IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА. I

В. А. Статулявичус

§ 1. Формулировка теорем

Пусть на вероятностном пространстве $(U, \tilde{F}, \mathbf{P})$ задан марковский процесс $\xi(t)$ со значениями из измеримого пространства (Ω_t, F_t), $t=0, 1, \ldots, n$, вероятностями перехода $P_t(\omega, A)$ из состояния $\omega\in\Omega_{t-1}$ в момент времени $t-1$ в множество состояний $A\in F_t$ в момент времени t, $t=1, 2, \ldots, n$ и начальным распределением вероятностей $P_0(A)$, $A\in F_0$. Пусть $\tilde{F}_{kl}=\sigma\{\xi(t),\ k<t\leqslant l\}$ – наименьшая σ-алгебра, порожденная величинами $\{\xi(t), k<t\leqslant l\}$, $\tilde{F}_k=\sigma\{\xi(k)\}$.

Рассматриваются случайные величины

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \tag{1.1}$$

связанные в цепь Маркова $\{\xi(t),\ t=0, 1, \ldots, n\}$, т. е. $X_k=g_k(\xi(k))$, где $g_k(\omega)$ – какая-нибудь F_k-измеримая функция, определенная на Ω_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

Функцию распределения какой-либо случайной величины ξ обозначим F_ξ, соответствующую плотность, если она существует, – p_ξ, характеристическую функцию – f_ξ; Φ и φ обозначают (0,1) – нормальную функцию распределения и плотность вероятности, соответственно; $\Gamma_k(\xi)$ – семиинвариант порядка k случайной величины ξ. Кроме того, пусть

$$f_\xi(t\mid F')=\mathbf{M}\{e^{it\xi}\mid F'\}.$$

Мы будем пользоваться коэффициентом эргодичности $\alpha_{kl}=\alpha(P_{kl})$ переходной функции $P_{kl}(\omega, A)$, $1\leqslant k<l\leqslant n$, введенным Р. Л. Добрушиным,

$$\alpha_{kl}=1-\sup_{\substack{\omega,\tilde{\omega}\in\Omega_k\\ A\in F_l}}|P_{kl}(\omega, A)-P_{kl}(\tilde{\omega}, A)|.$$

Мы также будем пользоваться следующим представлением для α_{kl}:

$$\alpha_{kl}=\inf_{\omega,\tilde{\omega}\in\Omega_k}\int\limits_{\Omega_l}\min\{P_{kl}(\omega, d\bar{\omega}), P_{kl}(\tilde{\omega}, d\bar{\omega})\}, \tag{1.2}$$

где интеграл нужно понимать как предел соответствующей суммы.

Везде будем предполагать, что X_k обладают конечными дисперсиями $\mathbf{D}X_k$, а $\mathbf{M}X_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$.

10. 10824

Положим

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j,\qquad S_{kl}=\sum_{j=k+1}^{l} X_j,\qquad 1\leqslant k<l\leqslant n,$$

$$\alpha_k=\alpha_{k-1,\,k},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad \alpha^{(n)}=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k,$$

$$B_n^2=\mathbf{D}S_n,\qquad Z_n=\frac{S_n}{B_n}.$$

Везде Θ обозначает величину, не превосходящую единицу по модулю. Пусть Θ_u и ϑ_u обозначают такие величины, что $|\Theta_u|\leqslant\psi_1(u)<\infty$, $|\vartheta_u|\leqslant\psi_2(u)<\infty$ в областях изменения u.

Выяснению условий, при которых Z_n асимптотически нормальна, посвещен целый ряд работ, начиная с самого Маркова [1]. Прежде всего сюда следует отнести фундаментальные исследования С. Н. Бернштейна [2] – [5], А. Н. Колмогорова [6], Ю. В. Линника [7] – [9], В. Деблина [10] – [12], В. И. Романовского [51], Н. А. Сапогова [16] – [18], Р. Л. Добрушина [13] – [15]. В. Феллера [52], Кай-Лай Чжуна [53], Т. А. Сарымсакова [54]. В случае однородной цепи Маркова методами спектральной теории операторов С. Х. Сираждинову [19] и С. В. Нагаеву [23] – [24] удалось теорию предельных теорем и их уточнений довести до уровня теории предельных теорем для сумм одинаково распределенных независимых случайных величин, когда предельный закон нормальный. Случай устойчивого предельного закона рассмотрен А. Алешкявичене [33] – [35].

К этому направлению также примыкают исследования И. С. Волкова [39], Д. Мешалкина [38].

Для исследования общего неоднородного случая, метод оптимальной теории операторов, как известно, пока непригоден. Интересы автора все время были направлены к поиску способов, позволяющих и в общем случае добиться оптимальных результатов. Автору удалось почти при оптимальных условиях доказать локальную теорему для S_n и при некоторых ограничениях найти асимптотическое разложения для $f_{S_n}(t)$ и $\mathbf{P}\{S_n=m\}$ [45]. Эти результаты были обобщены А. Рауделюнасом на многомерный случай [29].

В предлагаемой статье далее развиваются прямые вероятностные и аналитические методы, позволяющие для сумм случайных величин, связанных в самую общую цепь Маркова, доказать аналогичные результаты, как и для сумм независимых случайных величин, при сближении с нормальным законом. Часть результатов статьи опубликована (см. [42], [44], [46]).

Много интересных результатов, касающихся асимптотической нормальности Z_n, содержится в работах Розанова [20] – [22], И. А. Ибрагимова [26], [27], М. Розенблатта [28], Б. Ряубы [31], [32], П. Г. Диананды [36], Я. Г. Синая [37], Б. Розена [64], А. А. Боровкова [67], Р. Биллингслея [68], где рассматриваются условия применимости центральной предельной теоремы для более общих схем слабой зависимости слагаемых, а также в работах Р. З. Хасьминского [55], Г. Д. Миллера [56], Б. Дьиреша [57], Ю. Кейлзона и Д. Вишарта [58], Р. Пайка [59], Г. Алешкявичюса [60] – [63] и др., посвященных исследованию предельных теорем для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова.

Предлагаемый метод связан не только с марковской зависимостью, он также хорошо работает для сумм случайных величин, связанных самой общей зависимостью (см. [42], [47] – [51]).

Основные результаты статьи содержатся в § 1, и, большей частью, в § 3, где доказана целая серия лемм, фактически преодолевающих те трудности, которые возникают на пути от независимости к зависимости.

Теорема 1. *Если случайные величины* $|X_k| \leqslant C^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$ *с вероятностью* 1, $\alpha^{(n)}>0$, *то существует абсолютная константа* C, *такая что*

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C \frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)} B_n} . \tag{1.3}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то в интервале*

$$1 \leqslant x \leqslant \delta\Delta_n, \qquad \delta < \delta_0, \qquad \Delta_n = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{H_2 C^{(n)}}$$

имеют место соотношения больших уклонений:

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_{Z_n}(x)}{1-\Phi(x)} &= e^{\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda_n\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)} \left(1 + \Theta\Psi(\delta)\frac{x}{\Delta_n}\right), \\ \frac{F_{Z_n}(-x)}{\Phi(-x)} &= e^{-\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda_n\left(-\frac{x}{\Delta_n}\right)} \left(1 + \Theta\Psi(\delta)\frac{x}{\Delta_n}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь

$$\Psi(\delta) = \frac{8H_1\left\{1 + 7{,}2\left(1 + \min\left\{\frac{1}{3}(1-\delta)^3 H_1^{-\frac{1}{2}}, \ \frac{1}{2}H_1^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)^4\right\}}{(1-\bar{\delta})^4(1-\rho)^{\frac{3}{2}}},$$

$0 < \bar{\delta} < \bar{\delta}_0$ *определяется из уравнения*

$$\delta = \frac{\bar{\delta}(1+\bar{\delta})}{2}, \qquad \rho = \frac{6H_1\bar{\delta}}{(1-\bar{\delta})^3}, \qquad \delta_0 = \frac{\bar{\delta}_0(1+\bar{\delta}_0)}{2},$$

$\bar{\delta}_0$ — *действительный корень уравнения* $\rho = 1$ *и*

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{nk} t^k$$

— *степенной ряд Крамера, сходящийся при* $|t| < \delta_0$ *равномерно относительно* n, *причем*

$$|\lambda_{nk}| \leqslant \frac{\bar{\delta}_0}{(k+3)\,\bar{\delta}_0^{k+2}} .$$

Абсолютные константы H_1 *и* H_2 *определены в лемме* 6.

Заметим, что

$$\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda_n\left(\frac{x}{\Delta_n}\right) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_{nk}}{k} x^k,$$

где a_{nk} определяются при обращении

$$y = -\sum_{k=2}^{\infty} a_{nk} x^{k-1}$$

ряда

$$x=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma_k\{Z_n\}}{(k-1)!}y^{k-1}.$$

Так, например,

$$a_{n2}=-1,\qquad a_{n3}=\frac{\Gamma_3\{Z_n\}}{2},$$

$$a_{n4}=\frac{\Gamma_4\{Z_n\}-3\Gamma_3^2\{Z_n\}}{6},$$

$$a_{n5}=\frac{\Gamma_5\{Z_n\}-10\Gamma_4\{Z_n\}\Gamma_3\{Z_n\}+15\Gamma_3^3\{Z_n\}}{24}.$$

Кроме того,

$$\delta_0\geqslant\frac{1}{1+14{,}55\max\{H_1\ H_1^{\frac{1}{3}}\}}.$$

Из теоремы 1 следует, что для того, чтобы $F_{Z_n}(x)\to\Phi(x)$ $(n\to\infty)$ достаточно, чтобы

$$\Delta_n=\frac{\alpha^{(n)}B_n}{H_2C^{(n)}}\to\infty\ (n\to\infty).$$

Но это условие и оптимальное, так как Р. Л. Добрушиным [15] и Б. А. Ряубой [32] было показано, что если

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha^{(n)}B_n}{C^{(n)}}<\infty,$$

то можно найти последовательность $X_1, X_2, \ldots$ случайных величин, связанных в цепь Маркова с данными $\alpha^{(n)}$, B_n и

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|=C^{(n)},$$

такую, что $F_{Z_n}(x)$ не будет стремиться к $\Phi(x)$, когда $n\to\infty$.

Всегда (см. лемму 6 и (3.25))

$$\frac{\alpha^{(n)}}{32}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}X_k\leqslant B_n^2\leqslant\frac{16}{\alpha^{(n)}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}X_k. \tag{1.5}$$

Поэтому для часто встречаемого случая

$$\mathbf{D}X_k\geqslant\sigma^2>0,\ k=1,2,\ldots,n$$

имеем

$$\sup_x|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|\leqslant4\sqrt{2}\,C\frac{C^{(n)}}{\sigma\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}$$

и

$$\Delta_n\geqslant\frac{\sigma\sqrt{n}\,\alpha^{(n)\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}H_2C^{(n)}}.$$

Если

$$\varlimsup_{n\to\infty}C^{(n)}<\infty,$$

то

$$\sup_x |F_{Z_n}(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{1}{\varphi^{\frac{3}{2}}(n)}$$

при

$$\alpha^{(n)}=\frac{\varphi(n)}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

Примерами, аналогичными известному примеру С. Н. Бернштейна можно показать, что утверждений теорем 1, 2, в общем случае, улучшить нельзя

Теорема 3. *Если для какого-нибудь целого $s \geqslant 3$ случайные величины X_k имеют конечные моменты $\mathbf{M}\,|X_k|^s$, $k=1, 2, \ldots, n$ и $\alpha^{(n)}>0$, то существует абсолютная константа C' такая, что*

$$\sup_x |F_{Z_n}(x)-\Phi(x) \leqslant C'\left\{ L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}+L_{sn}\ln^{\frac{s}{2}}\left(1+L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right)\right\}. \tag{1.6}$$

Здесь

$$L_{sn}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\,|X_k|^s}{\alpha^{(n)s-1}B_n^s}.$$

Логарифмический множитель $\ln^{\frac{s}{2}}(1+L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}})$, по-видимому, возможно снять, если более тщательно провести и без этого сложное доказательство леммы 10.

В остаточном члене (1.6) мы поставили $L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}$, а не как обычно, в случае независимых величин, L_{3n}. Дело в том, что если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, т. е. $\alpha^{(n)}=1$, то как показывает [40], (1.3) $L_{3n} \leqslant L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}$. Но если $\alpha^{(n)}<1$, то этого может и не быть. Например, если $|X_k| \leqslant C^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, то учитывая (1.5), находим

$$L_{sn} \leqslant \frac{32C^{(n)s-2}}{\alpha^{(n)s}B_n^{s-2}}$$

или

$$L_{sn}^{\frac{1}{s-2}} \leqslant 32^{\frac{1}{s-2}}\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)\frac{s}{s-2}}B_n}. \tag{1.7}$$

Благодаря ограниченности X_k мы можем выбрать $s \geqslant 3$ произвольным, следовательно, в том случае, как видно из (1.7), в правую часть (1.6) вместо $L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}$ можно положить

$$\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)}B_n},$$

в то время, как $L_{3n} \leqslant \frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)s}B_n}$ и величины X_k можно подобрать так, чтобы выполнилось неравенство

$$L_{3n} \geqslant \frac{C^{(n)}}{2\alpha^{(n)s}B_n}.$$

Теорема 4. *Если*

$$\alpha^{(n)} B_n \geqslant \ln \frac{1}{\alpha^{(n)}}$$

и

$$\operatorname{vrai\,sup} \mathbf{M}\{|X_k|^3 | \tilde{F}_{k-1}\} < \infty, \quad k=1, \ldots, n,$$

то

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C'' \tilde{L}_{3n},$$

где

$$\tilde{L}_{sn} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{vrai\,sup} \mathbf{M}\{|X_k|^s | \tilde{F}_{k-1}\}}{\alpha^{(n)s-1} B_n^s}.$$

C'' — абсолютная константа.

Здесь и в дальнейшем мы считаем, что $\mathbf{M}\{|X_1|^s | \tilde{F}_0\} = M|X_1|^s$.

Для получения асимтотических разложений для $F_{Z_n}(x)$, $p_{Z_n}(x)$ или для $\mathbf{P}\{S_n = m\}$, когда X_k целочисленны, придется учитывать структуру распределений F_{X_k}, $k=1, 2, \ldots, n$. Уже для сумм независимых случайных величин эти разложения довольно грамоздки, поэтому сюда мы переносим только некоторые результаты, например, статей [40], [41], хотя без особого труда можно обобщать на марковский случай все результаты для сумм независимых случайных величин об асимптотических разложениях. Это легко понять, если проследить доказательство теорем 5—9, где оценка для $f_{Z_n}(t)$ при $|t| \geqslant L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$ сводится к оценкам для $f_{Z_n}(t)$, когда $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимы. При $|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$ достаточно пользоваться асимптотическим разложением для $f_{Z_n}(t)$, которое получено нами в леммах 9—12.

Нам будут нужны некоторые обозначения. Через L_{sn}^0 мы обозначим дробь Ляпунова порядка s, для величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если считать их независимыми, т. е.

$$L_{sn}^0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}|X_k|^s}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}X_k\right)^{\frac{s}{2}}},$$

аналогично

$$B_n^{0^2} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}X_k.$$

Пусть

$$\tilde{L}_{sn}^0 = \operatorname{vrai\,sup} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{|X_k - \mathbf{M}(X_k | \tilde{F}_{k-1})|^s | \tilde{F}_{k-1}\}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{X_k | \tilde{F}_{k-1}\}\right)^{\frac{s}{2}}},$$

$$\tilde{B}_n^{02} = \operatorname{vrai\,inf} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{X_k \mid \tilde{F}_{k-1}\},$$

$$\tilde{B}_n^0 \tilde{L}_{3n}^0 = \operatorname{vrai\,sup} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{|X_k - \mathbf{M}(X_k \mid \tilde{F}_{k-1})|^3 \mid \tilde{F}_{k-1}\}}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{X_k \mid \tilde{F}_{k-1}\}}$$

и для любого набора $\mathfrak{M}_k = \{\Delta_{ki}, C_{ki}, i=1, 2, \dots\}$ непересекающихся интервалов Δ_{ki} длины $|\Delta_{ki}|$ и положительных констант $C_{ki} \leqslant \infty$, $k=1, \dots, n$ определим

$$\alpha(\mathfrak{M}_k, N) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{ki}^3}{(|\Delta_{ki}| + 2N)^2 C_{ki}^2}, \tag{1.8}$$

где $N > 0$ и

$$Q_{ki} = \int_{\Delta_{ki}} \min\{C_{ki}, p_{X_k}(x)\}\,dx,$$

$$\tilde{p}_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_k}(x+y)\, p_{X_k}(y)\,dy$$

и пусть $\tilde{\alpha}(\mathfrak{M}_k, N)$ это $\operatorname{vrai\,inf} \alpha(\mathfrak{M}_k, N)$, когда вместо $p_{X_k}(x)$ берется $p_{X_k}(x \mid \tilde{F}_{k-1})$. Как и в [40], (2.7)

$$\alpha(\mathfrak{M}_k, N) \geqslant \frac{1}{128} \frac{1}{(\sigma_k + \frac{1}{2}N)^2 C_k^2}, \tag{1.9}$$

если

$$p_{X_k}^{(x)} \leqslant C_k$$

и

$$\tilde{\alpha}(\mathfrak{M}_k, N) \geqslant \frac{1}{128} \frac{1}{\left(\tilde{\sigma}_k + \frac{1}{2}N\right)^2 C_k^2},$$

если

$$p_{X_k}(x \mid \tilde{F}_{k-1}) \leqslant C_k, \quad \mathbf{D}\{X_k \mid \tilde{F}_{k-1}\} \leqslant \tilde{\sigma}_k^2$$

с вероятностью 1.

Теорема 5. *Если для каких-нибудь* $n \geqslant 8$ *и целого* $s \geqslant 3$

$$\operatorname{vrai\,sup} \mathbf{M}\{|X_k|^s \mid \tilde{F}_{k-1}\} < \infty,$$

существуют условные плотности $p_{X_k}(x \mid \tilde{F}_{k-1})$ *и с вероятностью* 1

$$p_{X_k}(x \mid \tilde{F}_{k-1} \times \tilde{F}_{k+1}) \leqslant C_k < \infty, \qquad k = 1, 3, 5, 7,$$

$$p_{X_k}(x \mid \tilde{F}_{k-1}) \leqslant C_k \leqslant \infty, \qquad k = 9, 10, \dots, n, \ \alpha^{(n)} > 0$$

и, кроме того,

$$\alpha^{(n)} B_n \geqslant \ln \frac{1}{\alpha^{(n)}},$$

то

$$p_{Z_n}^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\nu=1}^{s-3} Q_{\nu n}(x)\, L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}}\right) + \vartheta_s \tilde{L}_{sn} + \Theta R'_n + \Theta R''_n,$$

$$F_{Z_n}(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\nu=1}^{s-3} Q_{\nu n}(x)\, L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} + \vartheta'_s \tilde{L}_{sn} + \Theta L_{sn}^{\frac{1}{s-2}} c^{-1} R'_n + \Theta L_{3n}^{0} R''_n.$$

Здесь многочлены

$$Q_{\nu n}(x) = \sum_{m=1}^{3\nu} a_{m\nu n} x^{m-1},$$

причем $a_{m\nu n}=0$, *если* m *и* ν *неодинаковой четности, и*

$$a_{m\nu n} L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\substack{l \\ \nu+2\leqslant m+2l\leqslant 3\nu}} \frac{(-1)^{l+1}(m+2l-1)!}{2^l l!\, \mu!\, B_n^{m+2l}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\nu_1, \dots \nu_\mu \geqslant 3 \\ \nu_1+\dots+\nu_\mu = m+2l \\ 2\mu = m+2l-\nu}} \frac{\Gamma_{\nu_1}\{S_n\} \cdots \Gamma_{\nu_\mu}\{S_n\}}{\nu_1! \cdots \nu_\mu!},$$

то в других случаях, коэффициенты $a_{m\nu n}$ *равномерно ограничены относительно* n,

$$R'_n = \frac{6B_n}{c\,\alpha^{(n)} \bar{B}_n^{02}} L_{sn}^{\frac{1}{s-2}} \exp\left\{-\frac{c\alpha^{(n)}\bar{B}_n^{02}}{6B_n} L_{sn}^{-\frac{2}{s-2}}\right\},$$

$$R''_n = 96\sqrt{2\pi}\,\alpha^{(n)^{-\frac{1}{2}}} B_n \tilde{L}_{3n}^{0} \prod_{i=1}^{4} C_{2i-1}^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{\pi\bar{\sigma}_{2i-1}}{8\sqrt{2}\bar{B}_n^{0}\tilde{L}_{3n}^{0}}\right)^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}}{16} \sum_{k=9}^{n} \tilde{\alpha}(\mathfrak{M}_k, \pi\bar{B}_n^0 \tilde{L}_{3n}^0)\right\},$$

абсолютная константа c *из леммы* 12.

С первого взгляда результаты теоремы выглядят очень громоздкими, но в большинстве случаев $\alpha^{(n)} \geqslant \alpha > 0$,

$$\bar{B}_n^0 = B_n, \qquad \tilde{L}_{3n}^0 \ll \frac{1}{B_n}, \qquad L_{sn}^{-\frac{2}{s-2}} \gg B_n^2$$

и скорость сходимости определяется величиной $\tilde{L}_{sn}$, и

$$\exp\left\{-c' \sum_{k=9}^{n} \frac{1}{(\bar{\sigma}_k^2+1)C_k^2}\right\}, \qquad c'>0.$$

В этом случае, для того, чтобы

$$\sup \left| p_{Z_n}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \to 0 \; (n\to\infty),$$

достаточно, чтобы $B_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ и

$$\sum_{k=9}^{\infty} \frac{\mathrm{f}1}{(\bar{\sigma}_k^2+1)C_k^2} = \infty.$$

Теорема 6. *Если для каких нибудь n и целого $s\geqslant 3$*

$$\operatorname{vrai\,sup} \mathbf{M}\{|X_k|^s|\tilde{F}_{k-1}\}<\infty, \qquad \alpha^{(n)}>0,$$

$$\alpha^{(n)}B_n\geqslant \ln\frac{1}{\alpha^{(n)}} \text{ и } X_k, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,n$$

принимают целочисленные значения, то при любом $N_n\geqslant 4\tilde{B}_n^0\tilde{L}_{3n}^0$ имеют место асимптотические разложения:

$$B_n\mathbf{P}\{S_n=m\}=\frac{d}{dx}\underset{s-1,\,n}{\Phi}(x_{mn})+\vartheta_{1s}\tilde{\tilde{L}}_{sn}+\Theta R_n'+$$

$$+\vartheta_1\frac{B_n}{\sqrt{\alpha^{(n)}}\tilde{B}_n^0}N_n\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}}{8}\min_{a,q}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\alpha}_k\left(a,\ q,\ \tfrac{\pi}{4}N_n\right)\right\},$$

$$F_{Z_n}(x)=\Phi_{s-1,n}(x)+\sum_{\nu=1}^{s-3}\frac{h_\nu}{B_n^\nu}S_\nu(xB_n)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Phi_{s-1,n}(x)+\vartheta_{1s}'\tilde{L}_{sn}+\Theta L_{sn}^{\frac{s}{s-2}}c^{-1}R_n'+$$

$$+\vartheta_1'L_{3n}^0B_n\alpha^{(n)-\frac{1}{2}}N_n\exp\left\{-\frac{\alpha^{(n)}}{8}\min_{a,q}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\alpha}_k\left(a,\ q,\ \frac{\pi}{4}N_n\right)\right\}.$$

Здесь

$x_{mn}=\dfrac{m}{B_n}$, $h_\nu=1$ *для* ν *вида* $4m+1$ *и* $4m+2$, *и* $h_\nu=-1$ *для* ν *вида* $4m$ *и* $4m+3$.

$$\Phi_{s-1,n}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-3}Q_{\nu n}(x)L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}},$$

и

$$S_{2\lambda-1}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{2^{2\lambda-2}(\nu\pi)^{2\lambda-1}},$$

$$S_{2\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{2^{2\lambda-1}(\nu\pi)^{2\lambda}}$$

— *функции, входящие в формулу суммирования Эйлера—Маклорена*

$$\tilde{\alpha}_k(a,\ q,\ N)=\operatorname{vrai\,inf}\frac{1}{q^2}\sum_r{}^{*}r^2\mathbf{P}\{a\tilde{X}_k\equiv r\ (\mathrm{mod}\ q),\qquad |\tilde{X}_k|\leqslant N|\tilde{F}_{k-1}\}.$$

$\sum\limits_r^{*}$ означает суммирование по всем абсолютно наименьшим вычетам по модулю q, минимум берется по всем таким a и q, что $a\leqslant\frac{1}{2}q$, $1<q\leqslant 2N_n$, $(a,\ q)=1$, $\tilde{X}_k$ — симметризованная $\tilde{X}_k$, т. е. $\tilde{X}_k=X_k-X_k^1$, где X_k' — независимый экземпляр X_k. Разложения можно получить и в абсолютных терминах, а не в условных распределениях.

Пусть $\bar{p}_{X_k}$ — плотность вероятности абсолютно непрерывной компоненты функции распределения F_{X_k} с весом a_k, т. е. $F_{X_k}(x)=a_k\int\limits_{-\infty}^{x}p_{X_k}(x)\,dx+$

$+b_k S_k(x)$, $a_k+b_k=1$, $a_k \geqslant 0$, $b_k \leqslant 0$, и пусть $\bar{\alpha}(\mathfrak{M}_k, N)$ это $\alpha(\mathfrak{M}_k, N)$, когда вместо $p_{X_k}(x)$ берется $\bar{p}_{X_k}(x)$.

Положим для краткости

$$L_n = ec^{-1}\left(\frac{B_n^0}{B_n}\right)^{\frac{s-1}{s-2}} \exp\left\{-c''\frac{\alpha^{(n)\left(3+\frac{4}{s-2}\right)}}{1+\ln n} h_{sn}^{0\ -\frac{s}{s-2}}\right\},$$

где $c>0$ — абсолютная константа из леммы 12, а

$$c'' = \frac{(3-2\sqrt{2})\,c^3}{2^8\pi^3 16^{\frac{4}{s-2}}}.$$

Напомним, что согласно (1.5)

$$B_n^{02} \leqslant \frac{32B_n^2}{\alpha^{(n)}}.$$

Пусть далее

$$P_n = \frac{\alpha^{(n)3}}{192(1+\ln n)} \sum_{k=5}^{n} \alpha\left(\mathfrak{M}_k,\ \pi B_n^0 L_{sn}^{0\ \frac{1}{s-2}}\right),$$

$$\bar{P}_n = \frac{\alpha^{(n)3}}{192(1+\ln n)} \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{\alpha}\left(\mathfrak{M}_k,\ \pi B_n^0 L_{sn}^{0\ \frac{1}{s-2}}\right),$$

$$P_n = \frac{\alpha^{(n)3}}{128(1+\ln n)} \min_{a,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a,\ q,\ N_n),$$

где

$$\alpha_k(a,\ q,\ N) = \frac{1}{q^2} \sum_r{}^{*}\, r^2 \mathbf{P}\{a\tilde{X}_k \equiv r \,(\mathrm{mod}\ q),\ |X_k| \leqslant N\},$$

$\tilde{X}_k$ — симметризированная X_k.

Теорема 7. *Если для каких нибудь n и целого $s \geqslant 3$ случайные величины X_k имеют конечные моменты $\mathbf{M}\,|X_k|^s$, $k=1, 2, \ldots, n$, $\alpha^{(n)}>0$, то*

$$F_{Z_n}(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\nu=1}^{s-3} Q_{\nu n}(x) L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} +$$

$$+\vartheta_{2,s} L_{sn} \ln^{\frac{s}{2}}(1+L_{sn}^{-1}) + \Theta h_n + 2\Theta e \ln\left(B_n^0 L_{sn}^{0\ \frac{1}{s-2}} B_n^{-1} L_{sn}^{-1}\right) e^{-\bar{P}_n}.$$

Теорема 8. *Пусть X_k принимают только целочисленные значения и* $\mathbf{M}\,|X_k|^s < \infty$ $(s \geqslant 3)$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Тогда при любом

$$N_n \geqslant 4B_n^0 L_{sn}^{0\ \frac{-1}{s-2}}$$

$$F_{Z_n}(x) = \Phi_{s-1,n}(x) + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{h_\nu}{B_n^\nu} S_\nu(xB_n) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \Phi_{s-1,n}(x) +$$

$$+\vartheta_{3,6} L_{sn} \ln^{\frac{s}{2}}(1+L_{sn}^{-1}) + \Theta L_n + 2\Theta e N_n^2 \ln\left(B_n^0 L_{sn}^{0\ \frac{1}{s-2}} B_n^{-1} L_{sn}^{-1}\right) e^{-P_n} \qquad (1.10)$$

и

$$B_n \mathbf{P}\{S_n=m\}=\frac{d}{dx}\Phi_{s-1,n}(x_{mn})+$$

$$+\vartheta'_{3,s}L_{sn}\ln^{\frac{s}{2}}(1+h_{sn}^{-1})+\frac{\Theta}{2\pi}L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}L_n+\Theta e N_n B_n e^{-P_n}. \qquad (1.11)$$

Здесь использованы обозначения теоремы 6.

Теорема 9. *Пусть для каких-нибудь $n \geqslant 4$ и целого $s \geqslant 3$ случайные величины X_k имеют конечные моменты*

$$\mathbf{M}\,|\,X_k\,|^s,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \alpha^{(n)}>0.$$

Пусть, кроме того, $p_{X_k}(x\,|\,\tilde{F}_{k+1}\times\bar{F}_{k-1})\leqslant C_k<\infty$, $k=1$, 3 и $p_{X_k}(x)\leqslant C_k$, $k=5$, 6, ..., n.

Тогда

$$p_{Z_n}(x)=\frac{d}{dx}\Phi_{s-1,n}(x)+\vartheta_{4,s}L_{sn}\ln^{\frac{s+1}{2}}(1+L_{sn}^{-1})+$$

$$+\frac{\Theta}{2\pi}L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}L_n+\Theta e B_n\sqrt{C_1C_3}\,e^{-P_n}.$$

Замечание к теоремам 7—9. *Если случайные величины $|\,X_k\,|\leqslant C^{(n)}$, $k=1$, 2, ..., n, с вероятностью 1, то в остаточных членах асимптотических разложений, найденных в теоремах 7—9, вместо*

$$L_{sn}\ln^{\frac{s}{2}}(1+L_{sn}^{-1})$$

или

$$L_{sn}\ln^{\frac{s+1}{2}}(1+L_{sn}^{-1})$$

можно положить

$$\bar{L}_{sn}=\left(\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)}B_n}\right)^{s-2}.$$

Справедливость замечания следует из того, что в случае ограниченных X_k, $k=1$, 2, ..., n, вместо асимптотического разложения для $f_{Z_n}(t)$, полученного в лемме 11, мы можем пользоваться асимптотическим разложением по степени $\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)}B_n}$, которое получено в лемме 9.

Как следствие теоремы 9 можем сформулировать следующую теорему. Пусть мы имеем схему серий

$$X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ \ldots,\ X_{k_n}^{(n)}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

случайных величин, в каждой n-ой серии связанных в цепь Маркова с k_n моментами времени и коэффициентом эргодичности $\alpha^{(n)}$. Пусть, как и раньше,

$$\mathbf{M}X_k^{(n)}=0,\ \mathbf{D}X_k^{(n)}<\infty,\ n=1,2,\ \ldots,\ k=1,2,\ \ldots,\ k_n,$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_k^{(n)}, \qquad B_n^2=\mathbf{D}S_n, \qquad Z_n=\frac{S_n}{B_n}.$$

Потребуем, чтобы $B_n^2\ll n^A$, где A — любое постоянное.

Теорема 10. *Если случайные величины*

$$|X_k^{(n)}| \leqslant C^{(n)}, \qquad k=1, \ldots, k_n, \qquad n=1, 2, \ldots$$

с вероятностью 1, $\alpha^{(n)}>0$, *существуют плотности*

$$p_{X_k^{(n)}}(x \mid \tilde{F}_{k-1}^{(n)} \times \tilde{F}_{k+1}^{(n)}) \leqslant C_k < \infty, \quad k=1,\ 3,$$

$$p_{\overline{X_k^{(n)}}}(x) \leqslant C_k^{(n)} \leqslant \infty, \qquad k=5,\ 6, \ldots, k_n, \qquad n=1,\ 2, \ldots$$

и

$$\frac{\alpha^{(n)3}}{C^{(n)3} \ln^3 n} \sum_{k=5}^{k_n} \frac{1}{C_k^{(n)2}} \to \infty (n \to \infty), \tag{1.12}$$

то

$$p_{\bar{Z}_n}^{(x)} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (n \to \infty)$$

равномерно относительно x.

Действительно, так как

$$\mathbf{D} X_k^{(n)} \geqslant \frac{1}{12 C_k^{(n)2}}, \ k=5,\ 6,\ \ldots,\ k_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

то из (1.12) находим, что

$$\frac{\alpha^{(n)3} B_n^{02}}{C^{(n)3} \ln^3 n} \to \infty (n \to \infty). \tag{1.13}$$

Согласно (1.5),

$$B_n^{02} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D} X_k^{(n)} \leqslant \frac{32 B_n^2}{\alpha^{(n)}},$$

поэтому и

$$\frac{\alpha^{(n)3} B_n^{2}}{C^{(n)3} \ln^3 n} \to \infty (n \to \infty). \tag{1.14}$$

В нашем случае, если учесть (1.12), вместо

$$L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} L_n \leqslant \frac{32 e \sqrt{n}}{c \alpha^{(n)}} \exp\left\{-c'' \frac{\alpha^{(n)\left(3+\frac{4}{s-2}\right)}}{1+\ln n} \frac{B_n^{02}}{C^{(n)3}}\right\},$$

в разложении можно поставить

$$\bar{L}_n = \varlimsup_{s\to\infty} L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} L_n \leqslant \frac{32 e \sqrt{n}}{c \alpha^{(n)}} \exp\left\{-c'' \frac{\alpha^{(n)3} B_n^{02}}{(1+\ln n) B^{(n)3}}\right\}.$$

Из (1.13) следует, что $\bar{L}_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Используя (1.9) находим

$$P_n \geqslant \frac{\alpha^{(n)3}}{3^3 2^7 C^{(n)3}(1+\ln n)} \sum_{k=5}^{k_n} \frac{1}{C_k^{(n)3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)} B_n} \to 0, \qquad \bar{L}_n \to 0,$$

$\frac{P_n}{\ln n} \to \infty$, когда $n \to \infty$ и из теоремы 9 и замечания к ней следует доказательство теоремы 10.

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда $X_k^{(n)}$ принимают целочисленные значения. А именно, если $|X_k^{(n)}|\leqslant C^{(n)}$ с вероятностью 1 и

$$\frac{\alpha^{(n)2}}{\ln^2 n}\min_{a,q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a,\ q,\ 2C^{(n)})\to\infty(n\to\infty),$$

то

$$\sup_m|B_n\mathbf{P}\{S_n=m\}-\varphi(x_{mn})|\to 0\ (n\to\infty).$$

И, наконец, рассмотрим приложимость теоремы больших уклонений для числа попаданий в состояния $E_1,\ \ldots,\ E_s$ конечной цепи Маркова, с вероятностями перехода $p_{ji}^{(k)}$ из состояния E_i в $k-1$-ом шагу в состояние E_j в k-ом шагу и начальным распределением вероятностей p_j, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s$. Рассмотрим схему серий, причем n-ая цепь является цепью с n моментами времени (число состояний s фиксировано).

Поэтому, все рассматриваемые величины будут зависеть от дополнительного индекса n. Коэффициент эргодичности (см. (1.2)) в этом случае

$$\alpha^{(n)}=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\min_{ir}\sum_{j=1}^{s}\min\left\{p_{ij}^{(k)}(n),\ p_{rj}^{(k)}(n)\right\}.$$

Пусть случайная величина $S_n^{(i)}$ означает число попаданий в состояние E_i n-ой цепи за первые n шагов. Тогда для вероятности $P_n(m_1,\ \ldots,\ m_s)$ случайному вектору $(S_n^{(1)},\ \ldots,\ S_n^{(s)})$ принять значение $(m_1.\ \ldots,\ m_s)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Если* $\alpha^{(n)}B_n^{(i)}\to\infty$ $(n\to\infty)$, $i=1,\ldots,s-1$ *и квадратичная форма*

$$Q_n(t_1,\ \ldots,t_{s-1})=\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{s-1}t_i\frac{S_n^{(i)}}{B_n^{(i)}}\right)\asymp t_1^2+\cdots+t_{s-1}^2$$

равномерно, относительно n, то при

$$1\leqslant|x_i|=O(\alpha^{(n)}B_n^{(i)}),\qquad i=1,\ 2,\ldots,s-1 \tag{1.15}$$

имеет место сооотношение

$$\frac{B_n^{(1)}\cdots B_n^{(s-1)}P_n(m_1,\ldots,m_{s-1})}{\varphi_{s-1}(x_1,\ldots,x_{s-1})}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k=3}^{\infty}Q_{kn}\left(\frac{x_1}{\alpha^{(n)}B_n^{(1)}},\ \ldots,\ \frac{x_{s-1}}{\alpha^{(n)}B_n^{(s-1)}}\right)\right\}\times$$

$$\left(1+O\left(\frac{|x_1|}{\alpha^{(n)}B_n^{(1)}}+\cdots+\frac{|x_{s-1}|}{\alpha^{(n)}B_n^{(s-1)}}\right)\right).$$

Здесь

$$B_n^{(i)2}=\mathbf{D}\,S_n^{(i)},\qquad x_i=\frac{m_i-\mathbf{M}S_n^{(i)}}{B_n^{(i)}},\qquad i=1,\ 2,\ldots,s,$$

$$\varphi_{s-1}(y_1,\ldots,y_{s-1})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{s-1}D_n}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q_n^{-1}(y_1,\ldots,y_{s-1})\right.$$

— плотность $s-1$-мерного нормального распределения, Q_{kn} — полилинейная форма k-ой степени и

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=3}^{\infty} Q_{kn}\to 0\,(n\to\infty)$$

при всех x_l удовлетворяющих условию (1.15).

Теоремы больших уклонений для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова мы доказывали только в том случае, когда слагаемые $|X_k|\leqslant \leqslant C^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Это делалось исключительно ради простоты и так громоздких выкладок и ответов. Мы приведем одну теорему, частный результат который опубликован автором в заметке [44] (там также найдем зоны больших уклонений Ю. В. Линника), для необязательно ограниченых слагаемых. Предположим, что $\ln \mathbf{M}\,\{\exp z\,X_k\mid \tilde F_{k-1}\}$, $k=1, 2, \ldots, n$ аналитична с вероятностью 1 в некоторой окрестности $z=0$, где за ln берется главное значение логарифма. Положим

$$L_k\,(z\mid\tilde F_{k-1})=\frac{1}{z^3}\ln\mathbf{M}\,\{\,e^{zX_k}\mid\tilde F_{k-1}\,\},$$

$$L_k\,(z)=\frac{1}{z^3}\ln\mathbf{M}e^{zX_k}.$$

Теорема 13. *Пусть*

$$\operatorname{vrai\,sup}|\,L_k\,(z\mid\tilde F_{k-1})\,|\leqslant c_k^2<\infty \text{ в круге } |\,z\,|<A_n,\ k=1, 2\ \ldots,\ n. \tag{1.16}$$

Тогда существует абсолютная константа $H_3>0$, такая, что в интервале

$$1\leqslant x\leqslant\delta\Delta_n,\qquad \delta<\delta_0,\qquad \Delta_n=\frac{A_n\alpha^{(n)}B_n}{H_3}$$

имеют место соотношения больших уклонений

$$\frac{1-F_{Z_n}(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda_n\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)}\left(1+\Theta\Psi\,(\Theta)\,\frac{x}{\Delta_n}\right),$$

$$\frac{F_{Z_n}(-x)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda_n\left(-\frac{x}{\Delta_n}\right)}\left(1+\Theta\Psi\,(\Theta)\,\frac{x}{\Delta_n}\right), \tag{1.4'}$$

причем для δ_0, $\Psi\,(\delta)$, $\lambda_n\,(t)$ верны определения из теоремы 2, *если только H_1 заменить на любой H_n удовлетворяющий неравенству*:

$$H_n\geqslant\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}c_k^2.$$

Если вместо (1.16) выполняется более слабое условие

$$|\,L_k\,(z)\,|\leqslant c_k^2<\infty \text{ при } |\,z\,|<A_n, \tag{1.16}$$

то удается установить (1.4^1), только при

$$\Delta_n=\frac{A_n\alpha^{(n)}B_n}{H_3\ln^3 n}\ \text{ и } B_n\ll n^A, \text{ где}$$

A — некоторое положительное постоянное.

(Продолжение в IX, № 3.)

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
15.I.1969

Литература

1. А. А. Марков, Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь, Записки Академии наук по физ.-матем. отделению, 1910, VIII серия, 25, № 3; А. А. Марков, Избранные труды, 1951, АН СССР, 465–509.
2. С. Н. Бернштейн, Sur l'extension du theoreme-limite du calcul des probabilites aux sommes de quantites, Math. Ann., 97(1926), 1–59, (русск. перевод, С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, 10(1944), 65–144).
3. С. Н. Бернштейн, Sur les sommes de quantites dependantes, Изв. АН СССР, VI сер., № 15–17 (1926), 1459–1478.
4. С. Н. Бернштейн, Sur les sommes de quantites dependantes, Изв. АН СССР, А, № 4(1928), 55–60.
5. С. Н. Бернштейн, Determination d'une limite interieure la dispersion des sommes de grandeurs lices en chaine singuliere, Матем. сб., I, № 1 (1936),29–38.
6. А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изд. АН.СССР, сер. матем., 13, 4(1949), 281–300.
7. Ю. В. Линник, О неоднородных цепях Маркова, ДАН СССР, 60, № 1(1948), 21–24,
8. Ю В. Линник, К теории неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем, 13, № 1(1949), 65–94.
9. Ю. В. Линник, Н. А. Сапогов, Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, № 6(1949), 533–566,
10. W. Doeblin, Sur les properties asymptotiques de mouvement regis par cortains des chaines simples, Bull. Math. Soc. Rom. Sci., 39, No 1 (1937), 57–115.
11. W. Doeblin, Sur les chaines de Markoff, Comp. Rend. Paris, 203 (1936), 1210–1211.
12. W. Doeblin, Le cas discontinu des probabilites en chaine, Publ. Fac. Sci., Univ. Masaryk 236 (1936), 3–13.
13. Р. Л. Добрушин, Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 4(1953), 291–330.
14. Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, 102, № 1(1955), 5–8.
15. Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., I, 72–89, 4, 365–425 (1956).
16. Н. А. Сапогов, О сингулярных цепях Маркова, ДАН СССР, 58 (1947), 193–196.
17. Н. А. Сапогов, Предельная теорема Лапласа – Ляпунова для сингулярной цепи Маркова, ДАН СССР, 58 (1947), 1905–1908.
18. Н. А. Сапогов, Об одной предельной теореме, ДАН СССР, 69 (1959), 15–18.
19. С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.
20. Ю. А. Розанов, О центральной предельной теореме для адитивных случайных функций, Теор. вероятн. и ее примен., 5, 2(1957), 278–281.
21. В. А. Волоконский и Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для функционалов от стационарных процессов. Теор, вероят. и ее примен., 5, 2(1959), 186–207.
22. Ю. А. Розанов, О центральной предельной теореме для слабо зависимых величин Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероят. и матем. статистике, Вильнюс (1962), 84–95.
23. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., 2, 4(1957), 389–416.
24. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., 6, 1(1961), 67–86.
25. С. В. Нагаев, Центральная предельная теорема для марковских процессов с дискретным временем, Изв. АН Уз. ССР, сер. физ. – мат. наук, 1962, № 2, 12–20.
26. И. А. Ибрагимов, Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов, ДАН СССР, 125, 4(1959), 711–714.
27. И. А. Ибрагимов, Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов, Теория вероят. и ее примен., 7, 4(1962), 361–392.

28. M. Rosenblat, A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 (1956), 43—47.

29. А. Рауделюнас, Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в неоднородную цепь Маркова I, Лит. матем. сб., I, № 1—2 (1961), ~~229—312~~ 303—310

30. А. Рауделюнас, Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в неоднородную цепь Маркова II, Лит. мамем. сб., II, № 1(1962), 115—124.

31. Б. Ряуба, О применимости центральной предельной теоремы к суммам серий слабо зависимых случайных величин, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероят. и матем. статистике, Вильнюс, 1962, 97—109.

32. Б. Ряуба, О центральной предельной теореме для сумм серий слабо зависимых случайных величин, Лит. матем. сб., II, № 2(1962), 193—205.

33. А. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для сумм случайных величин связанных в однородную цепь Маркова в случае устойчивого предельного распределения, Лит. матем. сб., I, № 1—2(1961), 13—22.

34. А. Алешкявичене, Об уточнении предельных теорем для однородных цепей Маркова, Лит. матем. сб., III, 1(1963), 9—19.

35. А. Алешкявичене, Большие уклонения для однородных цепей Маркова, Лит. матем сб., V, № 2(1965), 199—209.

36. P. H. Diananda, The central limit theorem for dependent variables asimptotycal stationary to second order, Proc. Cambridge Philos, 50, 2 (1954), 287—292.

37. Я. Г. Синай, О предельных теоремах для стационарных процессов, Теория вероят. и ее примен., 133, 2(1962), 213—219.

38. Д. Мешалкин, Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний, Теория вероятн. и ее примен., 3, 4(1958), 361—385.

39. И. С. Волков, О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний, Теория вероятн. и ее примен., 3, 4(1958), 413—429.

40. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., 10, 4(1965), 645—659.

41. В. А. Статулявичус, А. Миталаускас, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых случайных величин, Лит. матем. сб., IV, 4(1966), 569—583.

42. V. A. Statulevičius, On large Deviations, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und vervandte Gebiete, Band 6, Heft 2 (1966), 133—144.

43. В. А. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Предельные теоремы теории вероятностей, Ташкент, 1963, 123—130.

44. В. А. Статулявичус, О предельных теоремах для цепей Маркова с учетом больших уклонений, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и математ. статистике, Вильнюс, 1962, 121—123.

45. В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова, Лит. матем. сб., I, № 1—2(1961), 231—314.

46. В. А. Статулявичус, Некоторые функционалы на процессах, Transactions of the Second Prague Conference On Information Theory, Statisrical Decision Functions, Random Processes, Prague, 1960, 953—955.

47. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы и их уточнения для аддитивных случайных функций и сумм слабо зависимых случайных величин, Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Dedision Functions, Random Processes, Prague, 1964, 683—687.

48. В. А. Статулявичус, О больших уклонениях для случайных процессов, Лит. матем. сб, VI, № 4(1966), 543—545.

49. В. А. Статулявичус, Некоторые новые результаты для сумм слабо зависимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., 5, 2(1960), 258—259.

50. V. A. Statulevičius, B. Riauba, On higher correlation functions, Proceeding of 3d International Congress of Automatical Control, London, 1966.

51. В. А. Статулявичус, Об уточненных предельных теоремах для слабо зависимых случайных величин, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, 1962, 1 3–119.
52. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., 67 (1949), 98–119.
53. К. Л. Чжун, Однородные цепи Маркова, „Мир", М., 1964.
54. Т. А. Сарымсаков, Основы теории процессов Маркова, Гостехиздат, М., 1954.
55. Р. З. Хасьминский, О предельных распределениях сумм условнонезависимых случайных величин, Теория вероятн., и ее примен., 6, 1(1961), 119–125.
56. H. D. Miller, A convexity property in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain, Ann. Math. Statistics, 32 (1961), 1 260–1270.
57. B. Gyires, Eine Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes, Acta Math. Hungar. Acad. Sci., 13, N 1–2 (1962), 69–80,.
58. J. Keilson, D. M. G. Wishart, A Central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain, Proc. Combridge Phil. Soc., 60, (1964), 547–567.
59. R. Pyke, Markov renewal processes: definitions and preliminary properties, Ann. Math. Statistics, 32, 4 (1961), 1231–1242, 1243–1259.
60. Г. Ю. Алешкявичюс, О центральной предельной проблеме для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, Лит. матем. сб., VI, № 1(1966), 15–22.
61. Г. Ю. Алешкявичюс, Некоторые предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на однородной регулярной цепи Маркова, Лит. матем. сб., VI, № 3(1966), 297–311.
62. Г. Ю. Алешкявичюс, Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова, Лит. матем. сб., VI, № 4(1966), 633–634.
63. Г. Ю. Алешкявичюс, О предельных теоремах для сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова, ,,Математика-Физика-Кибернетика", Труды научн. конф. молодых ученых Лит. ССР, посвященной 50-летию Окт. соц. рев., Вильнюс, 1967, 14–15.
64. B. Rosen, On the central limit theorem for sums of dependent random variables, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 7, 1 (1967), 48–82.
65. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин М.-Л., 1949.
66. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятностей и ее прим., 2, 2(1957) 214–229.

RIBINĖS TEOREMOS ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, SURIŠTŲ Į MARKOVO GRANDINĘ SUMOMS. I

V. Statulevičius

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjami analiziniai ir tiesioginiai-tikimybiniai metodai, kuriais atsitiktinių dydžių (11), surištų į Markovo grandinę, sumų ribinėse teoremose galima gauti analogiškus rezultatus, kaip ir nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms, kai ribinis dėsnis normalinis. § 1 formuluojamos pagrindinės teoremos apie normuotos sumos Z_n pasiskirstymo f-jos $F_{Z_n}(x)$ konvergavimo į $\Phi(x)$ greičio įvertinimą (teoremos 1, 3, 4), didelių atsitiktinių tikimybių $P\{Z >x\}$ elgesį (teoremos 2, 12, 13) $F_{z_n}(x)$, tankio $p_{Z_n}(x)$, tikimybės $P\{S_n=m\}$ asimptotinius išdėstymus (teoremos 5, 6, 7, 8, 9) ir lokalines ribines teoremos (10, 11).

§ 2 ir § 3 įrodoma serija lemų, kurios ir nugali pagrindinius sunkumus kelyje nuo nepriklausomumo į priklausomumą.

LIMIT THEOREMS FOR THE SUMS OF RANDOM VARIABLES RELATED TO A MARKOV CHAIN

V. Statulevičius

(*Summary*)

In this paper the analytical and direct - probabilistic methods which enable to get the results in limit theorems for sums of random variables related to a Markov chain analoguous to those in limit theorems for the sums of independent random variables when the limit law is normal are developed.

In § 1 the main theorems on the estimation of the rate of convergence of the distribution function F_{Z_n} of normed sum Z_n to the $\Phi(x)$ (theorems 1, 2, 3, 4), on the large deviations of $P\{Z_n > x\}$ (theorems 2, 12, 13), on the asymptotic expansions for the F_{Z_n} for the density $p_{Z_n}(x)$ of $F_{Z_n}(x)$ and for the probability $P\{S_n = m\}$ (theorems 5, 6, 7, 8, 9) and local limit theorems (10, 11) are proved.

In § 2 and § 3 lemmas which enable us to overcome main difficulties in the way from independence to dependence are proved.