиален, то в силу свойств а) и в)

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}(G_n)} |f(\bar z_1)-f(\bar z_2)|\geqslant d>0,$$

и равенство (8) несправедливо.

С другой стороны, если предел в (8) не существует или положителен, то существует последовательность $f_{n_k}\in\mathfrak{M}(G_{n_k})$ функций, для которых

$$|f_{n_k}(\bar z_1)-f_{n_k}(\bar z_2)|\geqslant d>0.$$

Выделяя на основании свойства б) подпоследовательность, сходящуюся к $f^*(z)\in\mathfrak{M}(G_0)$, получим

$$|f^*(\bar z_1)-f^*(\bar z)|\geqslant d>0,$$

и, следовательно, класс $\mathfrak{M}(G_0)$ – нетривиален.

Примером классов, удовлетворяющих условиям леммы 4, являются подклассы $\bar P(G_n)$ классов $P(G_n)$, состоящие из тех функций $u(z)\in P(G_n)$, для которых $u(\infty)=1$. Это вытекает из следствия леммы 3 (условие $u(\infty)=1$ нужно для выполнимости условия б) леммы 4). Этим условиям, как легко проверяется, удовлетворяют и все другие классы, рассматриваемые в настоящей заметке.

Введем еще следующие обозначения. Контуры, из которых состоит граница Γ_n области G, обозначим через

$$\Gamma_n^i,\ i=1,2,\ldots,P_n;\quad \Gamma_n=\bigcup_{i=1}^{P_n}\Gamma_n^i,\ \text{а через}\ \omega_n^i(z)$$

обозначим гармоническую меру контура Γ_n^i.

Теорема 1. *Аналитическая емкость $\Omega(E)=0$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдутся действительные числа λ_n^i и n_0 такие, что при $n>n_0$*

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu}-\frac{\partial g_n(\zeta,z_0)}{\partial\nu}+\sum_{i=1}^{p_n}\lambda_n^i\frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu}\geqslant 0,\ \zeta\in\Gamma_n, \tag{9}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – производная по нормали к Γ_n, $z_0\in G$.

Доказательство. Функция $u(z)\in P(G_n)$ представима в виде

$$u(z)=\int_{\Gamma_n}\frac{\partial g_n(\zeta,z)}{\partial\nu}\,d\mu(\zeta), \tag{10}$$

где $\mu(\zeta)$ – неотрицательная мера на Γ_n; равенства

$$\int_{\Gamma_n}\frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu}\,d\mu(\zeta)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ p_n \tag{11}$$

обеспечивают однозначность сопряженной к $u(z)$ функции. Если $u(z)\in\bar P(G_n)$, т.е. $u(\infty)=1$, то должно выполняться условие

$$\int_{\Gamma_n}\frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu}\,d\mu(\zeta)=1. \tag{12}$$

В работе [10] показано, что для максимума по всем неотрицательным мерам $\mu(\xi)$ функционала

$$\int\limits_{\Gamma_n} \left(\frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial\nu} - \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu}\right) d\mu(\zeta) = u(z_0) - u(\infty)$$

при дополнительных ограничениях (11) и (12) справедливо следующее соотношение двойственности

$$\max_{u \in \bar{P}(G_n)} [u(z_0) - u(\infty)] = \inf \varepsilon, \tag{13}$$

где нижняя грань берется по всем таким $\varepsilon > 0$ и действительным числам λ_n^i, для которых

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} - \frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial\nu} + \sum_{i=1}^{p_n} \lambda_n^i \frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu} \geqslant 0, \quad \zeta \in \Gamma_n. \tag{14}$$

Общую величину обоих экстремумов в (13) обозначим для краткости δ_n.

Равенство нулю аналитической емкости эквивалентно тривиальности класса $P(G)$ и, следовательно, класса $\bar{P}(G)$. Тривиальность же $\bar{P}(G)$, как показано в лемме 4, эквивалентна тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, а это, вместе с (14), и дает нужный результат.

Следствие 1. *Аналитическая емкость* $\Omega(E) = 0$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся действительные числа* η_n^i *и* μ_n^i *и номер* n_0 *такие, что при* $n > n_0$ *на* Γ_n *выполняется неравенство*:

$$\left| \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} - \frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial\nu} + \sum_{i=1}^{p_n} \eta_n^i \frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} + \sum_{i=1}^{p_n} \mu_n^i \frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu}. \tag{15}$$

Доказательство. Так как точки z_0 и $z = \infty$ равноправны, то меняя в (9) местами z_0 и бесконечно-удаленную точку, получим при $n > \tilde{n}_0$:

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial\nu} - \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} + \sum_{i=1}^{p_n} \tilde{\lambda}_n^i \frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu} \geqslant 0, \quad \zeta \in \Gamma_n, \tag{16}$$

где $\tilde{\lambda}_n^i$, $\tilde{n}_0$ — некоторые действительные числа. Соединяя неравенства (9) и 16), при $n > \max(n_0, \tilde{n}_0)$ будем иметь:

$$-\varepsilon \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} - \sum_{i=1}^{p_n} \lambda_n^i \frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu} \leqslant \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} -$$

$$-\frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial\nu} \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial\nu} + \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\tilde{\lambda}_n^i}{1+\varepsilon} \frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu}. \tag{17}$$

Но из неравенств $\beta \leqslant A \leqslant \alpha$ всегда следует неравенство

$$\left| A - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| \leqslant \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким образом, из (17) следует 15), ч.т.д.

Будем обозначать выражение, стоящее под знаком модуля в левой части неравенства (15), через $W_n(\zeta)=W_n(\zeta, \eta_n^i)$.

Следствие 2. *Если* $\Omega(E)=0$, *то существует последовательность* $\eta_n^1, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^{p_n}$, $n=1, 2, \ldots$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} |W_n(\zeta)|\, ds=0. \tag{18}$$

В самом деле, если проинтегрировать обе части неравенства (15) на Γ_n и учесть, что

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu}\, ds=1; \qquad \int_{\Gamma_n} \frac{\partial \omega_n^i(\zeta)}{\partial \nu}\, ds=0,$$

получим, при достаточно большом n:

$$\int_{\Gamma_n} |W_n(\zeta)|\, ds<\varepsilon,$$

где ε — как угодно мало.

Но условие (18) не только необходимо для равенства $\Omega(E)=0$, но и достаточно.

В самом деле, пусть верно равенство (18). Тогда для любой функции $f(z)\in \in B^1(G)$ имеем:

$$|f(\infty)-f(z_0)|=\left|\int_{\Gamma_n} f(\zeta)\left[\frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu}-\frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial \nu}\right] ds\right|=$$

$$=\left|\int_{\Gamma_n} f(\zeta)\, W_n(\zeta)\, ds\right|\leqslant \int_{\Gamma_n} |f(\zeta)|\,|W_n(\zeta)|\, ds\leqslant \int_{\Gamma_n} |W_n(\zeta)|\, ds<\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Поэтому $|f(\infty)-f(z_0)|=0$ и класс $B^1(G)$ тривиален, и, значит, $\Omega(E)=0$. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Для того, чтобы* $\Omega(E)=0$, *необходимо и достаточно существования действительных чисел* $\eta_n^1, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^{p_n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ *таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} \left|\frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu}-\frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial \nu}+\sum_{i=1}^{p_n} \eta_n^i\, \frac{\partial \omega_n^i(\zeta)}{\partial \nu}\right| ds=0.$$

Теорема 2 показывает, что равенство аналитической емкости множества нулю равносильно возможности аппроксимации в интегральной метрике разности $\frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu}-\frac{\partial g_n(\zeta, z_0)}{\partial \nu}$ линейными комбинациями нормальных производных гармонических мер контуров границы Γ_n.

Утверждение теоремы 2 можно было бы получить и иным путем. Для этого следовало рассмотреть задачу о $\max|u(z_0)-u(\infty)|$ в классе $B_k(G)$, который тривиален одновременно с классом $B^1(G)$.

Для доказательства следующих теорем мы используем одно соотношение, приведенное в [4]. Мы сформулируем его частный случай, удобный для нас.

Теорема 3. *Пусть выпуклое множество K является подмножеством выпуклого компакта K_1, I — некоторое множество индексов, конечное или* *бесконечное. Пусть на K_1 заданы непрерывные выпуклые функции $F_\nu(x)$, $\nu \in I$, и непрерывная вогнутая функция $g(x)$. Обозначим через S множество решений системы*

$$F_\nu(x)=0,\ x\in K,\ \nu\in I, \tag{19}$$

тогда, если S не пусто:

$$\sup_{x\in S} g(x)=\inf_{\lambda_i}\sup_{x\in K}\Big[g(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_{\nu_i}(x)\Big], \tag{20}$$

где нижняя грань берется по всем конечным наборам $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \in I$ и действительным числам λ_i.

Рассмотрим теперь класс $E_R(G)$ действительных частей $u(z)$ однозначных аналитических в G функций, для которых $\int\limits_{\Gamma_n} |u(\zeta)|ds\leqslant 1$. Множество таких функций всегда нетривиально, однако, если выделить из него подкласс функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям, то можно говорить в случае $\Omega(E)=0$, о тривиальности этого подкласса.

Теорема 4. *Если $\Omega(E)=0$, то существует такая последовательность дуг*

$$\gamma_n^j,\ j=1,2,\ldots,s_n,\ \gamma_n=\bigcup_j \gamma_n^j\subset\Gamma_n,\ n=1,2,3,\ldots,$$

что $\operatorname{mes}\gamma_n\to 0$ при $n\to\infty$ и класс $\tilde{E}_R(G)$ гармонических в G функций $u(z)$, имеющих в G однозначную сопряженную и удовлетворяющих условиям:

1) $\int\limits_{\Gamma_n} |u(\zeta)|\,ds\leqslant 1,\ n=1,2,3,\ldots,$

2) $|u(\zeta)|\leqslant M(u),\ \zeta\in\gamma_n,\ n=1,2,3,\ldots$

тривиален. Здесь $M(u)$ — константа, своя для каждой функции $u(z)$, но не зависящая от n.

Доказательство. Достаточно показать тривиальность класса $\tilde{E}_R^*(G)$ функций из $\tilde{E}_R(G)$, для которых в условии 2) M — некоторая абсолютная константа.

Если $W_n^0(\zeta)$ такие, как в (18), то существует последовательность $\{\gamma_n^j\}$ такая, что $\operatorname{mes}\gamma_n\to 0$, $n\to\infty$ и

$$\max_{\zeta\in\Gamma_n\setminus\gamma_n}|W_n^0(\zeta)|<\varepsilon_n, \qquad \int\limits_{\Gamma_n}|W_n^0(\zeta)|\,ds<\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Введем еще следующие обозначения. Под $\tilde{E}_R^*(G_n)$ будем понимать класс функций, который определяется также, как и $\tilde{E}_R^*(G)$, но условия 1) и 2) выполняются только на границе Γ_n области G_n. Классы $\tilde{E}_R^*(G)$, $\tilde{E}_R^*(G_n)$, очевидно, удовлетворяют условиям леммы 4.

Применим теорему 3 для оценки верхней грани функционала $g(f)=u(z_0)-u(\infty)$ в классе $\tilde{E}_R^*(G_n)$. Здесь множеством K является множество функций $u(\zeta)$ на Γ_n, удовлетворяющих условиям 1) и 2) теоремы (с абсолютной константой M) и с топологией слабой сходимости (K_1 — замыкание множества K). Ограничения (19), выделяющие S, примут вид:

$$\int\limits_{\Gamma_n} u(\zeta)\,\frac{\partial\omega_n^i(\zeta)}{\partial\nu}\,ds=0, \qquad i=1,2,\ldots,p_n.$$

Выписывая равенство (20) для этого случая, получим соотношение двойственности

$$I_n = \sup_{f \in \tilde{E}^*_R(G_n)} g(f) = \inf_{\eta^i_n} \sup_{u} \int_{\Gamma_n} u(\zeta)\, W_n(\zeta) ds,$$

где sup в правой части равенства берется по всевозможным действительным функциям $u(\zeta)$, удовлетворяющим неравенствам 1) и 2) на Γ_n.

Оценим I_n:

$$I_n \leqslant \sup_u \int_{\Gamma_n} u(\zeta)\, W^0_n(\zeta)\, ds = \sup_{\int\limits_{\Gamma_n \setminus \gamma_n} |u|\, ds \leqslant 1} \int_{\Gamma_n \setminus \gamma_n} u(\zeta)\, W^0_n(\zeta)\, ds +$$

$$+ \sup_{|u| \leqslant M} \int_{\Gamma_n} u(\zeta)\, W^0_n(\zeta)\, ds = \max_{\zeta \in \Gamma_n \setminus \gamma_n} |W^0_n(\zeta)| +$$

$$+ M \int_{\Gamma_n} W^0_n(\zeta)\, ds < \varepsilon_n + M \cdot \varepsilon_n.$$

Мы получили, что $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$. Из леммы 4 следует тривиальность класса $\tilde{E}^*_R(G)$. Теорема доказана. Обратимся теперь к классам $E_p(G)$ и $H_1(G)$ аналитических в G функций $f(z)$. Как уже отмечалось в пункте 1, если $\Omega(E) = 0$, то класс $E_p(G)$ тривиален при любом $p > 1$. Выпишем, исходя из теоремы 3, соотношение двойственности для E_p:

$$\tilde{I}_n = \sup_{f \in E^*_p(G_n)} \left| \int_{\Gamma_n} f(\zeta)\, d\zeta \right| = \sup_{f \in E^*_p(G_n)} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_n} f(\zeta)\, d\zeta.$$

(Класс $E^*_p(G)$ определяется равенством (4), в котором константа $N = 1$ уже не зависит от $f(z)$.) В этом случае множество K состоит из всех интегрируемых на Γ_n комплексных функций $f(\zeta)$, для которых выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma_n} |f(\zeta)|^p ds \leqslant 1, \tag{21}$$

а условием (19) является равенство

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma_n} f(\zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция из $E_1(G_n)$. Соотношение (20) примет вид:

$$\tilde{I}_n = \inf_{\varphi \in E_1(G_n)} \sup_f \operatorname{Re} \int_{\Gamma_n} f(\zeta)\, [1 + \varphi(\zeta)]\, d\zeta, \tag{22}$$

где верхняя грань в правой части равенства берется по всем $f(\zeta)$, удовлетворяющим неравенству (21). Отсюда получаем:

$$\tilde{I}^q_n = \inf_{\varphi \in E_q(G_n)} \left\{ \int_{\Gamma_n} |1 + \varphi(\zeta)|^q ds \right\}^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Из этого равенства и из леммы 4 заключаем: если $\Omega(E) = 0$, то для любого $q > 1$ существует последовательность аналитических в G_n и непрерывных в $\bar{G}_n$ функций $\varphi^0_n(z)$ такая, что (ср. [5])

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma_n} |1 + \varphi^0_n(\zeta)|^q ds = 0. \tag{23}$$

Это свойство нам понадобится при доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 5. *Если $\Omega(E)=0$, то существует такая последовательность дуг*

$$\{\gamma_n^j\},\ j=1,2,\ldots,s_n,\ \gamma_n=\bigcup_j \gamma_n^j,\ \gamma_n\subset\Gamma_n,\ n=1,2,3,\ldots,$$

что $\operatorname{mes}\gamma_n\to 0$ *при* $n\to\infty$ *и класс* $\tilde{E}_1(G)$ *однозначных аналитических в* G *функций* $f(z)$, *удовлетворяющих условиям*

1) $\int\limits_{\Gamma_n} |f(\zeta)|\,ds\leqslant N(f),\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

2) $\int\limits_{\gamma_n} |f(\zeta)|^p\,ds\leqslant M(f),\qquad p>1,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

где $N(f)$ и $M(f)$ *не зависят от* n, *тривиален.*

Доказательство. Достаточно доказать тривиальность класса $\tilde{E}_1^*(G)$ с абсолютными константами N и M.

Последовательность $\{\gamma_n^j\}$, требуемую условиями теоремы, образуем таким образом, чтобы

$$\max_{\zeta\in\Gamma_n\setminus\gamma_n} |1+\varphi_n^0(\zeta)|\to 0,\qquad n\to\infty, \tag{24}$$

где $\varphi_n^0(\zeta)$ те же, что и в равенстве (23), из которого и вытекает возможность такого выбора γ_n^j.

Образуем классы $\tilde{E}_1^*(G_n)$ (см. теорему 4).

Выпишем теперь соотношение двойственности для

$$\sup\left|\int\limits_{\Gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta\right|=\alpha_n$$

в классе $\tilde{E}_1^*(G_n)$ (его вывод аналогичен выводу равенства (22)):

$$\alpha_n=\inf_{\varphi\in E_1(G_n)}\ \sup_f\left|\int\limits_{\Gamma_n} f(\zeta)[1+\varphi(\zeta)]\,d\zeta\right|,$$

где верхняя грань берется по возможным комплексным функциям $f(\zeta)$ на Γ_n, удовлетворяющим неравенствам 1) и 2) теоремы с абсолютными константами N и M. Это равенство перепишем в виде:

$$\alpha_n=\inf_{\varphi\in E_1(G_n)}\left\{\sup_f\left|\int\limits_{\Gamma_n/\gamma_n} f(\zeta)[1+\varphi(\zeta)]\,d\zeta\right|+\right.$$

$$\left.+\sup_f\left|\int\limits_{\gamma_n} f(\zeta)[1+\varphi(\zeta)]\,d\zeta\right|\right\}, \tag{25}$$

где верхняя грань первого интеграла берется по всем комплексным функциям $f(\zeta)$ на $\Gamma_n\setminus\gamma_n$, для которых

$$\int\limits_{\Gamma_n\setminus\gamma_n} |f(\zeta)|\,ds\leqslant N,$$

а верхняя грань второго интеграла берется по всем комплексным функциям $f(\zeta)$ на γ_n, удовлетворяющим условию 2) теоремы.

Оценивая правую часть равенства (25) и учитывая (23) и (24) получим

$$\alpha_n \leqslant N \max_{\zeta \in \Gamma_n/\gamma_n} |1+\varphi_n^0(\zeta)| + M^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{\gamma_n} |1+\varphi_n^0(\zeta)|^q ds \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=0$. Классы $\tilde{E}_1^*(G)$, $\tilde{E}_1^*(G_n)$ удовлетворяют условиям леммы 4, поэтому $\tilde{E}_1^*(G)$ — тривиален. Теорема доказана.

Теорема 6. *Если $\Omega(E)=0$, то существует такая последовательность дуг*

$$\{\gamma_n^j\},\ j=1,2,\ldots,s_n,\ \gamma_n=\bigcup_j \gamma_n^j,\ \gamma_n\subset\Gamma_n,\ n=1,2,3,\ldots,$$

что гармонические меры $\omega(\gamma_n, G_n, \infty)$ дуг γ_n относительно G_n и точки $z=\infty$ стремятся к нулю при $n\to\infty$, и класс $\tilde{H}_1(G)$ однозначных аналитических в G функций, удовлеворяющих условиям

$$1)\ \int_{\Gamma_n} |f(s)| \frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu} ds \leqslant N(f), \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$2)\ \int_{\gamma_n} |f(\zeta)|^p ds \leqslant M(f), \qquad p>1, \qquad n=1,\ 2.\ 3,\ \ldots,$$

тривиален.

Доказательство. Рассматривая ту же последовательность $\varphi_n^0(z)$, что и при доказательстве предыдущей теоремы, видим:

$$\int_{\Gamma_n} \frac{|1+\varphi_n^0(\zeta)|}{\frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu}} \frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu} ds \to 0, \qquad n\to\infty.$$

Следовательно, существует последовательность дуг γ_n^j, удовлетворяющая условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\max_{\zeta\in\Gamma_n\setminus\gamma_n} \frac{|1+\varphi_n^0(\zeta)|}{\frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu}} \to 0, \qquad n\to\infty \\ &\text{и} \\ &\int_{\gamma_n} \frac{\partial g_n(\zeta,\infty)}{\partial\nu} ds \to 0, \qquad n\to\infty. \end{aligned}\right\| \tag{26}$$

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что N и M не зависят от $f(z)$. Введем классы $\tilde{H}_1^*(G_n)$ так же, как при доказательстве теорем 4 и 5. Соотношение двойственности для

$$\sup_{f\in\tilde{H}_1^*(G_n)} \left| \int_{\Gamma_n} f(\zeta)\, d\zeta \right| = \beta_n$$

имеет вид (25), но верхняя грань первого интеграла в правой части берется по всем комплексным функциям $f(\zeta)$ на $\Gamma_n\setminus\gamma_n$, удовлетворяющим условию 1), а верхняя грань второго — по всем комплексным функциям $f(\zeta)$, удовлетворяющим условию 2) теоремы (с абсолютной константой M).

Таким образом:

$$\beta_n \leqslant \sup_f \int\limits_{\Gamma_n \setminus \gamma_n} |f(\zeta)| \frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu} \frac{|1+\varphi_n^0(\zeta)|}{\frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu}} ds + \sup_f \int\limits_{\gamma_n} |f(\zeta)| \, |1+$$

$$+\varphi_n^0(\zeta)| \, ds = N \cdot \max_{\zeta \in \Gamma_n \setminus \gamma_n} \frac{|1+\varphi_n^0(\zeta)|}{\frac{\partial g_n(\zeta, \infty)}{\partial \nu}} + M^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{\gamma_n} |1+\varphi_n^0(\zeta)| \, ds \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

В силу (26) из этого неравенства выводим: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Классы $\tilde{H}_1^*(G)$, $\tilde{H}_1^*(G_n)$ удовлетворяют условиям леммы 4, откуда и следует, что $\tilde{H}_1^*(G)$ — тривиален. Теорема доказана.

Москва

Поступило в редакцию 28.III.1968

Литература

1. С. Я. Хавинсон, О стирании особенностей, Лит. матем. сб. III, № 1 (1963), 270—287.
2. С. Я. Хависон, Аналитические функции ограниченного вида, В сб. «Итоги науки. Математический анализ 1963», М., 1965.
3. С. Я. Хавинсон, Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, Успехи матем. наук, XVIII, № 2 (110), 1963, 25—98.
4. А. Н. Кочетков, Экстремальные задачи с несимметричными дополнительными условиям в некоторых классах аналитических функций ДАН Арм. ССР, XIV, № 3, 1965, 135—139.
5. С. Я. Хавинсон, Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 44—46.
6. С. Я. Хавинсон, Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды матем. ин-та АН СССР, 60, 1961, 304—324.
7. W. Pudin, Analitic functions of class H_p, Trans. Amer. Math. Soc., 78, N 1, 1955, 46—66.
8. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон, Классы аналитических функций в многосвязных областях, В сб. «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного», М., Физматгиз, 1960.
9. С. Я. Хавинсон, Об аналитической емкости множеств, совместной нетривиальности различных классов аналитических функций и лемме Шварца в произвольных областях, Матем. сб., 54, № 1, 1961, 3—50.
10. А. Н. Кочетков, Экстремальные задачи для аналитических функций с положительной вещественной частью, удовлетворяющих дополнительным условиям, ДАН СССР, 148, № 3, 1963, 508—511.

ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ PAVIENUMŲ IŠNYKIMO KLAUSIMU

S. CHAVINSONAS, A. KOČETKOVAS

(*Reziumė*)

Kaip žinoma, analizinių ir aprėžtų srityje $G \ni \infty$ funkcijų klasė B ir klasė E_p, $p>1$, kurios funkcijos turi aprėžtą p-ojo laipsnio vidurkį, yra arba abi trivialios (t. y. visos tų klasių funkcijos yra konstantos), arba abi jos netrivialios.

Rudinas nusakė panašią problemą klasėms B ir H_p (H_p yra apibrėžiama kaip klasė E_p, bet vidurkiai imami pagal harmonišką matą).

Darbe parodyta, kad $f(z)\equiv$const, kai klasė B yra triviali ir $f(z)\in H_1$ yra aprėžta tam tikrose mažose (harmoniško mato prasme) aibėse. Tos aibės nepriklauso nuo funkcijos $f(z)$.

Nagrinėjami ir kiti panašūs klausimai.

Šių klausimų tyrimas remiasi išvestais darbe naujais klasės B trivialumo kriterijais.

ON THE DISAPPEARANCE OF THE SINGULARITIES OF ANALYTIC FUNCTIONS

S. CHAWINSON, A. KOCHETKOW

(*Summary*)

It is known that the class B of functions bounded and analytic in a domain $G\in\infty$ and the class E_p, $p>1$, of functions having bounded integral averages from $f(z)^p$ are both trivial (contain only constants) or both not trivial. Rudin pointed the same question for the classes B and H_p (this class is defined as E_p but the integral averages are taken in harmonic measury).

This work shows that if the class B is trivial and $f(z)$ H_1 is bounded on small (in the meaning of harmonic measure) sets, them $f(z)\equiv$const. These sets are independent of the function $f(z)$.

Some other similar questions are considered.

The study of these questions is connected with new criterions for sets in the complement to whom the class B is trivial.