IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК – 518.9

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Э. Й. Вилкас, И. П. Ячяускас

Дифференциальную игру типа преследования определим множествами чистых стратегий игроков P и Q, областью преследования R в n-мерном евклидовом пространстве и некоторым отображением F множества ситуаций $P\times Q$ на множество траекторий $X=\{x(t)\}$. Для нас не будет играть роли вид дифференциального уравнения, описывающего траектории игры или заменяющие его другие правила построения этой траектории. Пусть $b(x)$, заданный на X функционал, есть выигрыш первого игрока (проигрыш второго). Предположим далее, что F зависит от некоторого параметра $\xi\in R$, который, в частности, может означать начальное положение игроков. Обозначим эту игру $\Gamma(\xi)$.

Будем рассматривать двупараметрическое семейство игр $\Gamma_n(\xi)$, где $\Gamma_n(\xi)$ есть дифференциальная игра $\Gamma(\xi)$ при $b(x)=b_n(x)$, $x\in X$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Если игра $\Gamma_n(\xi)$ имеет значение для всех $n=1, 2, \ldots$ и всех $\xi\in R$, а $b_n(x)$ сходится к $b_0(x)$ равномерно по $x\in X$ при $n\to\infty$, то существует* $\operatorname{val}\Gamma_0(\xi)$ *и*

$$\operatorname{val}\Gamma_n(\xi)\underset{n\to\infty}{\to}\operatorname{val}\Gamma_0(\xi)$$

равномерно по ξ.

Доказательство. Пусть $B_\xi^{(n)}(\mu, \nu)$ – осредненный выигрыш первого игрока

$$B_\xi^{(n)}(\mu, \nu)=\int\int b_n\left(F_\xi(p, q)\right)d\mu(p)\,d\nu(q),$$

где μ и ν – некоторые вероятностные меры на P и Q, соответственно. По условиям теоремы

$$\inf_\nu\sup_\mu B_\xi^{(n)}(\mu, \nu)=\sup_\mu\inf_\nu B_\xi^{(n)}(\mu, \nu) \tag{1}$$

для всех $n=1, 2, \ldots$ и всех $\xi\in R$. Предельный переход в соотношении (1) показывает, что $\operatorname{val}\Gamma_0(\xi)$ существует для всех ξ, так как

$$B_\xi^{(n)}(\mu, \nu)\to B_\xi^{(0)}(\mu, \nu)$$

при $n\to\infty$ для всех ξ.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Покажем, что существует такое число $n(\varepsilon)$, не зависящее от ξ, что

$$|\operatorname{val}\Gamma_n(\xi)-\operatorname{val}\Gamma_0(\xi)|\leqslant\varepsilon$$

при $n>n(\varepsilon)$ одновременно для всех ξ.

В силу равномерной сходимости $b_n(x)$ к $b_0(x)$ для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $n(\varepsilon)$, что для всех x

$$|b_n(x)-b_0(x)|\leqslant\varepsilon$$

как только $n>n(\varepsilon)$. Поэтому для всех μ, ν и ξ

$$|B_\xi^{(n)}(\mu,\ \nu)-B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)|\leqslant$$

$$\leqslant\int\int\left|b_n\left(F_\xi(p,\ q)\right)-b_0\left(F_\xi(p,\ q)\right)\right|d\mu(p)d\nu(q)\leqslant\varepsilon$$

и

$$B_\xi^{(n)}(\mu,\ \nu)=B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)\,\varepsilon,$$

где $|\Theta_n(\mu,\nu,\xi)|\leqslant 1$, как только $n>n(\varepsilon)$. Отсюда

$$|\operatorname{val}\Gamma_n(\xi)-\operatorname{val}\Gamma_0(\xi)|=$$

$$=|\sup_\mu\inf_\nu[B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)\,\varepsilon]-\sup_\mu\inf_\nu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)|. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\sup_\mu\inf_\nu[B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)\,\varepsilon]\geqslant\sup_\mu[\inf_\nu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\varepsilon\inf_\nu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)]\geqslant$$

$$\geqslant\sup_\mu[\inf_\nu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\varepsilon\inf_\mu\inf_\nu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)]=$$

$$=\sup_\mu\inf_\nu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\varepsilon\inf_\mu\inf_\nu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi). \tag{3}$$

С другой стороны

$$\sup_\mu\inf_\nu[B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)\,\varepsilon]=\inf_\nu\sup_\mu[B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)\,\varepsilon]\leqslant$$

$$\leqslant\inf_\nu[\sup_\mu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\varepsilon\sup_\nu\sup_\mu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)]=$$

$$=\inf_\nu\sup_\mu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\varepsilon\sup_\nu\sup_\mu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)=$$

$$=\sup_\mu\inf_\nu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\varepsilon\sup_\nu\sup_\mu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi). \tag{4}$$

Комбинируя неравенства (3) и (4), мы получаем оценку

$$|\sup_\mu\inf_\nu[B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)+\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)\,\varepsilon]-\sup_\mu\inf_\nu B_\xi^{(0)}(\mu,\ \nu)|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\max[\,|\inf_\mu\inf_\nu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)|,\ |\sup_\nu\sup_\mu\Theta_n(\mu,\ \nu,\ \xi)|\,]. \tag{5}$$

Так как $|\Theta_n(\eta,\nu,\xi)|\leqslant 1$, как только $n>n(\varepsilon)$, то соотношения (2) и (5) дают нам

$$|\operatorname{val}\Gamma_n(\xi)-\operatorname{val}\Gamma_0(\xi)|\leqslant\varepsilon,$$

как только $n>n(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Пусть X метрическое пространство с метрикой $\rho(x_1,x_2)$. Будем говорить, что последовательность отображений $F_\xi^{(k)}(p,q)$ сходится к $F_\xi^{(0)}(p,q)$ равномерно по $\xi\in R$ и $(p,q)\in P\times Q$ при $k\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $k(\varepsilon)$, что для всех ξ, p и q

$$\rho\left(F_\xi^{(k)}(p,\ q),\ F_\xi^{(0)}(p,\ q)\right)\leqslant\varepsilon$$

как только $k>k(\varepsilon)$.

Будем рассматривать двупараметрическое семейство игр $\Gamma_k^* (\xi)$, где $\Gamma_k^* (\xi)$ есть дифференциальная игра $\Gamma (\xi)$, если положить

$$F_\xi (p, q) = F_\xi^{(k)} (p, q), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Теорема 2. *Если игра* $\Gamma_k^* (\xi)$ *имеет значение для всех* $k=1, 2, \dots$ *и всех* $\xi \in R$; $b (x)$ – *равномерно непрерывный функционал, а* $F_\xi^{(k)} (p, q)$ *сходится к* $F_\xi^{(0)} (p, q)$ *равномерно по* $\xi \in R$ *и* $(p, q) \in P \times Q$ *при* $k \to \infty$, *то существует* val $\Gamma_0^* (\xi)$ и val $\Gamma_k^* (\xi)$ *сходится к* val $\Gamma_0^* (\xi)$ *равномерно по* ξ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть $B_\xi^{(k)} (\mu, \nu)$ – осредненный выигрыш первого игрока в игре $\Gamma_k^* (\xi)$. По условиям теоремы

$$\inf_\nu \sup_\mu B_\xi^{(k)} (\mu, \nu) = \sup_\mu \inf_\nu B_\xi^{(k)} (\mu, \nu) \tag{6}$$

для всех $k=1, 2, \dots$ и всех $\xi \in R$. Так как $F_\xi^{(k)} (p, q)$ сходится равномерно и $b (x)$ – равномерно непрерывный функционал, то $B_\xi^{(k)} (\mu, \nu) \to B_\xi^{(0)} (\mu, \nu)$ и предельный переход в (6) показывает, что val $\Gamma_0^* (\xi)$ существует для всех ξ.

В силу равномерной непрерывности $b (x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta (\varepsilon)$, что

$$\left| b \left(F_\xi^{(k)} (p, q)\right) - b \left(F_\xi^{(0)} (p, q)\right) \right| \leqslant \varepsilon \tag{7}$$

как только

$$\rho \left(F_\xi^{(k)} (p, q), F_\xi^{(0)} (p, q)\right) \leqslant \delta (\varepsilon). \tag{8}$$

Кроме того, $F_\xi^{(k)} (p, q)$ сходится к $F_\xi^{(0)} (p, q)$ равномерно, поэтому неравенство (8), и тем самым (7), выполняется как только $k > k (\varepsilon)$. Таким образом, для всех μ, ν и ξ

$$| B_\xi^{(k)} (\mu, \nu) - B_\xi^{(0)} (\mu, \nu) | \leqslant \varepsilon,$$

как только $k > k (\varepsilon)$. Начиная с этого места, доказательство очевидным образом повторяет доказательство теоремы 1.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
15.X.1968

Литература

1. Р. Айзекс, Дифференциальные игры, „Мир", М., 1967.
2. Э. Й. Вилкас, Некоторые функциональные свойства значения матричной игры, Лит. матем. сб., III,№1 (1963), 71–76.

DIFERENCIALINIŲ LOŠIMŲ REIKŠMIŲ TOLYGUS KONVERGAVIMAS

E. Vilkas, I. Jačiauskas

(*Reziumė*)

Persekiojimo tipo diferencialinis lošimas $\Gamma_n (\xi)$ apibrėžiamas grynų strategijų aibėmis P i Q, persekiojimo sritimi R, situacijų aibės $P \times Q$ atvaizdavimu $F_\xi (p, q)$ į trajektorijų aibę X ir pirmojo lošėjo išlošimu (antrojo pralošimu) $b_n (x)$, $x \in X$. Įrodyta teorema: *jei* $\Gamma_n (\xi)$ *turi reikšmę visiems* $n=1, 2, \dots$ *ir visiems* $\xi \in R$, o $b_n (x)$ *konverguoja į* $b_0 (x)$ *tolygiai pagal* $x \in X$, *kai* $n \to \infty$ *tai egzistuoja* val $\Gamma_0 (\xi)$ *ir* val $\Gamma_n (\xi)$ *konverguoja į* val $\Gamma_0 (\xi)$ *tolygiai pagal* ξ. Analogiški rezultatai gauti lošimų sekai, kurią generuoja atvaizdavimų seka $\{ F_\xi^{(k)} (p, g) \}$.

THE UNIFORM CONVERGENCE OF THE VALUES OF DIFFERENTIAL GAMES

E. Vilkas, I. Jačiauskas

(Summary)

The pursuit type differential game $\Gamma_n(\xi)$ is defined by the sets P and Q of pure strategics, by the region of pursuit R, by the mapping $F_\xi(p, g)$ $(\xi \in R)$ of $P \times Q$ into the set X of trajectories and by payoff function $b_n(x)$ $(x \in X)$. If $\Gamma_n(\xi)$ has a value for $n=1, 2, \ldots$ and for all $\xi \in R$, and $b_n(x)$ converges to $b_0(x)$ uniformly when $n \to \infty$, then val $\Gamma_0(\xi)$ exists and val $\Gamma_n(\xi)$ converges to val $\Gamma_0(\xi)$ uniformly when $n \to \infty$. The analogical results are obtained for the sequence of games with different mappings $F_\xi^{(k)}(p, q)$.