IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–513

О ГЕОМЕТРИИ СЕКУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВ ТЕНЗОРНЫХ ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЛИНЕЙЧАТОЙ БАЗОЙ

И. В. Близникене

Геометрия точечных и линейчатых многообразий трехмерного пространства хорошо разработана, а также хорошо разработана и геометрия проективно-метрических пространств. В работах В. С. Малаховского [1]–[3] исследуются проективно-метрические пространства специальных проективно-метрических структур, а также и некоторые подмногообразия таких пространств. Если имеем проективно-метрическое пространство, то фундаментальный поляритет этого пространства индуцирует поляритет на любой плоскости этого пространства.

Если мы рассмотрим множество m-мерных плоскостей n-мерного проективного пространства P_n, т.е. многообразие Грассмана $\Omega(m, n)$, то невырожденный поляритет пространства P_n порождает вполне определенный поляритет многообразия $\Omega(m, n)$. В работах В. С. Малаховского [1] – [3] решается в некотором смысле обратная задача, т.е. он в своих работах рассматривает многообразие $\Omega(m, n)$ с заданным полем фундаментального дифференциально-геометрического объекта специального вида (он рассматривает только те случаи, когда фундаментальным объектом является симметрический p-раз ковариантный тензор $p \geqslant 2$, $n-1 \geqslant m$, $n \geqslant 3$. Такие многообразия В. С. Малаховский назвал многообразиями плоских алгебраических элементов. Заметим, что в работах В. С. Малаховского не рассмотрен случай $m=1$.

В работе К. И. Гринцевичюса [4] рассмотрен тот случай, когда фундаментальным объектом многообразия $\Omega(m, n)$ является поле относительного инварианта двойного веса, т.е. поле однокомпонентного дифференциально-геометрического объекта. К. И. Гринцевичюс назвал многообразие $\Omega(1, 3)$ с заданным полем линейного дифференциально-геометрического объекта (см. [4], стр. 331) комплексом коррелятивных элементов.

В этой заметке рассматривается многообразие $\Omega(1, 3)$ с невырожденным симметрическим тензорным полем, определитель которого положительный. Устанавливается связь между геометрией такого пространства и геометрией пространства тензорных опорных элементов.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРОВНЕНИЯ

Инфинитезимальное перемещение подвижного репера $\{\mathbf{A}_i\}$ трехмерного проективного пространства P_3 имеет вид

$$d\mathbf{A}_i = \omega_i^k \mathbf{A}_k,$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, 4; \qquad p, q, r = 1, 2; \qquad \alpha, \beta, \gamma = 3, 4;$$

где пфаффовые формы ω_i^k связаны структурными уравнениями проективного пространства, т.е.

$$D\omega_j^i=[\omega_j^k,\ \omega_k^i].$$

Если моногообразие $\Omega\,(1,3)$ описывается ребром $l=(\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2)$ репера $\{\mathbf{A}_i\}$, то координаты прямой l многообразия $\Omega\,(1,3)$ являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega_p^\alpha=0$. Если на $\Omega\,(1,3)$ задано тензорное поле u_{pq}, то систему дифференциальных уравнений этого поля можно записать в виде:

$$du_{pq}-u_{rq}\omega_p^r-u_{pr}\omega_q^r-\omega u_{pq}=u_{pq\alpha}^r\omega_r^\alpha, \tag{1}$$

где $D\,\omega=0$ и

$$\det\|u_{pq}\|>0. \tag{2}$$

Если $\mathbf{M}=t^p\mathbf{A}_p$ и $\mathbf{N}=T^p\mathbf{A}_p$ две точки прямой l, то эти точки находятся в инволюции, которая порождается тензорным полем (1), тогда и только тогда, когда

$$u_{pq}t^pT^q=0. \tag{3}$$

Двойные точки этого инволютивного соответствия, в силу (2), являются мнимыми. Рассматриваемое инволютивное соответствие зависит от трех однородных параметров. Неоднородные параметры этого инволютивного соответствия выберем так, чтобы $u_{22}=1$. Тогда из дифференциальных уравнений для u_{22} следует, что

$$\omega=2v\omega_2^1-2\omega_2^2$$

и неоднородные параметры $u_{11}=u$ и $u_{12}=-v$ являются решением системы

$$\begin{aligned}du&=2u\,(\omega_1^1-\omega_2^2)-2v\omega_1^2+2uv\omega_2^1+2\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha,\\ dv&=v\,(\omega_1^1-\omega_2^2)-\omega_1^2-u\omega_2^1+2v^2\omega_2^1+\mu_\alpha^p\omega_p^\alpha.\end{aligned} \tag{4}$$

Двойные точки инволюции (3) имеют вид:

$$\mathbf{D}_1=\mathbf{A}_1+t_1\mathbf{A}_2,\qquad \mathbf{D}_2=\mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2, \tag{5}$$

где t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения

$$t^2-2vt+u=0\ (v^2-u<0).$$

Дифференцируя уравнения (4) внешним образом, мы получим

$$\begin{aligned}&[\nabla\lambda_\alpha^p-2\lambda_\alpha^p(\omega_1^1-\omega_2^2)+\mu_\alpha^p\omega_1^2-2v\lambda_\alpha^p\omega_2^1-u\mu_\alpha^p\omega_2^1+\\ &+u\delta_2^p(\omega_\alpha^2-v\omega_\alpha^1)+\delta_1^p(v\omega_\alpha^2-u\omega_\alpha^1),\ \omega_p^\alpha]=0\end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned}&[\nabla\mu_\alpha^p-\mu_\alpha^p(\omega_1^1-\omega_2^2)+2\lambda_\alpha^p\omega_2^1-4v\mu_\alpha^p\omega_2^1+\delta_1^p(\omega_\alpha^2-\\ &-v\omega_\alpha^1)+\delta_2^p(v\omega_\alpha^2+u\omega_\alpha^1-2v^2\omega_\alpha^1),\ \omega_p^\alpha]=0,\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\nabla\lambda_\alpha^p=d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\omega_q^p-\lambda_\beta^p\omega_\alpha^\beta,\qquad \nabla\mu_\alpha^p=d\mu_\alpha^p+\mu_\alpha^q\omega_q^p-\mu_\beta^p\omega_\alpha^\beta.$$

Развертывая эти уравнения по лемме Картана, мы получим

$$\begin{aligned}&\nabla\lambda_\alpha^p-2\lambda_\alpha^p(\omega_1^1-\omega_2^2)+\mu_\alpha^p\omega_1^2-2v\lambda_\alpha^p\omega_2^1-\\ &-u\mu_\alpha^p\omega_2^1+u\delta_2^p(\omega_\alpha^2-v\omega_\alpha^1)+\delta_1^p(v\omega_\alpha^2-u\omega_\alpha^1)=\lambda_{\alpha\beta}^{pq}\omega_q^\beta,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\mu_\alpha^p-\mu_\alpha^p(\omega_1^1-\omega_2^2)+2\lambda_\alpha^p\omega_2^1-4v\mu_2^p\omega_2^1+\\ &+\delta_1^p(\omega_\alpha^2-v\omega_\alpha^1)+\delta_2^p(v\omega_\alpha^2+u\omega_\alpha^1-2v^2\omega_\alpha^1)=\mu_{\alpha\beta}^{pq}\omega_q^\beta,\end{aligned} \tag{9}$$

причем

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta}=\lambda^{qp}_{\beta\alpha}; \qquad \mu^{pq}_{\alpha\beta}=\mu^{qp}_{\beta\alpha}. \tag{10}$$

Рассмотрим преобразование подвижного репера $\{\mathbf{A}_i\}$, определенное равенствами

$$\mathbf{B}_p=a^q_p\mathbf{A}_q \qquad \mathbf{B}_\alpha=\mathbf{A}_\alpha. \tag{11}$$

Если инфинитезимальное перемещение репера $\{\mathbf{B}_i\}$ имеет вид

$$d\mathbf{B}_i=\Omega^k_i\mathbf{B}_k,$$

то пфаффовые формы ω^j_i и Ω^j_i связаны соотношениями

$$\Omega^s_p=(da^r_p+a^q_p\omega^r_q)\,\tilde{a}^s_r, \qquad \Omega^q_p=a^q_p\omega^a_q, \tag{12}$$

$$\Omega^q_\alpha=\omega^p_\alpha\tilde{a}^q_p, \qquad \Omega^\beta_\alpha=\omega^\beta_\alpha$$

или

$$\omega^s_p=d\tilde{a}^q_p a^s_q+\tilde{a}^r_p a^s_q\Omega^q_r,$$

$$\omega^\alpha_q=\tilde{a}^r_q-\Omega^\alpha_r,$$

$$\omega^q_\alpha=\Omega^s_\alpha a^q_s,$$

$$\omega^\beta_\alpha=\Omega^\beta_\alpha, \tag{13}$$

где

$$\tilde{a}^p_q=\frac{\partial \ln \det \| a^r_s \|}{\partial a^q_p}\,.$$

Матрицу преобразования (11) выберем так, чтобы двойные точки (5) в новом репере имели вид $\mathbf{B}_1+i\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_1-i\mathbf{B}_2$, т. е.

$$\mathbf{A}_1+t_1\mathbf{A}_2=\mathbf{B}_1+i\mathbf{B}_2, \qquad \mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2=\mathbf{B}_1-i\mathbf{B}_2$$

или

$$\| a^q_p \|=\begin{Vmatrix} 1 & v \\ 0 & \sqrt{u-v^2} \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Обратная матрица этой матрицы имеет вид

$$\| a^q_p \|=\begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{v}{\sqrt{u-v^2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{u-v^2}} \end{Vmatrix}.$$

В новом репере уравнения (4) принимают вид

$$\Omega^2_2-\Omega^1_1=\Lambda^p_\alpha\Omega^\alpha_p \tag{15}$$

и

$$\Omega^2_1+\Omega^1_2=\mathrm{M}^p_\alpha\Omega^\alpha_p, \tag{16}$$

где

$$\Lambda^p_\alpha=\frac{\lambda^r_\alpha-v\mu^r_\alpha}{u-v^2}\,\tilde{a}^p_r \tag{17}$$

и

$$\mathrm{M}^p_\alpha=\frac{\mu^s_\alpha}{\sqrt{u-v^2}}\,\tilde{a}^p_s\,. \tag{18}$$

§. 2. Многообразие Ω (1, 3) с полем инволютивных соответствий как секущая поверхность пространства тензорных опорных элементов с линейчатой базой

Как известно, пространством опорных элементов называется локальное топологическое произведение дифференцируемого многообразия и пространства значений дифференциально-геометрического объекта (см. [5]), называемого опорным объектом. Если опорный объект является тензором, то такое пространство называется пространством тензорных опорных элементов.

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_p^\alpha = 0, \qquad \nabla u_{pq} - \omega u_{pq} = 0$$

вполне интегрируема и первые интегралы этой системы можно считать локальными координатами некоторого нового пространства $V^0_{4,3}$, т.е. пространства тензорных опорных элементов с линейчатой базой Ω (1, 3). Это многообразие является специальным случаем расслоенного пространства в смысле А. Лихнеровича [6]. Тогда систему дифференциальных уравнений (1) (или (4)) совместно с внешними уравнениями (6) и (7) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений четырехмерной поверхности семимерного пространства $V^0_{4,3}$. Эту поверхность мы и будем называть секущей поверхностью рассматриваемого пространства тензорных опорных элементов.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПОДОБЪЕКТЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Инвариантная прямая. Рассмотрим прямую, которая не пересекает прямую l. Уравнения этой прямой относительно репера $\{B_i\}$ можно представить в виде

$$X^p = H^p_\alpha X^\alpha. \tag{19}$$

Будем считать, что эта прямая является инвариантной относительно стационарной подгруппы прямой l, т.е. таких проективных преобразований пространства P_3, которые сохраняют прямую l. Прямая (19) является инвариантной прямой тогда и только тогда, когда величины H^p_α образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры

$$\nabla H^p_\alpha + \Omega^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\Omega^\beta_q, \tag{20}$$

где

$$\nabla H^p_\alpha = dH^p_\alpha - H^p_\beta\Omega^\beta_\alpha + H^q_\alpha\Omega^p_q.$$

Оказывается, что фундаментальный объект первого порядка рассматриваемой секущей поверхности всегда в качестве подобъекта содержит подобъект, структура которого такая же как и объекта (20).

Продолжая систему дифференциальных уравнений (15) и (16), мы получим

$$\nabla\Lambda^p_\alpha + \mathrm{M}^p_\alpha(\Omega^2_1 - \Omega^1_2) + \delta^p_2\Omega^2_\alpha - \delta^p_1\Omega^1_\alpha = \Lambda^{pq}_{\alpha\beta}\Omega^\beta_q \tag{21}$$

и

$$\nabla\mathrm{M}^p_\alpha - \Lambda^p_\alpha(\Omega^2_1 - \Omega^1_2) + \delta^p_1\Omega^2_\alpha + \delta^p_2\Omega^1_\alpha = \mathrm{M}^{pq}_{\alpha\beta}\Omega^\beta_q. \tag{22}$$

Из этих дифференциальных уравнений следует, что величины

$$H^p_\alpha = \begin{cases} \dfrac{-\Lambda^1_\alpha + \mathrm{M}_\alpha}{2}, & p=1, \\ \dfrac{\Lambda_\alpha + \mathrm{M}^1_\alpha}{2}, & p=2 \end{cases} \tag{23}$$

являются решениями такой же системы как и (20).

Если X^i -координаты точки $\mathbf{M}$ относительно репера $\{\mathbf{B}_i\}$, а x^i – координаты той же точки относительно репера $\{\mathbf{A}_i\}$, то

$$h^s_\alpha = H^p_\alpha a^s_p, \tag{24}$$

где h^s_α – коэффициенты уравнения инвариантной прямой относительно репера $\{\mathbf{A}_i\}$. Очевидно, что

$$h^1_\alpha = \frac{-\lambda^1_\alpha + \mu_\alpha}{2\,(u-v^2)}\,; \qquad h^2_\alpha = \frac{\lambda^2_\alpha - 2v\lambda_\alpha + u\mu_\alpha}{2\,(u-v^2)}\,. \tag{25}$$

2. Относительный инвариант I. Из системы дифференциальных уравнений (21) и (22) следует, что величина I, определенная равенством

$$I = -\begin{vmatrix} \Lambda^1_3 & \Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_3 & \Lambda^2_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Lambda^1_3 & \mathrm{M}^2_4 \\ -\Lambda^2_3 & \mathrm{M}^1_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{M}^1_3 & \Lambda^2_4 \\ \mathrm{M}^2_3 & -\Lambda^1_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathrm{M}^1_3 & \mathrm{M}^1_4 \\ \mathrm{M}^2_3 & \mathrm{M}^2_4 \end{vmatrix} \tag{26}$$

является относительным инвариантом, т.е.

$$dI - I\,(\Omega^p_p - \Omega^\alpha_\alpha) = I^p_\alpha \Omega^\alpha_p, \tag{27}$$

где величины I^p_α являются рациональными функциями от $\Lambda^{pq}_{\alpha\beta}$ и $\mathrm{M}^{pq}_{\alpha\beta}$.

3. Инвариантная квадрика. Оказывается, что величины

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \mathrm{M}^1_3 & \mathrm{M}^2_3 \\ \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 \end{vmatrix},$$

$$A_{34} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathrm{M}^1_4 & \mathrm{M}^2_4 \\ \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathrm{M}^1_3 & \mathrm{M}^2_3 \\ \Lambda^1_4 & \Lambda^2_4 \end{vmatrix} \tag{28}$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} \mathrm{M}^1_4 & \mathrm{M}^2_4 \\ \Lambda^1_4 & \Lambda^2_4 \end{vmatrix}$$

являются решением системы

$$\nabla A_{\alpha\beta} + 2H^1_{(\alpha}\Omega^1_{\beta)} + 2H^2_{(\alpha}\Omega^2_{\beta)} + \Omega^p_p A_{\alpha\beta} = A^p_{\alpha\beta\gamma}\Omega^\gamma_p, \tag{29}$$

где $A^p_{\alpha\beta\gamma}$ -рациональные функции от $\Lambda^{pq}_{\alpha\beta}$ и $\mathrm{M}^{pq}_{\alpha\beta}$, т.е. система величин $(H^p_\alpha,\ A_{\alpha\beta})$ является дифференциально-геометрическим объектом, который в качестве подобъекта содержит объект H^p_α. Если уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2$, записать в виде

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 - 2B^1_\alpha X^\alpha X^1 - 2B^2_\alpha X^\alpha X^2 + B_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0, \tag{30}$$

то условия инвариантности этой поверхности имеют вид

$$\delta B^p_\alpha - B^p_\beta \pi^\beta_\alpha + B^q_\alpha \pi^p_q + \pi^p_\alpha = 0,$$

$$\delta B_{\alpha\beta} - 2B_{\alpha(\gamma}\pi^\gamma_{\beta)} + B^1_{(\alpha}\pi^1_{\beta)} + 2B^2_{(\alpha}\pi^2_{\beta)} + \pi^p_p A_{\alpha\beta} = 0, \tag{31}$$

где

$$\pi_j^i=\Omega_j^i(\delta).$$

Отсюда и следует, что при помощи дифференциально-геометрического объекта $(H_\alpha^p, A_{\alpha\beta})$ определяется инвариантная квадрика, если H_α^p и $A_{\alpha\beta}$ определены формулами (23) и (27).

4. **Тензор** $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$. Дифференциально-геометрический объект $(H_\alpha^p,\ A_{\alpha\beta})$ содержит подобъект

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}-H_\alpha^1H_\beta^1-H_\alpha^2H_\beta^2, \tag{32}$$

компоненты которого являются решением системы

$$\nabla\mathfrak{A}_{\alpha\beta}+\mathfrak{A}_{\alpha\beta}\Omega_p^p=\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma}^p\Omega_p^\gamma,$$

где

$$\nabla\mathfrak{A}_{\alpha\beta}=d\mathfrak{A}_{\alpha\beta}-2\mathfrak{A}_{\gamma(\alpha}\Omega_{\beta)}^\gamma, \tag{33}$$

т.е. образуют относительный тензор.

5. **Тензор** G_{pqr}^α. Система величин G_{pqr}^α, определенных равенствами

$$G_{111}^3=-G_{122}^3=\mathrm{M}_4^2-H_4^1,$$
$$G_{112}^3=-G_{222}^3=\Lambda_4^2-H_4^2,$$
$$G_{122}^4=-G_{111}^4=\mathrm{M}_3^2-H_3^1,$$
$$G_{222}^4=-G_{112}^4=\Lambda_3^2-H_4^2, \tag{34}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla G_{pqr}^\alpha-G_{pqr}^\alpha(\ldots)=G_{pqr\beta}^{\alpha s}\Omega_s^\beta, \tag{35}$$

где

$$\nabla G_{pqr}^\alpha=dG_{pqr}^\alpha-G_{sqr}^\alpha\Omega_p^s-G_{psr}^\alpha\Omega_q^s-G_{pqs}^\alpha\Omega_r^s+G_{pqr}^\beta\Omega_\beta^\alpha,$$

т.е. образует относительный тензор.

Так как условия инвариантности точки $t^p\mathbf{B}_p$, лежащей на прямой l и условия инвариантности плоскости $C_\alpha X^\alpha=0$, проходящей через прямую l, имеет, соответственно, вид

$$\delta t^p+t^q\pi_q^p-\pi t^p=0, \tag{36}$$

и

$$\delta C_\alpha-C_\beta\pi_\alpha^\beta-\tilde{\pi}C_\alpha=0, \tag{37}$$

где $D\pi=0$, $D\tilde{\pi}=0$, то при помощи тензора G_{pqr}^α можно установить инвариантное соответствие между точками прямой l и плоскостями, проходящими через прямую l, в виде

$$G_{pqr}^\alpha t^pt^qt^rC_\alpha=0. \tag{38}$$

§ 4. Геометрические интерпретации

Если $\mathbf{M}=\mathbf{B}_1+t\mathbf{B}_2$ является точкой возврата развертывающейся поверхности, проходящей через луч l, то формы Ω_p^α связаны соотношениями

$$\Omega_1^\alpha+t\Omega_2^\alpha=0. \tag{39}$$

Дифференцируя эти соотношения внешним образом, мы получим

$$[\Omega_2^\alpha,\ \Theta]=0,$$

где

$$\Theta = dt + t(\Omega_2^2 - \Omega_1^1) + \Omega_1^2 - t^2\Omega_2^1.$$

Если предположим, что точка $\mathbf{M}$ описывает инвариантную кривую, то $\Theta \neq 0$ и, в силу леммы Картана, будем иметь

$$\Omega_2^\alpha = \Lambda^\alpha \Theta. \tag{40}$$

Так как вдоль рассматриваемой развертывающейся линейчатой поверхности

$$d\mathbf{M} = (\Omega_1^1 + t\Omega_2^1)\,\mathbf{M} + \Theta\mathbf{B}_2,$$

$$d^2\mathbf{M} = (\ldots)\,\mathbf{M} + (\Omega_1^1 + t\Omega_2^1)\,\mathbf{M} + (\ldots)\,\mathbf{B}_2 + \Theta\Omega_2^\alpha\mathbf{B}_\alpha,$$

то уравнение касательной плоскости этой поверхности вдоль образующей имеет вид

$$\Lambda^3 X^4 - \Lambda^4 X^3 = 0. \tag{41}$$

Если $\mathbf{N} = \mathbf{B}_1 + T\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{N}' = T\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ пара точек, принадлежащих инволюции, то, когда точка $\mathbf{M}$ описывает кривую, определенную уравнениями (39) и(41), т.е. когда прямая l движется по развертывающейся поверхности, точки $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ описывают кривые $\{\mathbf{N}\}$ и $\{\mathbf{N}'\}$, лежащие на линейчатой поверхности. Уравнения касательных к этим кривым, соответственно в точках $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$, имеют вид

$$X^\alpha = (X^2 - X^1 T)\,\xi\Lambda^\alpha \tag{42}$$

и

$$X^\alpha = (X^1 + X^2 T)\,\eta\Lambda^\alpha, \tag{43}$$

где

$$\xi = (T - t)\,\frac{\Theta}{\Delta T}\,; \qquad \eta = -\frac{Tt + 1}{\dfrac{\Delta T}{\Theta} + \Delta_\alpha\Lambda^\alpha}\,;$$

$$\Delta T = dT + T(\Omega_2^2 - \Omega_1^1) + \Omega_1^2 - T^2\Omega_2^1,$$

$$\Delta_\alpha = (T^2 - 1)(\mu_\alpha^2 - t\mu_\alpha^1) - 2T(\Lambda_\alpha^2 - t\Lambda_\alpha^1).$$

Координаты точки пересечения $\mathbf{P}$ прямых (42) и (43) связаны соотношениями

$$X^2 = \frac{T\xi + \eta}{\xi - T\eta}\,X^1,$$

$$X^\alpha = \frac{(1 + T^2)\,\xi\eta}{\xi - T\eta}\,\Lambda^\alpha X^1. \tag{44}$$

Очевидно, что координаты точки $\mathbf{P}$ зависят от параметра $\frac{\Delta T}{\Theta}$ и при изменении этого параметра точка $\mathbf{P}$ в касательной плоскости развертывающейся поверхности описывает прямую, уравнения которой относительно репера $\{\mathbf{B}_i\}$ имеют вид

$$(T - t)(X^2 - TX^1) + (X^1 + TX^2)(Tt + 1) + (\Delta_3 + \Delta_4\Lambda)\,X^3 = 0,$$

$$X^4 - \Lambda X^3 = 0, \tag{45}$$

где

$$\Lambda = \frac{\Lambda_4}{\Lambda_3}.$$

Так как через прямую l можно провести однопараметрическое семейство развертывающихся поверхностей (параметр Λ), то семейству развертывающихся поверхностей соответствует однопараметрическое семейство прямых (45) (считаем, что параметры T и t фиксированы), расположенных в плоскости

$$(T-t)(X^2-TX^1)+(X^1+TX^2)(Tt+1)+\Delta_\alpha X^\alpha=0. \tag{46}$$

Таким образом, произвольной паре точек $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ луча l мы сопоставляем плоскость (46), а лучу l – двухпараметрическое семейство плоскостей (46). Если точка $\mathbf{M}$ описывает луч l, а точка $\mathbf{N}$ фиксирована, то плоскости однопараметрического семейства плоскостей (46) (считаем, что t меняется, а T фиксирован) вращаются около прямой

$$\begin{gathered}2TX^2-(1-T^2)X^1+[(T^2-1)\mathrm{M}^2_\alpha-2T\Lambda^2_\alpha]X^\alpha=0,\\ 2TX^1-(1-T^2)X^2+[(T^2-1)\mathrm{M}^1_\alpha-2\Lambda^1_\alpha]X^\alpha=0,\end{gathered} \tag{47}$$

т.е. эта прямая является осью пучка плоскостей (46) (когда точка $\mathbf{N}$ фиксирована).

Если точка $\mathbf{N}$ меняется, то полученная прямая (47) описывает поверхность второго порядка:

$$(X_1)^2+(X_2)^2+2H^2_\alpha X^2X^\alpha-2H^1_\alpha X^1X^\alpha+A'_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta=0. \tag{48}$$

Таким образом, мы получили геометрическую интерпретацию объекта (H^p_α, $A_{\alpha\beta}$), т.е. получили геометрическую конструкцию инвариантной квадрики. Оказывается, что возможна и другая геометрическая интерпретация этой квадрики.

Возьмем две пары точек, принадлежащих одной инволюции:

$$\mathbf{M}=\mathbf{B}_1+t\mathbf{B}_2,\quad \mathbf{M}'=\mathbf{B}_1t-\mathbf{B}_2,\quad \mathbf{N}=\mathbf{B}_1+T\mathbf{B}_2,\quad \mathbf{N}'=\mathbf{B}_1T-\mathbf{A}_2.$$

Если точка $\mathbf{M}$ фиксирована, то при движении прямой l точки $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ опишут поверхности $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$, касательные плоскости которых пересекаются по прямой

$$\begin{gathered}(T-t)(TX^1-X^2)+T_\alpha X^\alpha=0,\\ (Tt+1)(X^1+TX^2)+(T_\alpha+\Delta_\alpha)X^\alpha=0,\end{gathered} \tag{49}$$

где

$$\Delta T=dT+T(\Omega^2_2-\Omega^1_1)+\Omega^2_1-T^2\Omega^1_2=T_\alpha\Omega^\alpha_2.$$

Уравнения этой прямой зависят не только от выбора точек $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, т.е. от выбора параметров t и T, но и от выбора величин T_α. Геометрическое место этих прямых (когда меняются T_α) есть плоскость (46). Если будем менять только один параметр t, то получим пучок плоскостей с осью (47). Если же и параметры T меняются, то геометрическое место прямых (47) образует поверхность второго порядка (48).

Прямая, сопряженная прямой l относительно квадрики (48), совпадает с инвариантной прямой, коэффициенты уравнений которой определены формулами (23).

Точки пересечения прямой H (инвариантной прямой) с квадрикой (48) определяются уравнениями

$$X^p=H^p_\alpha X^\alpha,\qquad \mathfrak{A}_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta=0.$$

Отсюда и следует геометрический смысл тензора $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим пучок прямых в плоскости $C_\alpha X^\alpha=0$ с центром в точке $t^p\mathbf{B}_p$. Точка $t^p\mathbf{B}_p$, лежащая на луче l, постоянна при условиях

$$t^p\Omega_p^\alpha=0,$$

$$d\left(\frac{t^2}{t^1}\right)+\frac{t^2}{t^1}(\Omega_2^2-\Omega_1^1)+\Omega_1^2-\frac{(t^2)^2}{(t^1)^2}\Omega_2^1=0.$$

Плоскость $C_\alpha X^\alpha=0$, проходящая через луч l, постоянна, если выполняются уравнения

$$C_\alpha\Omega_p^\alpha=0,$$

$$dC_\alpha-C_\beta\Omega_\alpha^\beta=\Theta C_\alpha.$$

Система уравнений

$$t^p\Omega_p^\alpha=0;\qquad C_\alpha\Omega_p^\alpha=0$$

совместна и общее решение имеет вид

$$\Omega_1^3=-tC_4\Omega,\qquad \Omega_1^4=tC_3\Omega,$$

$$\Omega_2^3=C_4\Omega,\qquad \Omega_2^4=-C_3\Omega.$$

Когда прямая l описывает пучок прямых, то точка $\mathbf{M}'=\mathbf{B}_1t-\mathbf{B}_2$, где $t=t^2:t^1$, описывает кривую $\{\mathbf{M}'\}$ и уравнения касательной $\left(\mathbf{M}',\frac{d\mathbf{M}}{\Omega}\right)$ к этой кривой имеют вид

$$\begin{aligned}&\{(t^2-1)(-M_3^1C_4t+M_4^1C_3t+M_3^2C_4-M_4^2C_3)-2t(-\Lambda_3^1t+\Lambda_4^1C_3t+\\&+\Lambda_3^2C_4-\Lambda_4^2C_3)\}X^3\mp C_4t(1+t^2)X^2+C_4(1+t^2)X^1=0,\\&C_\alpha X^\alpha=0.\end{aligned}\tag{50}$$

Условие пересечения прямой (50) с инвариантной прямой имеет вид

$$G_{pqr}^\alpha t^pt^qt^rC_\alpha=0,$$

откуда и следует геометрический смысл тензора G_{pqr}^α.

Если точка $\mathbf{M}$ постоянна, то точка $\mathbf{M}'$ описывает поверхность $\{\mathbf{M}'\}$. Касательная плоскость к этой поверхности в точке $\mathbf{M}'$ проходит через прямую H тогда и только тогда, когда $I=0$ (при произвольном выборе параметра t).

Выражаю глубокую благодарность проф. К. И. Гринцевичусу, под непосредственным руководством которого выполнена эта работа.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
25.IV.1968

Литература

1. В. С. Малаховский, Общая характеристика многообразия плоских алгебраических элементов, Труды Томского гос. ун-та им. В. В. Куйбышева (Геометрический сборник т. 4), т. **176**,, 5–10, 1964.
2. В. С. Малаховский, Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов, Труды Томского гос. ун-та им. В. В. Куйбышева (Геометрический сборник т. 4), т. **176**, 11–19, 1964.
3. В. С. Малаховский, Многообразия p-мерных квадрик в n-мерном проективном пространстве, Труды Первой республиканской конференции математиков БССР, Минск, 1965, стр. 233–246.

4. К. И. Гринцевичюс, О комплексе коррелятивных элементов, Лит. матем. сб., IV, № 3, (1964), 329–335.
5. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского гос. ун-та, т. **118**, кн. 4, 75–147, 1958.
6. А. Лихнерович, Теория связностей в целом и группы голономии, ИИЛ, Москва, 1960.

APIE VIENOS KLASĖS TENZORINIŲ ATRAMINIŲ ELEMENTŲ SU TIESIALINIJINE BAZE KERTAMOJO PAVIRŠIAUS GEOMETRIJĄ

I. Bliznikienė

(*Reziumė*)

Sakykime, Ω (1, 3) – trimatės projektyvinės erdvės tiesių daugdara. Daugdaros Ω (1, 3) fundamentaliniu objektu yra tenzorinis laukas u_{pq} ($u_{pq}=u_{qp}$, $\det\|u_{pq}\|>0$). Ištirta daugdaros Ω (1, 3) fundamentalinio objekto pirmojo diferencialinio pratęsimo struktūra ir surastos jo poobjekčių geometrinės interpretacijos.

ON THE GEOMETRY OF CROSS SURFACE OF ONE CLASS OF TENSOR SUPPORTING ELEMENTS SPACES WITH STRAIGHTLINE BASE

I. Bliznikienė

(*Summary*)

Let Ω (1, 3) be the manifold of lines of tree-dimensional projective space. The author considers manifolds the fundamental-objects of which is tensor u_{pq}($u_{pq}=u_{qp}$, $\det\|u_{pq}\|\neq 0$). The structure of first differential etension of fundamental-objects of manifold Ω (1, 3) is considered and geometrical interpretations of its subobjects are obtained.