IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1969

УДК – 519.2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КОМПОНЕНТ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

О. А. Глонти

§ 1. Постановка задач, основные результаты

1. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ задана двумерная марковская цепь (Θ_n, ξ_n), $n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots, (\Delta>0)$, где $\Theta_n=\Theta_n(\omega)\in R^1$ – ненаблюдаемая, а $\xi_n=\xi_n(\omega)\in R^1$ – наблюдаемая компоненты. Обозначим $\hat{\Theta}_n(\omega)=$ $=\hat{\Theta}_n\left(\xi_0(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)\right)$ и $\tilde{\Theta}_n(\omega)=\tilde{\Theta}_n\left(\xi_0(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)\right)$, $N\geqslant n$, оптимальные (в среднеквадратическом смысле) оценки (фильтрации и интерполяции соответственно) ненаблюдаемой компоненты Θ_n по $\xi^n=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ и по $\xi^N=(\xi_0, \ldots, \xi_N)$. Хорошо известно, что $\hat{\Theta}_n=\mathbf{M}(\Theta_n/\mathscr{F}_{\xi^n})$, $\tilde{\Theta}_n=\mathbf{M}(\Theta_n/\mathscr{F}_{\xi^N})$, где $\mathscr{F}_{\xi^n}$ – σ – алгебра ω – множеств, порожденная случайной величиной $\xi^n=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

Настоящая работа посвящена выводу рекуррентных соотношений для $\hat{\Theta}_n$, $\tilde{\Theta}_n$ в предположении, что марковская последовательность (Θ_n, ξ_n) управляется системой $(\Delta x_n=x_{n+\Delta}-x_n)$

$$\Delta\Theta_n=[a_0(\xi_n, n)+a_1(\xi_n, n)\Theta_n]\Delta+b_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n)+b_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n),$$
$$\Delta\xi_n=[A_0(\xi_n, n)+A_1(\xi_n, n)\Theta_n]\Delta+B_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n)+B_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n), \quad (1)$$

где $w_1(n)$, $w_2(n)$ – последовательность нормальных $N(0, n)$ случайных величин с независимыми между собой приращениями $\Delta w_i(n)=w_i(n+\Delta)-$ $-w_i(n)$, $i=1, 2$, а случайные величины (Θ_0, ξ_0) – независимые от $w_1(n)$ и $w_2(n)$ таковы, что условное распределение $\mathbf{P}(\Theta_0\leqslant\Theta/\xi_0)$ нормально с параметрами (m, γ).

Отметим, что для случая непрерывного времени $t\geqslant 0$ соответствующие вопросы построения оценок $\hat{\Theta}_t$, $\tilde{\Theta}_t$ для ненаблюдаемой компоненты Θ_t двумерного диффузионного процесса (Θ_t, ξ_t) исследованы в работах [1] – [5]. О взаимоотношении наших результатов (теоремы 1,2) с соответствующими результатами [1] – [5] будет сказано ниже в § 3. Там же будут рассмотрены примеры. В § 4 полученные результаты обобщаются на случай многомерной марковской цепи $\Theta_n=\left(\Theta_1(n), \ldots, \Theta_k(n)\right)$, $\xi_n=\left(\xi_1(n), \ldots, \xi_l(n)\right)$.

2. Обозначим

$$\pi_\Theta(n, N)=\frac{\partial\mathbf{P}(\Theta_n\leqslant\Theta/\mathscr{F}_{\xi^N})}{\partial\Theta}, \quad \pi_\Theta(n)=\pi_\Theta(n, n).$$

Теорема 1. *Пусть марковская цепь (Θ_n, ξ_n) управляется системой уравнений* (1), $B\circ B=B_1^2+B_2^2\geqslant C>0$, *априорная плотность* $\pi_\Theta(0)$ *нормальна в* *параметрами* (m, γ). *Тогда апостериорная плотность* $\pi_\Theta(n)$ *также нормальна,*

$$\pi_\Theta(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n)}} \exp\left\{-\frac{(\Theta - m(n))^2}{2\gamma(n)}\right\},$$

с параметрами

$$m(n) = \mathbf{M}(\Theta_n/\mathscr{F}_{\xi^n}), \quad \gamma(n) = \mathbf{M}\left((\Theta_n - m(n))^2/\mathscr{F}_{\xi^n}\right),$$

определяемыми из системы

$$\Delta m(n) = [a_0 + a_1 m(n)]\Delta +$$
$$+ \frac{b\circ B + A_1\gamma(n)(1 + a_1\Delta)}{B\circ B + A_1^2\gamma(n)\Delta}\left[\Delta\xi_n - \left(A_0 + A_1 m(n)\right)\Delta\right],$$
$$\Delta\gamma(n) = [2a_1 + a_1^2\Delta]\gamma(n)\Delta + (b\circ b)\Delta - \frac{[b\circ B + A_1\gamma(n)(1 + a_1\Delta)]^2\Delta}{B\circ B + A_1^2\gamma(n)\Delta}, \qquad (2)$$

где

$$b\circ b = b_1^2 + b_2^2, \quad b\circ B = b_1B_1 + b_2B_2,$$
$$B\circ B = B_1^2 + B_2^2, \quad m(0) = m, \quad \gamma(0) = \gamma.$$

Поскольку $m(n) = \hat{\Theta}_n$, то тем самым система (2) определяет эволюцию оптимальной оценки (фильтрации) $\hat{\Theta}_n$.

Теорема 2. *В предположениях теоремы* 1 *апостериорная плотность* $\pi_\Theta(n, N)$, $n \leqslant N$, *также нормальна,*

$$\pi_\Theta(n, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n, N)}} \exp\left\{-\frac{(\Theta - m(n, N))^2}{2\gamma(n, N)}\right\}$$

с параметрами

$$m(n, N) = \mathbf{M}(\Theta_n/\mathscr{F}_{\xi^N}), \quad \gamma(n, N) = \mathbf{M}\left(\left(\Theta_n - m(n, N)\right)^2/\mathscr{F}_{\xi^N}\right),$$

определяемыми из соотношений

$$m(n, N) = m(n) + \sum_{l=n+\Delta}^{N} \frac{\gamma(n, l-\Delta) A_1 \varphi(l-\Delta)\{\Delta\xi_{l-\Delta} - [A_0 + A_1 m(l-\Delta)]\Delta\}}{B\circ B + A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta + A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta},$$

$$\gamma(n, N) = \gamma(n) - \sum_{l=n+\Delta}^{N} \frac{A_1^2\gamma^2(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}{B\circ B + A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta + A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}, \qquad (3)$$

где $m(n)$ и $\gamma(n)$ *находятся из* (2), $\varphi(l)$ *из* (13), *а* $\hat{\gamma}(l)$ *из* (7) *и* (8).

Поскольку $\tilde{\Theta}_n = m(n, N)$, то система (3) определяет оценку (интерполяции) ненаблюдаемой компоненты Θ_n по результатам наблюдений $\xi_0, \ldots, \xi_N$, $N \geqslant n$.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

1. Пусть Z — случайная величина (быть может векторная), $\mathscr{F}_Z$ — σ — алгебра ω — множеств, порожденных Z. Для простоты записи условную вероятность $\mathbf{P}(\cdot/F_Z)$ мы будем обозначать $\mathbf{P}(\cdot/Z)$.

Пусть $p(x/Z)$ условная плотность распределения случайной величины $X=(X_1, \ldots, X_q)$ со значениями в R^q,

$$p(x/Z)=\frac{\partial^q \mathbf{P}(X_1\leqslant x_1, \ldots, X_q\leqslant x_q/Z)}{\partial x_1 \ldots \partial x_q},$$

а $\varphi(t/Z)$ соответствующая характеристическая функция $\left(t=(t_1, \ldots, t_q)\right)$.

Доказательство теоремы 1 проводим по индукции. Априорная плотность распределения $\pi_\Theta(0)$ нормальна с параметрами (m, γ) (по условию теоремы). Пусть $\pi_\Theta(n)$ также нормальна с параметрами $\left(m(n), \gamma(n)\right)$. Покажем, что тогда нормальна и $\pi_\Theta(n+\Delta)$. Действительно, как легко видеть

$$\pi_\Theta(n+\Delta)=p(\Theta_{n+\Delta}/\xi^{n+\Delta})=\frac{\int p(\Theta_{n+\Delta}, \xi_{n+\Delta}/\Theta_n, \xi_n)\, p(\Theta_n/\xi^n)\, d\Theta_n}{\int p(\xi_{n+\Delta}/\Theta_n, \xi_n)\, p(\Theta_n/\xi^n)\, d\Theta_n}=\frac{K}{L},$$

где K и L — обозначения для числителя и знаменателя, соответственно. Для нахождения K и L заметим, что $p(\Theta_{n+\Delta}, \zeta_{n+\Delta}/\Theta_n, \xi_n)$ — нормальная плотность распределения, вектор математического ожидания которого имеет следующие компоненты:

$$\Theta_n+[a_0(\xi_n, n)+a_1(\xi_n, n)\,\Theta_n]\,\Delta,$$

$$\xi_n+[A_0(\xi_n, n)+A_1(\xi_n, n)\,\Theta_n]\,\Delta,$$

а матрица ковариаций выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix}(b\circ b)\,\Delta & (b\circ B)\,\Delta\\ (b\circ B)\,\Delta & (B\circ B)\,\Delta\end{pmatrix}.$$

Плотность распределения $p(\xi_{n+\Delta}/\xi_n, \Theta_n)$ также нормальна с параметрами

$$\left(\xi_n+(A_0+A_1\,\Theta_n)\,\Delta,\ (B\circ B)\,\Delta\right).$$

Тогда

$$K=\int_{-\infty}^{\infty} p(\Theta_{n+\Delta}, \xi_{n+\Delta}/\Theta_n, \xi_n)\, p(\Theta_n/\xi^n)\, d\Theta_n=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1{}^*\Theta_{n+\Delta}+t_2\,\xi_{n+\Delta})}\, dt_1\, dt_2 \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1, t_2/\Theta_n, \xi_n)\, p(\Theta_n/\xi^n)\, d\Theta_n=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{2\pi\gamma(n)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1\,\Theta_{n+\Delta}+t_2\,\xi_{n+\Delta})}\, dt_1\, dt_2\,\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{it_1[\Theta_n(1+a_1\,\Delta)+a_0\,\Delta]+it_2[\xi_n+(A_0+A_1\,\Theta_n)\,\Delta]-$$

$$-\frac{1}{2}[t_1^2(b\circ b)\,\Delta+2t_1\,t_2(b\circ B)\,\Delta+t_2^2(B\circ B)\,\Delta]\Big\}\exp\left\{-\frac{(\Theta_n-m(n))^2}{2\gamma(n)}\right\} d\Theta_n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n)}\,(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1\,\Theta_{n+\Delta}+t_2\,\xi_{n+\Delta})}\exp\Big\{i[t_1\,a_0\,\Delta+$$

$$+t_2(\xi_n+A_0\Delta)]-\frac{1}{2}[t_1^2(b\circ b)\,\Delta+2t_1\,t_2(b\circ B)\,\Delta+$$

$$+t_2^2(B\circ B)\Delta]\Big\}\,dt_1\,dt_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{i[t_1(1+a_1\Delta)+t_2A_1\Delta]\Theta_n-$$

$$-\frac{(\Theta_n-m(n))^2}{2\gamma(n)}\Big\}\,d\Theta_n=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t_1\Theta_{n+\Delta}+t_2\xi_{n+\Delta})}\exp\Big\{i[t_1a_0\Delta+$$

$$+t_2(\xi_n+A_0\Delta)]-\frac{1}{2}[t_1^2(b\circ b)\Delta+2t_1t_2(b\circ B)\Delta+t_2^2(B\circ B)\Delta]+$$

$$+i[t_1(1+a_1\Delta)+t_2A_1\Delta]m(n)-\frac{\gamma(n)}{2}[t_1(1+a_1\Delta)+$$

$$+t_2A_1\Delta]^2\Big\}\,dt_1\,dt_2=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t_1\Theta_{n+\Delta}+t_2\xi_{n+\Delta})}\exp\Big\{it_1[a_0\Delta+$$

$$+(1+a_1\Delta)m(n)]+it_2\Big[\xi_n+\big(A_0+A_1m(n)\big)\Delta\Big]-\frac{1}{2}[t_1^2\Big((b\circ b)\Delta+$$

$$+(1+a_1\Delta)^2\gamma(n)\Big)+2t_1t_2\Big((b\circ B)\Delta+(1+a_1\Delta)A_1\gamma(n)\Big)+$$

$$+t_2^2\Big((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(n)\Delta^2\Big)\Big]\Big\}dt_1dt_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}}\exp\Big\{-\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)}\times$$

$$\times\Big[\frac{(\Theta_{n+\Delta}-\alpha)^2}{\sigma_1^2}-2\,\frac{\sigma_{12}(\Theta_{n+\Delta}-\alpha)(\xi_{n+\Delta}-\beta)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{(\xi_{n+\Delta}-\beta)^2}{\sigma_2^2}\Big]\Big\},$$

где

$$\alpha=a_0\Delta+m(n)(1+a_1\Delta),\quad \beta=\xi_n+\big(A_0+A_1m(n)\big)\Delta,$$

$$\sigma_1^2=(b\circ b)\Delta+(1+a_1\Delta)^2\gamma(n),\quad \sigma_2^2=(B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(n)\Delta^2,$$

$$\sigma_{12}=(b\circ B)\Delta+A_1(1+a_1\Delta)\gamma(n)\Delta. \tag{4}$$

Аналогично для L получим

$$L=\int_{-\infty}^{\infty}p(\xi_{n+\Delta}/\xi_n\,\Theta_n)\,p\,(\Theta_n/\xi^n)\,d\Theta_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\,e^{-\frac{(\xi_{n+\Delta}-\beta)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Поэтому,

$$\pi_\Theta(n+\Delta)=\frac{K}{L}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2}}}\exp\Big\{-\frac{\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)}\times$$

$$\times\Big[\Theta_{n+\Delta}-\alpha-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(\xi_{n+\Delta}-\beta)\Big]^2\Big\},$$

т.е. мы доказали, что апостериорная плотность $\pi_\Theta(n+\Delta)$ также нормальна. Отсюда

$$m(n+\Delta)=\alpha+\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(\xi_{n+\Delta}-\beta),\quad \gamma(n+\Delta)=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2},$$

и на основании (4)

$$\Delta m(n)=a_0\Delta+a_1m(n)\Delta+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\gamma(n)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}\Big[\Delta\xi_n-\big(A_0+A_1m(n)\big)\Delta\Big],$$

$$\Delta\gamma(n)=\gamma(n)(2a_1+a_1^2\Delta)\Delta+(b\circ b)\Delta-\frac{[b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\gamma(n)]^2\Delta}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta},$$

что полностью завершает доказательство теоремы 1.

2. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Для* $l>n$ $\left(\xi_n^l=(\xi_n, \ldots, \xi_l)\right)$

$$\frac{p(\xi_{n+\Delta}^l/\Theta_n, \xi_n)}{p(\xi_{n+\Delta}^l/\xi^n)}=\prod_{k=n+\Delta}^{l}\sqrt{\frac{B\circ B+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(k-\Delta)\Delta}}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{k=n+\Delta}^{l}\left[\frac{\left(\Delta\xi_{k-\Delta}-\left(A_0+A_1 m(k-\Delta)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta^2\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\left(\Delta\xi_{k-\Delta}-\left(A_0+A_1 m_{k-\Delta}(\Theta_n)\Delta\right)\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat{\gamma}(k-\Delta)\Delta^2\right)}\right]\right\}, \tag{5}$$

где

$$m_k(\Theta_n)=\mathbf{M}(\Theta_k/\xi_n^k, \Theta_n),\ \hat{\gamma}_k=\gamma_k(\Theta_n)=\mathbf{M}\left[\left(\Theta_k-m_k(\Theta_n)\right)^2/\xi_n^k, \Theta_n\right]$$

удовлетворяют системе уравнений $k\geqslant n$, n — *фиксировано*

$$\Delta m_k(\Theta_n)=\left(a_0+a_1 m_k(\Theta_n)\right)\Delta+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\gamma_k(\Theta_n)}{B\circ B+A_1^2\gamma_k(\Theta_n)\Delta}\left[\Delta\xi_k-\right.$$

$$\left.-\left(A_0+A_1 m_k(\Theta_n)\right)\Delta\right], \tag{6}$$

$$\Delta\gamma_k(\Theta_n)=\gamma_k(\Theta_n)(2a_1\Delta+a_1^2\Delta^2)+(b\circ b)\Delta-\frac{[b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\gamma_k(\Theta_n)]^2\Delta}{B\circ B+A_1^2\gamma_k(\Theta_n)\Delta} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$m_n(\Theta_n)=\Theta_n,\ \gamma_n(\Theta_n)=0. \tag{8}$$

Здесь $B\circ B\geqslant C>0$. Так как Θ_n явно не входит ни в (7), ни в начальное условие $\gamma_k(\Theta_n)=0$, то $\gamma_k(\Theta_n)$,то не зависит от Θ_n и мы используем обозначение $\hat{\gamma}(k)=$ $=\gamma_k(\Theta_n)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{p(\xi_{n+\Delta}^l/\Theta_n, \xi_n)}{p(\xi_{n+\Delta}^l/\xi^n)}=\prod_{k=n+\Delta}^{l}\frac{p(\xi_k/\xi_n^{k-\Delta}, \Theta_n)}{p(\xi_k/\xi^{k-\Delta})}. \tag{9}$$

Найдем $p(\xi_k/\xi_n^{k-\Delta}, \Theta_n)$. Для этого заметим, что

$$p(\Theta_{k-\Delta}/\Theta_n, \xi_n^{k-\Delta})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\gamma}(k-\Delta)}}\exp\left\{-\frac{[\Theta_{k-\Delta}-m_{k-\Delta}(\Theta_n)]^2}{2\hat{\gamma}(k-\Delta)}\right\},$$

где

$$m_k(\Theta_n)=\mathbf{M}(\Theta_k/\xi_n^k, \Theta_n)$$

и

$$\hat{\gamma}(k)=\gamma_k(\Theta_n)=\mathbf{M}\left[\left(\Theta_k-m_k(\Theta_n)\right)^2/\xi_n^k, \Theta_n\right]$$

удовлетворяют (6), (7), (8). Тогда

$$p(\xi_k/\xi_n^{k-\Delta}, \Theta_n)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\xi_k/\xi_{k-\Delta}, \Theta_{k-\Delta})p(\Theta_{k-\Delta}/\Theta_n, \xi_n^{k-\Delta})d\Theta_{k-\Delta}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi_k}\varphi(t/\xi_{k-\Delta}, \Theta_{k-\Delta})dt\right\}p(\Theta_{k-\Delta}/\Theta_n, \xi_n^{k-\Delta})d\Theta_{k-\Delta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\gamma}(k-\Delta)}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-it\xi_k}\exp\Big[it(\xi_{k-\Delta}+A_0\Delta)-$$

$$-\frac{t^2}{2}(B\circ B)\Delta\Big]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[itA_1\Theta_{k-\Delta}\Delta-\frac{(\Theta_{k-\Delta}-m_{k-\Delta}(\Theta_n))^2}{2\hat{\gamma}(k-\Delta)}\Big]d\Theta_{k-\Delta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi_k}\exp\Big\{\Big[it\Big(\xi_{k-\Delta}+\big(A_0+A_1m_{k-\Delta}(\Theta_n)\big)\Delta\Big]-$$

$$-\frac{t^2}{2}\Big((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat{\gamma}_{(k-\Delta)}\Delta^2\Big)\Big\}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi\big((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat{\gamma}(k-\Delta)\Delta\big)}}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{\big[\Delta\xi_{k-\Delta}-\big(A_0+A_1m_{k-\Delta}(\Theta_n)\big)\Delta\big]^2}{2\big((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat{\gamma}(k-\Delta)\Delta^2\big)}\Big\}.$$

Аналогично, используя теорему 1, легко получить, что

$$p(\xi_k/\xi^{k-\Delta})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\big((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta^2\big)}}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{\big(\Delta\xi_{k-\Delta}-\big(A_0+A_1m(k-\Delta)\big)\Delta\big)^2}{2\big((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(k-\Delta)\Delta^2\big)}\Big\}.$$

Подстановкой полученных выражений для $p(\xi_k/\xi_n^{k-\Delta},\ \Theta_n)$ и $p(\xi_k/\xi^{k-\Delta})$ в (9) завершается доказательство данной леммы.

Лемма 2. *Решение линейного разностного уравнения*

$$\Delta m_k(\Theta_n)=m_k(\Theta_n)a_1\Delta+a_0\Delta+$$
$$+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat{\gamma}(k)}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(k)\Delta}\Big[\Delta\xi_k-\Big(A_0+A_1m_k(\Theta_n)\Big)\Delta\Big] \tag{10}$$

с начальным условием

$$m_n(\Theta_n)=\Theta_n \tag{11}$$

можно представить в следующем виде:

$$m_k(\Theta_n)=\Theta_n\varphi(k)+\psi(k), \tag{12}$$

где

$$\varphi(k)=1+\sum_{i=n+\Delta}^{k}\varphi(i-\Delta)\Big[a_1\Delta-A_1\Delta\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat{\gamma}(i-\Delta)}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(i-\Delta)\Delta}\Big],$$

$$\psi(k)=\varphi(k)\sum_{i=n+\Delta}^{k}\frac{1}{\varphi(i)}\Big[a_0\Delta+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat{\gamma}(i-\Delta)}{B\ B+A_1^2\hat{\gamma}(i-\Delta)\Delta}(\Delta\xi_{i-\Delta}-A_0\Delta)\Big], \tag{13}$$

$$\varphi(n)=1,\ \psi(n)=0.$$

Проверим непосредственно, что (12), (13) являются решением (10), (11). Для этого перепишем (10) в следующем виде:

$$m_{k+\Delta}(\Theta_n)=m_k(\Theta_n)\Big[1+a_1\Delta-A_1\Delta\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat{\gamma}(k)}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(k)\Delta}\Big]+$$
$$+a_0\Delta+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat{\gamma}(k)}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(k)\Delta}(\Delta\xi_k-A_0\Delta). \tag{10'}$$

Подставляя (12) в (10′), получим

$$\Theta_n\left\{\varphi(k+\Delta)-\varphi(k)\left[1+a_1\Delta-A_1\Delta\,\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat\gamma(k)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(k)\Delta}\right]\right\}+$$
$$+\psi(k+\Delta)-\psi(k)\left[1+a_1\Delta-A_1\Delta\,\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat\gamma(k)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(k)\Delta}\right]=$$
$$=a_0\Delta+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat\gamma(k)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(k)\Delta}\,(\Delta\xi_k-A_0\Delta).$$

Согласно (13)

$$\varphi(k+\Delta)=\varphi(k)\left[1+a_1\Delta-A_1\Delta\,\frac{b\circ B+\hat\gamma(k)A_1(1+a_1\Delta)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(k)\Delta}\right],$$
$$\psi(k+\Delta)=a_0\Delta+\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat\gamma(k)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(k)\Delta}\,(\Delta\xi_k-A_0\Delta)+$$
$$+\psi(k)\left[1+a_1\Delta-A_1\Delta\,\frac{b\circ B+A_1(1+a_1\Delta)\hat\gamma(k)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(k)\Delta}\right].$$

Поэтому, очевидно, что (12), (13) есть решение линейного разностного уравнения (10) с начальным условием (11).

Лемма 3. *Для $l>n$*

$$p(\Theta_n/\xi^l)=p(\Theta_n/\xi^{l-\Delta})\,\frac{p(\xi_l/\Theta_n,\ \xi_n^{l-\Delta})}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})},\tag{14}$$

где

$$\frac{p(\xi_l/\Theta_n,\ \xi_n^{l-\Delta})}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}$$

находится из леммы 1.

Доказательство следует непосредственно из определений.

Лемма 4. *Для $N>l>n$*

$$\sqrt{\frac{B\circ B+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1m(l-\Delta)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1\left(\psi(l-\Delta)+\varphi(l-\Delta)m(n,\ l-\Delta)\right)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta^2+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta\right)}\right\}=1.\tag{15}$$

Доказательство. Интегрируя (14) по всему пространству значений Θ_n, получим

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}p(\Theta_n/\xi^l)\,d\Theta_n=\int_{-\infty}^{\infty}p(\Theta_n/\xi^{l-\Delta})\,\frac{p(\xi_l/\Theta_n,\ \xi_n^{l-\Delta})}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,d\Theta_n=$$
$$=\frac{1}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t/\Theta_n,\ \xi_n^{l-\Delta})\,e^{-it\xi_l}\,dt\right\}p(\Theta_n/\xi^{l-\Delta})\,d\Theta_n=$$
$$=\frac{1}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n,\ l-\Delta)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi_l}\exp\left\{it\left(\xi_{l-\Delta}+\right.\right.$$

$$+\Big(A_0+A_1 m_{l-\Delta}(\Theta_n)\,\Delta\Big)-\frac{t^2}{2}\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta\Big)\Big\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(\Theta_n-m(n,\ l-\Delta))^2}{2\gamma(n,\ l-\Delta)}\right\}dt\,d\Theta_n=\frac{1}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi\gamma(n,\ l-\Delta)}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi_l}\exp\left\{it(\xi_{l-\Delta}+A_0\Delta)-\frac{t^2}{2}\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta\Big)\right\}dt\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{itA_1 m_{l-\Delta}(\Theta_n)\,\Delta-\frac{(\Theta_n-m(n,\ l-\Delta))^2}{2\gamma(n,\ l-\Delta)}\right\}d\Theta_n=$$

$$=\frac{1}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi_l}\exp\Big\{it\Big(\xi_{l-\Delta}+A_0\Delta+A_1\psi(l-\Delta)\,\Delta\Big)-$$

$$-\frac{t^2}{2}\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta^2\Big)\Big\}\times$$

$$\times dt\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n,\ l-\Delta)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{itA_1\varphi(l-\Delta)\,\Theta_n\Delta-$$

$$-\frac{(\Theta_n-m(n,\ l-\Delta))^2}{2\gamma(n,\ l-\Delta)}\Big\}d\Theta_n\Big]=\frac{1}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi_l}\exp\Big\{it\Big(\xi_{l-\Delta}+$$

$$+\Big(A_0+A_1\Big(\psi(l-\Delta)+\varphi(l-\Delta)\,m(n,\ l-\Delta)\Big)\Big)\Delta\Big)-\frac{t^2}{2}\Big((B\circ B)\,\Delta+$$

$$+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta^2+A_1^2\,\gamma(n,\ l-\Delta)\,\varphi^2(l-\Delta)\,\Delta^2\Big)\Big\}dt=\frac{1}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta^2+A_1^2\,\gamma(n,\ l-\Delta)\,\varphi^2(l-\Delta)\,\Delta\Big)}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-\Big(A_0+A_1\Big(\psi(l-\Delta)+\varphi(l-\Delta)\,m(n,\ l-\Delta)\Big)\Big)\Delta\Big)^2}{2\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta^2+A_1^2\,\gamma(n,\ l-\Delta)\,\varphi^2(l-\Delta)\,\Delta^2\Big)}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{B\circ B+A_1^2\,\gamma(l-\Delta)\,\Delta}{B\circ B+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta+A_1^2\,\gamma(n,\ l-\Delta)\,\varphi^2(l-\Delta)\,\Delta}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-(A_0+A_1 m(l-\Delta))\,\Delta\Big)^2}{2\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\gamma(l-\Delta)\,\Delta^2\Big)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-\Big(A_0+A_1\Big(\psi(l-\Delta)+\varphi(l-\Delta)\,m(n,\ l-\Delta)\Big)\Big)\Delta\Big)^2}{2\Big((B\circ B)\,\Delta+A_1^2\,\hat{\gamma}(l-\Delta)\,\Delta^2+A_1^2\,\gamma(n,\ l-\Delta)\,\varphi^2(l-\Delta)\,\Delta^2\Big)}\right\}.$$

Лемма 4 доказана.

Приведем еще одну лемму, имеющую также самостоятельный интерес.

Лемма 5. *Апостериорная плотность*

$$\pi_\Theta(n,\ n+\Delta)=\frac{\partial \mathbf{P}(\Theta_n\leqslant\Theta/\xi^{n+\Delta})}{\partial\Theta}$$

нормальна

$$\pi_\Theta(n,\ n+\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n,\ n+\Delta)}}\exp\left\{-\frac{(\Theta-m(n,\ n+\Delta))^2}{2\gamma(n,\ n+\Delta)}\right\}$$

с параметрами $m(n,\ n+\Delta)=\mathbf{M}(\Theta_n/\xi^{n+\Delta})$,

$$\gamma(n)=\mathbf{M}\left(\left(\Theta_n-m(n,\ n+\Delta)\right)^2/\xi^{n+\Delta}\right),$$

определяемыми из соотношений

$$m(n,\ n+\Delta)=\frac{(B\circ B)\,m(n)+A_1\gamma(n)(\Delta\xi_n-A_0\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta},\tag{16}$$

$$\gamma(n,\ n+\Delta)=\frac{\gamma(n)(B\circ B)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta},$$

где $m(n)$ *и* $\gamma(n)$ *находятся из системы* (2).

Доказательство. Легко видеть, что

$$\pi_\Theta(n,\ n+\Delta)=p(\Theta_n/\xi^{n+\Delta})=p(\Theta_n/\xi^n)\,\frac{p(\xi_{n+\Delta}/\Theta_n,\ \xi_n)}{p(\xi_{n+\Delta}/\xi^n)}.$$

Если теперь воспользоваться тем фактом, что плотности $p(\xi_{n+\Delta}/\Theta_n,\ \xi_n)$ и $p(\xi_{n+\Delta}/\xi^n)$ нормальны с параметрами

$$\left(\xi_n+(A_0+A_1\Theta_n)\Delta,\ (B\circ B)\Delta\right)$$

и

$$\left(\xi_n+\left(A_0+A_1 m(n)\right)\Delta,\ (B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(n)\Delta^2\right),$$

соответственно, а также теоремой 1 ($p(\Theta_n/\xi^n)$ нормальна

$$N\left(m(n),\ \gamma(n)\right),$$

то сразу получим (16).

Приступим теперь к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Легко видеть, что

$$\pi_\Theta(n,\ N)=p(\Theta_n/\xi^N)=p(\Theta_n/\xi^n)\,\frac{p(\xi^N_{n+\Delta}/\Theta_n,\ \xi_n)}{p(\xi^N_{n+\Delta}/\xi^n)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(n)}}\,e^{-\frac{(\Theta_n-m(n))^2}{2\gamma(n)}}\prod_{l=n+\Delta}^{N}\sqrt{\frac{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta}{B\circ B+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta}}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{l=n+\Delta}^{N}\left[\frac{\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1 m(l-\Delta)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta^2\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1 m_{l-\Delta}(\Theta_n)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta^2\right)}\right]\right\}.$$

Отсюда и из леммы 2 непосредственно следует, что распределение $\pi_\theta(n, N)$ нормально.

Найдем его параметры. Умножая (14) на Θ_n и интегрируя по всему пространству возможных значений Θ_n, находим

$$m(n, l)=\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_n p(\Theta_n/\xi^l)\,d\Theta_n=\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_n p(\Theta_n/\xi^{l-\Delta})\frac{p(\xi_l/\Theta_n, \xi_n^{l-\Delta})}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,d\Theta_n=$$

$$=\sqrt{\frac{B\circ B+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta}{(B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta)^3}}\Big[m(n, l-\Delta)\Big(B\circ B+$$

$$+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta\Big)+\gamma(n, l-\Delta)A_1\varphi(l-\Delta)\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-$$

$$-\Big(A_0+A_1\psi(l-\Delta)\Big)\Delta\Big)\Big]\exp\left\{\frac{\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-(A_0+A_1m(l-\Delta))\Delta\Big)^2}{2\Big((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta^2\Big)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-\Big(A_0+A_1\big(\varphi(l-\Delta)m(n, l-\Delta)+\psi(l-\Delta)\big)\Big)\Delta\Big)^2}{2\Big((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta^2+A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta^2\Big)}\right\}.$$

Отсюда, используя (15) (лемма 4), получим

$$m(n, l)=\frac{m(n, l-\Delta)\Big(B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta\Big)+\gamma(n, l-\Delta)A_1\varphi(l-\Delta)\Big(\Delta\xi_{l-\Delta}-\big(A_0+A_1\psi(l-\Delta)\big)\Delta\Big)}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее тождество:

$$m(n, N)-m(n)=\sum_{l=n+\Delta}^{N}[m(n, l)-m(n, l-\Delta)]. \tag{18}$$

Из (18) на основании (17) непосредственно следует окончательный результат теоремы для $m(n, N)$

$$m(n, N)=m(n)+\sum_{l=n+\Delta}^{N}\frac{\gamma(n, l-\Delta)A_1\varphi(l-\Delta)\{\Delta\xi_{l-\Delta}-[A_0+A_1m(l-\Delta)]\Delta\}}{B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}.$$

Теперь, умножая обе части равенства (14) на Θ_n^2 и интегрируя по всему пространству возможных значений Θ_n, получим

$$\gamma(n, l)+m^2(n, l)=\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_n^2 p(\Theta_n/\xi^l)\,d\Theta_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_n^2 p(\Theta_n/\xi^{l-\Delta})\frac{p(\xi_l/\Theta_n, \xi_n^{l-\Delta})}{p(\xi_l/\xi^{l-\Delta})}\,d\Theta_n=$$

$$=\sqrt{\frac{B\circ B+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta}{(B\circ B+A_1^2\hat\gamma(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n, l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta)^5}}\times$$

$$\times\Bigg[\gamma(n,\ l-\Delta)\left(B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta\right)\left(B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+\right.$$

$$\left.+\gamma(n,\ l-\Delta)A_1^2\varphi^2(l-\Delta)\Delta\right)+\Bigg\{m(n,\ l-\Delta)\left(B\circ B+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta\right)+$$

$$+\gamma(n,\ l-\Delta)A_1\varphi(l-\Delta)\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1\psi(l-\Delta)\right)\right)\Delta\Bigg\}^2\Bigg]\times$$

$$\times\ \exp\left\{\frac{\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1m(l-\Delta)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta^2\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1\left(\varphi(l-\Delta)m(n,\ l-\Delta)+\psi(l-\Delta)\right)\right)\Delta\right)^2}{2\left((B\circ B)\Delta+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta^2+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta^2\right)}\right\}.$$

Используя (15), находим

$$\gamma(n,\ l)+m^2(n,\ l)=$$

$$=\frac{\gamma(n,\ i-\Delta)\left(B\circ B+A\ \hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta\right)\left(B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta\right)}{\left((B\circ B)+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta\right)^2}+$$

$$+\frac{\left\{m(n,\ l-\Delta)\left(B\circ B+A^2{}_1\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta\right)+\gamma(n,\ l-\Delta)A_1\varphi(l-\Delta)\left(\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1\psi(l-\Delta)\right)\Delta\right)\right\}^2}{\left(B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta\right)^2}$$

Отсюда на основании (17) получим

$$\gamma(n,\ l)=\frac{\gamma(n,\ l-\Delta)\left(B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta\right)}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta} \qquad (19)$$

или

$$\gamma(n,\ l)-\gamma(n,\ l-\Delta)=-\frac{\left(A_1\varphi(l-\Delta)\gamma(n,\ l-\Delta)\right)^2\Delta}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}. \qquad (20)$$

Из очевидного тождества

$$\gamma(n,\ N)-\gamma(n)=\sum_{l=n+\Delta}^{N}\left[\gamma(n,\ l)-\gamma(n,\ l-\Delta)\right]$$

и из (20) непосредственно следует окончательный результат теоремы 2 для $\gamma(n,N)$

$$\gamma(n,\ N)=\gamma(n)-\sum_{l=n+\Delta}^{N}\frac{\left(A_1\varphi(l-\Delta)\gamma(n,\ l-\Delta)\right)^2\Delta}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta+A_1^2\gamma(n,\ l-\Delta)\varphi^2(l-\Delta)\Delta}. \qquad (21)$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

Замечание 1. Решение разностного нелинейного уравнения (21) выглядит следующим образом:

$$\gamma(n,\ N)=\frac{\gamma(n)}{1+\gamma(n)\displaystyle\sum_{l=n+\Delta}^{N}\frac{\left(A_1\varphi(l-\Delta)\right)^2\Delta}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(l-\Delta)\Delta}}. \qquad (22)$$

Действительно, (22) удовлетворяет соотношению

$$\gamma(n,\ N)-\gamma(n,\ N-\Delta)=\gamma(n,\ N)\gamma(n,\ N-\Delta)\left(\frac{1}{\gamma(n,\ N-\Delta)}-\frac{1}{\gamma(n,\ N)}\right)=$$

$$=-\frac{\gamma(n,\ N)\gamma(n,\ N-\Delta)A_1^2\varphi^2(N-\Delta)\Delta}{B\circ B+A_1^2\hat{\gamma}(N-\Delta)\Delta},$$

откуда, используя (19), получим (20) при $l=N$.

Замечание 2. Положим теперь в (3) $N=n+\Delta$, тогда, учитывая, что $\hat{\gamma}(n)=0$, $\gamma(n,\ n)=\gamma(n)$, $m(n,\ n)=m(n)$, $\varphi(n)=1$, $\psi(n)=0$, получим

$$m(n,\ n+\Delta)=\frac{(B\circ B)\,m(n)+A_1\gamma(n)(\Delta\xi_n-A_0\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta},$$

$$\gamma(n,\ n+\Delta)=\frac{\gamma(n)(B\circ B)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta},$$

что совпадает с (16) (лемма 5) и следовательно лемма 5 представляет собой следствие теоремы 2.

§ 3. Приложения

1. Формальный предельный переход при $\Delta\to 0$ показывает, что система (1) переходит в систему стохастических дифференциальных уравнений

$$d\Theta_t=[a_0(\xi_t,t)+a_1(\xi_t,\ t)\Theta_t]\,dt+b_1(\xi_t,\ t)\,dw_1(t)+b_2(\xi_t,\ t)\,dw_2(t),$$

$$d\xi_t=[A_0(\xi_t,\ t)+A_1(\xi_t,\ t)\Theta_t]\,dt+B_1(\xi_t,\ t)\,dw_1(t)+B_2(\xi_t,\ t)\,dw_2(t), \quad (23)$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Аналогично система (2) переходит в систему

$$dm(t)=[a_0+a_1m(t)]\,dt+\frac{A_1\gamma(t)+b\circ B}{B\circ B}\left[d\xi_t-\left(A_0+A_1m(t)\right)dt\right], \quad (24)$$

$$\dot{\gamma}(t)=2a_1\gamma(t)-\frac{\left(A_1\gamma(t)+b\circ B\right)^2}{B\circ B}+b\circ b,$$

а(3) в

$$m(t,\ \tau)=m(t)+\int_t^\tau\frac{A_1(\xi_u,\ u)}{B\circ B}\,\varphi(u,\ t)\gamma(t,\ u)\left[d\xi_u-\left(A_0+A_1m(u)\right)du\right],$$

$$\gamma(t,\ \tau)=\frac{\gamma(t)}{1+\gamma(t)\displaystyle\int_t^\tau\frac{[A_1(\xi_u,\ u)\varphi(u,\ t)]^2}{B\circ B}\,du}, \quad (25)$$

где $m(t)$ и $\gamma(t)$ определяются из (24),

$$\varphi(\tau,\ t)=\exp\left\{\int_t^\tau\left[a_1(\xi_u,\ u)-A_1(\xi_u,\ u)\,\frac{\hat{\gamma}(u,\ t)A_1+b\circ B}{B\circ B}\right]du\right\}$$

и $\hat{\gamma}(\tau,\ t)$ есть решение уравнения Риккати $(\tau\geqslant t)$

$$\frac{\partial\hat{\gamma}(\tau,\ t)}{\partial\tau}=2\left[a_1-\frac{b\circ B}{B\circ B}A_1\right]\hat{\gamma}(\tau,\ t)-\frac{A_1^2\hat{\gamma}^2(\tau,\ t)}{B\circ B}+b\circ b-\frac{(b\circ B)^2}{B\circ B}$$

с начальным условием $\dot{\gamma}(t,\ t)=0$*).

*) Обозначения взяты из [2].

Полученные соотношения в точности совпадают с результатами А. Н. Ширяева и Р. Ш. Липцера [1] – [5] по фильтрации и интерполяции компонент диффузионных марковских процессов.

Исследованию вопросов, связанных со сходимостью решений систем (2), (3) к решению систем (24), (25), будет посвящена другая работа автора.

2. Рассмотрим теперь систему

$$\Delta\Theta_n=[a_0(\xi^n, n)+a_1(\xi^n, n)\,\Theta_n]\,\Delta+b_1(\xi^n, n)\,\Delta w_1(n)+b_2(\xi^n, n)\,\Delta w_2(n), \tag{26}$$

$$\Delta\xi_n=[A_0(\xi^n, n)+A_1(\xi^n, n)\,\Theta_n]\,\Delta+B_1(\xi^n, n)\,\Delta w_1(n)+B_2(\xi^n, n)\,\Delta w_2(n),$$

отличную от предыдущих тем, что коэффициенты – суть функции всего прошлого. Как видно из доказательств теорем 1 и 2, это обстоятельство не меняет конечный результат. Следовательно и в этом случае справедливы теоремы 1 и 2 с той лишь перефразировкой, что коэффициенты надо понимать как функции всего прошлого $\xi^n=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

3. Рассмотрим в качестве иллюстрации к теоремам 1 и 2 несколько примеров.

Пример 1. Пусть $a_0=a_1=b_1=b_2=0$, т.е. $\Theta_{n+\Delta}=\Theta_n\equiv\Theta(\omega)$, тогда из (2) получим

$$\Delta m(n)=\frac{\gamma(n)A_1}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}\left[\Delta\xi_n-\Big(A_0+A_1 m(n)\Big)\Delta\right], \tag{27}$$

$$\Delta\gamma(n)=-\frac{A_1^2\gamma^2(n)\,\Delta}{A_1^2\gamma(n)\,\Delta+B\circ B}. \tag{28}$$

Решения разностных уравнений (27) и (28) имеют следующий вид:

$$m(n)=\gamma(n)\left\{\frac{m}{\gamma}+\sum_{l=1}^{n}\frac{A_1(\xi_{l-\Delta}, l-\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(l-\Delta)\Delta}(\Delta\xi_{l-\Delta}-A_0\Delta)\right\}, \tag{29}$$

$$\gamma(n)=\gamma\left[1+\gamma\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{A_1(\xi_{l-\Delta}, l-\Delta)}{B\circ B}\right)^2\Delta\right]^{-1}. \tag{30}$$

Пример 2. Пусть дополнительно к условиям примера 1 имеем

$$A_0=0,\ A_1=1,\ B\circ B=1,\ \Delta=1.$$

Тогда

$$m(n+1)=\frac{m(n)}{1+\gamma(n)}+\frac{\gamma(n)}{1+\gamma(n)}\,\Delta\xi_n,$$

$$\gamma(n+1)=\frac{\gamma(n)}{1+\gamma(n)}.$$

Откуда

$$m(n)=\gamma(n)\left\{\frac{m}{\gamma}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{1+\gamma(l-1)}\,\Delta\xi_{l-1}\right\},$$

$$\gamma(n)=\gamma\,[1+n\gamma]^{-1}.$$

Пример 3. Пусть коэффициенты системы (1) не зависят от ξ_n и $b\circ B=0$, т.е. (Θ_n,ξ_n) – гауссовская – марковская цепь, тогда из (2) получим

$$\Delta m(n)=\Big(a_0+a_1 m(n)\Big)\Delta+\frac{\gamma(n)A_1(1+a_1\Delta)}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}\left[\Delta\xi_n-\Big(A_0+A_1 m(n)\Big)\Delta\right] \tag{31}$$

$$\Delta\gamma(n)=\gamma(n)\,(2a_1+a_1^2\Delta)\,\Delta+(b\circ b)\,\Delta-\frac{[\gamma(n)A_1(1+a_1\Delta)]^2\,\Delta}{B\circ B+A_1^2\gamma(n)\Delta}.$$

В отличие от нелинейного в общем случае фильтра (2), данный фильтр $m(n)$ является линейным.

При $\Delta \to 0$ (31) переходит в известные уравнения Кальмана–Бьюси [6, 7].

Пример 4. Пусть наблюдаемая компонента марковской цепи имеет вид $\xi_n = \eta_n + \Theta_n$, где Θ_n – полезный сигнал и $\Theta_{n+1} = \Theta_n \equiv \Theta(\omega)$, а η_n – стационарная гауссовско–марковская последовательность

$$\eta_n = \rho \eta_{n-1} + \sigma \sqrt{1-\rho^2}\, w_n,$$

где

$$\mathbf{M}(\eta_j \eta_k) = \sigma^2 \rho^{|k-j|},$$

σ^2 и ρ – постоянные, $|\rho|<1$, а w_n – нормально распределенные, независимые случайные величины с параметрами (0, 1).

Следовательно, (ξ_n, Θ_n) удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &\Delta \xi_n = -\xi_n (1-\rho) + \Theta(1-\rho) + \sigma \sqrt{1-\rho^2}\, w_n, \\ &\Theta_{n+1} = \Theta_n \equiv \Theta(\omega). \end{aligned} \tag{32}$$

Сравнивая (32) с (1), имеем

$$\begin{aligned} &\Delta = 1,\ A_0 = -\xi_n(1-\rho),\ A_1 = 1-\rho,\ B_1 = \sigma\sqrt{1-\rho^2}, \\ &B_2 = 0,\ a_0 = a_1 = b_1 = b_2 = 0, \end{aligned}$$

поэтому можно непосредственно воспользоваться результатами (29), (30) примера 1, откуда получим

$$\begin{aligned} &m(n) = \gamma(n) \left\{ \frac{m}{\gamma} + (1-\rho) \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2) + (1-\rho)^2 \gamma(l-1)} \times \right. \\ &\left. \times \left(\Delta\xi_{l-1} + \xi_{l-1}(1-\rho) \right) \right\}, \\ &\gamma(n) = \gamma \left[1 + \gamma(1-\rho)^2 \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)} \right)^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

Теперь из (3) и (22) для нашего примера получим

$$\begin{aligned} &m(n, N) = m(n) + \\ &+ \sum_{l=n+1}^{N} \frac{\gamma(n, l-1)(1-\rho)\varphi(l-1)\left[\Delta\xi_{l-1} - \left(-(1-\rho)\xi_{l-1} + (1-\rho)m(l-1)\right)\right]}{\sigma^2(1-\rho^2) + (1-\rho)^2 \hat{\gamma}(l-1) + (1-\rho)^2 \gamma(n, l-1)\varphi^2(l-1)}, \\ &\gamma(n, N) = \frac{\gamma(n)}{1 + \gamma(n) \sum\limits_{l=n+1}^{N} \dfrac{[(1-\rho)\varphi(l-1)]^2}{\sigma^2(1-\rho^2) + (1-\rho)^2 \hat{\gamma}(l-1)}}, \end{aligned} \tag{34}$$

где $m(n)$ и $\gamma(n)$ определяются из (33), $\hat{\gamma}(l)$ из соотношения

$$\Delta\hat{\gamma}(l) = -\frac{(1-\rho)^2 \hat{\gamma}(l)}{(1-\rho)^2 \hat{\gamma}(l) + \sigma^2(1-\rho^2)},\ l > n$$

с начальным условием $\hat{\gamma}(n) = 0$ и $\varphi(k)$ из системы

$$\varphi(k) = 1 - (1-\rho)^2 \sum_{i=n+1}^{k} \varphi(i-1) \frac{\hat{\gamma}(i-1)}{\sigma^2(1-\rho^2) + (1-\rho)^2 \hat{\gamma}(i-1)}.$$

§ 4. Фильтрация и интерполяция компонент многомерной марковской цепи

Рассмотрим марковскую цепь

$$(\Theta_n, \xi_n)=\Big(\big(\Theta_1(n), \ldots, \Theta_k(n)\big), \big(\xi_1(n), \ldots, \xi_l(n)\big)\Big),$$

$$n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots \quad (\Delta>0), \; k, \; l<\infty,$$

допускающую представление в виде системы разностных уравнений

$$\Delta\Theta_n = a_0(\xi_n, n)\Delta + a_1(\xi_n, n)\Theta_n\Delta + b_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n) + b_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n),$$

$$\Delta\xi_n = A_0(\xi_n, n)\Delta + A_1(\xi_n, n)\Theta_n\Delta +$$

$$+ B_1(\xi_n, n)\Delta w_1(n) + B_2(\xi_n, n)\Delta w_2(n), \tag{35}$$

где $a_0=(a_{01}, \ldots, a_{0k})$, $A_0=(A_{01}, \ldots, A_{0l})$ — вектор-функции, $a_1=\|a_{ij}\|$, $A_1=\|A_{ij}\|$, $b_1=\|b^1_{ij}\|$, $b_2=\|b^2_{ij}\|$, $B_1=\|B^1_{ij}\|$, $B_2=\|B^2_{ij}\|$ — матрицы порядков $k\times k$, $l\times k$, $k\times k$, $k\times l$, $l\times k$, $l\times l$, $w_1(n)=\big(w_{11}(n), \ldots, w_{1k}(n)\big)$, $w_2(n)=$ $=\big(w_{21}(n), \ldots, w_{2l}(n)\big)$ — k и l-мерные гауссовские последовательности с независимыми приращениями и с независимыми компонентами, у которых

$$\mathbf{M}\, w_{pq}(n)=0, \quad \mathbf{M}\,[w_{pq}(n)-w_{pq}(s)]^2=n-s,$$

$$n>s; \; p=1, \; 1\leqslant q\leqslant k; \; p=2, \; 1\leqslant q\leqslant l.$$

Приведем многомерные аналогии теорем 1 и 2. Доказательства их не отличаются от доказательств теорем 1 и 2 и поэтому мы их приводить не будем.

Теорема 3. *Если марковская цепь*

$$(\Theta_n, \xi_n)=\Big(\big(\Theta_1(n), \ldots, \Theta_k(n)\big), \big(\xi_1(n), \ldots, \xi_l(n)\big)\Big),$$

$$n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots \quad (\Delta>0), \; k, \; l<\infty,$$

допускает представление (35) *априорное распределение*

$$\mathbf{P}(\Theta_0\leqslant\Theta/\xi_0)=\mathbf{P}\big(\Theta_1(0)\leqslant\Theta_1, \ldots, \Theta_k(0)\leqslant\Theta_k/\xi_0\big)$$

является нормальным с параметрами

$$m_0=\mathbf{M}\,[\Theta_0/\xi_0], \quad \Gamma_0=\mathbf{M}\,[(\Theta_0-m_0)(\Theta_0-m_0)^*/\xi_0]$$

и матрица

$$B\circ B=B_1B_1^*+B_2B_2^*$$

невырожденна, то апостериорное распределение

$$\mathbf{P}(\Theta_n\leqslant\Theta/\mathscr{F}_{\xi n})=\mathbf{P}\big(\Theta_1(n)\leqslant\Theta_1, \ldots, \Theta_k(n)\leqslant\Theta_k/\mathscr{F}_{\xi n}\big)$$

также является нормальным с параметрами

$$m(n)=\mathbf{M}\,(\Theta_n/\mathscr{F}_{\xi n}), \quad \Gamma_n=\mathbf{M}\,\Big[\big(\Theta_n-m(n)\big)\big(\Theta_n-m(n)\big)^*/\mathscr{F}_{\xi n}\Big],$$

удовлетворяющими разностным уравнениям

$$\Delta m(n)=\left(a_0+a_1 m(n)\right)\Delta+[(E+a_1\Delta)\Gamma_n A_1^*+(b\circ B)]\times$$
$$\times[(B\circ B)+A_1\Gamma_n A_1^*\Delta]^{-1}\left[\Delta\xi_n-\left(A_0+A_1 m(n)\right)\Delta\right],$$
$$\frac{\Delta\Gamma_n}{\Delta}=(b\circ b)+a_1\Gamma_n a_1^*\Delta+a_1\Gamma_n+\Gamma_n a_1^*-[(E+a_1\Delta)\Gamma_n A_1^*+$$
$$+(b\circ B)][(B\circ B)+A_1\Gamma_n A_1^*\Delta]^{-1}[(E+a_1\Delta)\Gamma_n A_1^*+(b\circ B)]^*, \qquad (36)$$

где

$$(b\circ b)=b_1 b_1^*+b_2 b_2^*,\ (b\circ B)=b_1 B_1^*+b_2 B_2^*,\ (B\circ B)=B_1 B_1^*+B_2 B_2^*,$$

C^* *— матрица, сопряженная к* C, E *— единичная матрица порядка* $k\times k$.

Теорема 4. *В предположениях теоремы* 3 *апостериорное распределение*

$$\mathbf{P}(\Theta_n\leqslant\Theta/\mathscr{F}_{\xi N})=\mathbf{P}\left(\Theta_1(n)\leqslant\Theta_1,\ \ldots,\ \Theta_k(n)\leqslant\Theta_k/\mathscr{F}_{\xi N}\right),\ n\leqslant N$$

также нормально с параметрами

$$m(n,\ N)=\mathbf{M}(\Theta_n/\mathscr{F}_{\xi N}),$$
$$\Gamma_{n,N}=\mathbf{M}\left(\left(\Theta_n-m(n,\ N)\right)\left(\Theta_n-m(n,\ N)\right)^*/\mathscr{F}_{\xi N}\right),$$

определяемым из соотношений

$$m(n,\ N)=m(n)+\sum_{l=n+\Delta}^{N}\Gamma_{n,l-\Delta}\varphi^*(l-\Delta)A_1^*[(B\circ B)+A_1\hat\Gamma_{l-\Delta}A_1^*\Delta+$$
$$+A_1\varphi(l-\Delta)\Gamma_{n,l-\Delta}\varphi^*(l-\Delta)A_1^*]^{-1}\left[\Delta\xi_{l-\Delta}-\left(A_0+A_1 m(l-\Delta)\right)\Delta\right],$$
$$\Gamma_{n,N}=\Gamma_n-\sum_{l=n+\Delta}^{N}A_1\varphi(l-\Delta)\Gamma_{n,l-\Delta}[B\circ B)+A_1\hat\Gamma_{l-\Delta}A_1^*\Delta+$$
$$+A_1\varphi(l-\Delta)\Gamma_{n,l-\Delta}\varphi^*(l-\Delta)A_1^*\Delta]^{-1}\Gamma_{n,l-\Delta}\varphi^*(l-\Delta)A_1^*, \qquad (37)$$

де $\varphi(l)$ *фундаментальная матрица (порядка* $k\times k$*) системы разностных уравнений*

$$\frac{\Delta x_l}{\Delta}=\{a_1-[(E+a_1\Delta)\Gamma_n A_1^*+(b\circ B)][(B\circ B)+A_1\Gamma_n A_1^*\Delta]^{-1}A_1\}x_l$$

(E *— единичная матрица порядка* $k\times k$),

$$\hat\Gamma_l=\hat\Gamma_l(\Theta_n)=\mathbf{M}\left(\left(\Theta_l-m_l(n)\right)\left(\Theta_l-m_l(\Theta_n)\right)^*/\xi_n^l,\ \Theta_n\right)$$

определяется из системы

$$\frac{\Delta\hat\Gamma_l}{\Delta}=(b\circ b)+a_1\hat\Gamma_l a_1^*\Delta+a_1\hat\Gamma_l+\hat\Gamma_l a_1^*-[(E+a_1\Delta)\hat\Gamma_l A_1^*+$$
$$+(b\circ B)][(B\circ B)+A_1\hat\Gamma_l A_1^*\Delta]^{-1}[(E+a_1\Delta)\hat\Gamma_l A_1^*+(b\circ B)]^*$$

с начальным условием $\hat\Gamma_n(\Theta_n)=0$ (0 *— нулевая матрица порядка* $k\times k$), $m(n)$ и Γ_n *находятся из уравнений* (36).

Замечание. Решение разностного уравнения (37) выглядит следующим образом:

$$\Gamma_{n,N}=\left\{E+\Gamma_n\sum_{l=n+\Delta}^{N}\varphi^*(l-\Delta)A_l^*\left[(B\circ B)+A_1\hat{\Gamma}_{l-\Delta}A_l^*\Delta\right]^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times A_1\varphi(l-\Delta)\right\}^{-1}\Gamma_n.$$

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и постоянную помощь данной работе, а также Р. Ш. Липцеру за полезные советы и замечания.

Институт прикладной математики
Тбилисского Государственного университета

Поступило в редакцию
26.VIII.1968

Литература

1. А. Н. Ширяев, Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов, Проблемы передачи информации, II, 3 (1966), 3–22; III, 1 (1967), 86–87.
2. А. Н. Ширяев, Докторская диссертация, МИАН СССР, 1967, 764–765.
3. А. Н. Ширяев, Исследования по стохастическому последовательному анализу (автореферат докторской диссертации), Математические заметки, III, 6, (1968), М, 739–754.
4. Р. Ш. Липцер, О фильтрации и экстраполяции компонент диффузионных марковских процессов, Теория вероятностей и ее применения, XII, 4, (1967), 764–765.
5. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов, Труды МИАН, 104, (1968), 135–180.
6. R. E. Kalman, R. S. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, J. Basic Eng., 83 (1961), 95–108.
7. R. S. Bucy, Optimal filtering for correlated noise, J. Math. Anal. Applic., 20, I (1967), 1–8.

MARKOVO GRANDINĖS KOMPONENČIŲ NUOSEKLI FILTRACIJA IR INTERPOLIACIJA

O. Glontis

(*Reziumė*)

Sakykime, (Θ_n, ξ_n), $n=0, \Delta, 2\Delta, \dots$ $(\Delta>0)$ dvimatė Markovo grandinė; ξ_n stebima, Θ_n nestebima komponentė. Darbe gautos (2), (3) rekurentinės priklausomybės sąlyginiams matematiniams vidurkiams ir kovariacijoms, kurios nustato optimalų, vidurkio kvadrato prasme, Θ_n filtracijos ir interpoliacijos įvertinimą ir klaidą, esant sąlygai, kad (Θ_n, ξ_n) patenkina (1) lygtį. Rezultatai apibendrinami daugiamatei Markovo grandinei.

SEQUANTIAL FILTRATION AND INTERPOLATION OF COMPONENTS OF MARKOV CHAINS

O. Glonti

(*Summary*)

Let (Θ_n, ξ_n), $n=0, \Delta, 2\Delta, \dots$ $(\Delta>0)$ be a two-dimensional Markov chain, where ξ_n is the observable component and Θ_n is the unobservable one. In this paper we obtain the recurrent relation (2), (3) for conditional expectations and covariance which define optimal mean square estimations and error of filtration and interpolation Θ_n under the supposition that (Θ_n, ξ_n) are satisfied the equation (1). The results are extended in the case of multivariate Markov chains.