X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–513

О НЕКОТОРЫХ ПАРАХ T КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ, РАССЛОЯЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П. Вашкас

1. Комплекс прямых K, описываемый ребром $l \equiv A_1A_2$ подвижного репера $\{A_i\}$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$:

$$dA_i = \omega_i^j A_j,$$

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j],$$

заданный уравнениями

$$\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0, \tag{1}$$

$$[\omega_2^1 - \omega_3^4, \omega_1^3] + [\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4, \omega_1^4] + [\omega_1^2 - \omega_4^3, \omega_2^4] = 0, \tag{2}$$

называется односторонне расслояемым посредством линейных элементов, если на нем вполне интегрируемо дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} &dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2\omega_2^1 + \omega_1^2 + \\ &+ \left\{ \mu_{2222}\omega_1^3 + (2\mu_{2221} + \mu_{22})\omega_1^4 - \left(\mu_{2211} + \mu_{21} + \frac{1}{2}\mu\right)\omega_2^4 \right\} t^2 + \\ &+ \{ (2\mu_{2221} - \mu_{22})\omega_1^3 + (4\mu_{2211} - \mu)\omega_1^4 - (2\mu_{2111} + \mu_{11})\omega_2^4 \} t + \\ &+ \left(\mu_{2211} - \mu_{21} + \frac{1}{2}\mu \right)\omega_1^3 + (2\mu_{2111} - \mu_{11})\omega_1^4 - \mu_{1111}\omega_2^4 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Дифференциально-геометрический объект μ_{pqrs} (μ_{pqrs} симметричны по всем индексам; $p, q, r, s = 1, 2$) определяет на луче l 4 инвариантные точки t^pA_p, где [2]

$$\mu_{pqrs}t^pt^qt^rt^s = 0, \tag{4}$$

а дифференциально-геометрические объекты μ_{pq} (симметричны) и μ лучу l ставят в соответствие прямую, заданную уравнениями [2]

$$\begin{aligned} &x^1 + \mu_{22}x^3 + \left(\mu_{21} + \frac{1}{2}\mu\right)x^4 = 0, \\ &x^2 - \left(\mu_{21} - \frac{1}{2}\mu\right)x^3 - \mu_{11}x^4 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

которая не пересекается с A_1A_2. Следовательно, на этой прямой могут быть выбраны вершины A_4 и A_3 тетраэдра, что мы в дальнейшем и будем полагать. В таком случае

$$\mu_{pq} = 0, \ \mu = 0.$$

Прямая $l^1 = A_4A_3$ описывает в общем случае комплекс прямых K'. Рассматривается случай, когда комплексы K и K' образуют пару T [1], т.е. когда дифференциальные уравнения комплекса K' имеют вид:

$$\omega_3^2 + \omega_4^1 = 0, \tag{6}$$

$$[\omega_2^1 - \omega_3^4,\ \omega_4^2] + [\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4,\ \omega_4^1] + [\omega_1^2 - \omega_4^3,\ \omega_3^1] = 0. \tag{7}$$

Комплекс K' будет расслояемым в направлении комплекса K, если на нем вполне интегрируемо уравнение [2]

$$d\tau + \tau(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \tau^2\ \omega_3^4 + \omega_4^3 + (\mu_{3333}\,\omega_4^2 + 2\mu_{3334}\,\omega_4^1 - \mu_{3344}\,\omega_3^1)\,\tau^2 +$$
$$+ 2(\mu_{3334}\,\omega_4^2 + 2\mu_{3344}\,\omega_4^1 - \mu_{3444}\,\omega_3^1)\,\tau + \mu_{3344}\,\omega_4^2 + 2\mu_{3444}\omega_4^1 - \mu_{4444}\omega_3^1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tau^\alpha\,\tau^\beta\,\tau^\gamma\,\tau^\delta = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 3, 4) \tag{9}$$

определяет 4 инвариантные точки $\tau^\alpha A_\alpha$ на луче l'.

2. Плоскость, ассоциированная точке $M = A_1 + tA_2$ в нулевой системе комплекса K пересекает прямую A_4A_3 в точке $N = A_4 + tA_3$, а плоскость, ассоциированная точке N в нулевой системе комплекса K' – прямую A_1A_2 в точке M, т.е. в случае пары T устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками лучей l и l'.

3. Приведем еще один результат, указанный в [2], которым здесь будем пользоваться. Когда лучу l комплекса прямых K соответствует прямая, определенная уравнениями (5), главные формы этой прямой линейно выражаются через главные формы луча l. Когда прямая (5) совпадает с прямой A_4A_3, это соответствие может быть задано при помощи уравнений

$$\omega_3^1 = -y_{2222}\,\omega_1^3 - (2y_{2221} + y_{22})\,\omega_1^4 + \left(y_{2211} + y_{21} + \frac{1}{3}\,y\right)\omega_2^4,$$

$$\omega_4^1 = -\left(y_{2221} - \frac{1}{2}\,y_{22} + \frac{1}{2}\,z_{22}\right)\omega_1^3 - \left(2y_{2211} - \frac{1}{3}\,y + z_{21}\right)\omega_1^4 +$$
$$+ \left(y_{2111} + \frac{1}{2}\,y_{11} + \frac{1}{2}\,z_{11}\right)\omega_2^4,$$

$$\omega_3^2 = \left(y_{2221} - \frac{1}{2}\,y_{22} - \frac{1}{2}\,z_{22}\right)\omega_1^3 + \left(2y_{2211} - \frac{1}{3}\,y - z_{21}\right)\omega_1^4 -$$
$$- \left(y_{2111} + \frac{1}{2}\,y_{11} - \frac{1}{2}\,z_{11}\right)\omega_2^4,$$

$$\omega_4^2 = \left(y_{2211} - y_{21} + \frac{1}{3}\,y\right)\omega_1^3 + (2y_{2111} - y_{11})\,\omega_1^4 - y_{1111}\,\omega_2^4 \tag{10}$$

и соответствующих внешних квадратичных (y_{pqrs}, y_{pq} и z_{pq} симметричны по всем индексам). Если ребро l описывает развертывающуюся поверхность в комплексе K (причем ребро возврата этой поверхности описывает точка $M = A_1 + tA_2$), то касательная плоскость к этой поверхности вдоль луча l пересекает прямую A_4A_3 в некоторой точке $N = A_4 + tA_3$. Прямая A_4A_3 при этом описывает некоторую линейчатую поверхность, касательная плоскость которой в точке N пересекает луч l в некоторой точке $M' = A_1 + \tau A_2$. Точка M'

совпадает с точкой M тогда и только тогда, когда координата точки M ($t = t^2 : t^1$) удовлетворяет уравнению

$$y_{pqrs} t^p t^q t^r t^s = 0. \tag{11}$$

4. Рассматривается частный случай, когда:

а) 4 точки прямой A_1A_2, определяемые уравнением (4), совпадают между собой; в эту точку помещается вершина A_1, чем при помощи еще нормирования вершин достигается

$$\mu_{2222} = 1, \quad \mu_{2221} = \mu_{2211} = \mu_{2111} = \mu_{1111} = 0;$$

б) то же происходит с четырьмя точками прямой A_4A_3, определяемыми уравнением (9);

в) четырехкратные точки прямых A_1A_2 и A_4A_3 являются соответствующими в указанном в п. 2 соответствии; четырехкратной точкой на луче l' является теперь A_4, и мы, после нормирования вершин, имеем:

$$\mu_{3333} = 1, \quad \mu_{3334} = \mu_{3344} = \mu_{3444} = \mu_{4444} = 0.$$

5. Требование полной интегрируемости уравнений (3) и (8) при сделанных предположениях приводит к системе уравнений:

$$\begin{gathered}
[-2\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3,\ \omega_1^3] + [(\omega_1^2 + \omega_4^3) + \omega_3^1,\ \omega_1^4] - [\omega_4^1,\ \omega_2^4] = 0, \\
[(\omega_1^2 - \omega_4^3) + (\omega_1^2 + \omega_4^3) - \omega_3^1\ \omega_1^3] + [\omega_4^2,\ \omega_2^4] = 0, \\
[\omega_4^1,\ \omega_1^3] - [\omega_4^2,\ \omega_1^4] = 0, \\
[-(\omega_1^2 - \omega_4^3) + (\omega_1^2 + \omega_4^3) - \omega_2^4,\ \omega_4^2] + [\omega_1^3,\ \omega_3^1] = 0, \\
[\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4,\ \omega_4^2] + [(\omega_1^2 + \omega_4^3) + \omega_2^4,\ \omega_4^1] - [\omega_1^4,\ \omega_3^1] = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Из уравнений (2), (12) в случае $[\omega_1^3 \omega_1^4 \omega_2^4] \neq 0$, $[\omega_4^2 \omega_4^1 \omega_3^1] \neq 0$ получаем

$$\omega_4^2 = -\omega_1^3. \tag{13}$$

Продифференцировав это уравнение внешним образом, в силу этого же уравнения и уравнений (1), (6), получаем дополнительное уравнение

$$\begin{gathered}
[(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3) + (\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) - (\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4),\ \omega_1^3] - \\
- [\omega_1^2 + \omega_4^3,\ \omega_4^1 + \omega_1^4] = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Из уравнений (2), (7), (12), (14) теперь получаем:

$$\begin{gathered}
\omega_4^2 = -\omega_1^3, \\
\omega_4^1 = a\,\omega_1^3 + \omega_1^4, \\
\omega_3^1 = a^2\,\omega_1^3 + 2a\,\omega_1^4 - \omega_2^4, \\
\omega_2^1 - \omega_3^4 = b\,\omega_1^3 - ac\,\omega_1^4 + c\,\omega_2^4, \\
\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 = -ac\,\omega_1^3 - 2a^2\,\omega_1^4 + 2a\,\omega_2^4, \\
\omega_1^2 - \omega_4^3 = c\,\omega_1^3 + 2a\,\omega_1^4 - 2\omega_2^4, \\
\omega_1^2 + \omega_4^3 = (2n - a^2)\,\omega_1^3, \\
-2\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = m\,\omega_1^3 + n\,\omega_1^4 - a\,\omega_2^4, \\
\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4 = p\,\omega_1^3 - n\,\omega_1^4 + a\,\omega_2^4.
\end{gathered} \tag{15}$$

Сравнивая (15) с (10) получаем:

$$y_{2222}=-a^2,\quad y_{2221}=-a,\quad y_{2211}=-\frac{2}{3},\quad y_{2111}=0,\quad y_{1111}=0,$$

и уравнение (11) принимает вид

$$(t^2)^2\,(at^2+2t^1)^2=0.$$

Отсюда следует, что вместо 4 точек, определяемых уравнением (11), в этом случае имеем две пары совпадающих точек, причем одна пара совпадает с точкой A_1. Совмещая вершину A_2 с другой парой, получаем

$$a=0,$$

и уравнения (15) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\omega_4^2=-\omega_1^3,\\
&\omega_4^1=\omega_1^4,\\
&\omega_3^1=-\omega_2^4,\\
&\omega_2^1-\omega_3^4=b\,\omega_1^3+c\,\omega_2^4,\\
&\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=0, && (15')\\
&\omega_1^2-\omega_4^3=c\,\omega_1^3-2\omega_2^4,\\
&\omega_1^2+\omega_4^3=2n\,\omega_1^3,\\
&-2\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=m\,\omega_1^3+n\,\omega_1^4,\\
&\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_4^4=p\,\omega_1^3-n\,\omega_1^4.
\end{aligned}$$

Продифференцировав второе и третье уравнения системы (15′) внешним образом, из полученных уравнений, в силу уже имеющихся, получаем:

$$p=m; \tag{16}$$

$$\omega_2^1+\omega_3^4=-2n\,\omega_2^4. \tag{15''}$$

Внешним дифференцированием седьмого уравнения системы (15′) и уравнения (15″) и разложением полученных уравнений по лемме Картана получаем

$$dn=0,$$

т.е. $n=\mathrm{const}$.

Внешнее дифференцирование остальных уравнений системы (15′) приводит еще к трем внешним квадратичным уравнениям, которые вместе с уравнениями (1), (6), (15′), (15″) при условии (16) образуют замкнутую относительно внешнего дифференцирования систему уравнений, определяющую указанную в п. 4 пару T комплексов. Эта система — в инволюции с характерами $s_0=13$, $s_1=3$, $s_2=0$ и $s_3=0$.

6. Используя уравнения (1), (6), (15′) и (15″), непосредственным дифференцированием получаем, что

$$d(A_1+\alpha_\varepsilon A_4,A_2-\alpha_\varepsilon A_3)=\omega\,(A_1+\alpha_\varepsilon A_4,A_2-\alpha_\varepsilon A_3),$$

где

$$\alpha_\varepsilon\equiv n+\varepsilon\sqrt{n^2+1}\qquad(\varepsilon=\pm 1),$$

$$\omega\equiv\frac{1}{2}\,(\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4)+2\varepsilon\sqrt{n^2+1}\,\omega_1^4,$$

а это показывает, что две прямые

$$l_\varepsilon \equiv (A_1 + \alpha_\varepsilon A_4, A_2 - \alpha_\varepsilon A_3) \tag{17}$$

являются неподвижными.

Прямые (17) и луч A_1A_2 комплекса K определяют поверхность второго порядка

$$x^1x^3 + x^2x^4 = 0, \tag{18}$$

причем указанные три прямые принадлежат одному семейству прямолинейных образующих этой поверхности. Нетрудно проверить, что этому же семейству прямолинейных образующих поверхности (18) принадлежит и луч A_4A_3 комплекса K'. Сложное отношение четырех упомянутых прямолинейных образующих одного семейства

$$(A_1A_2;\ A_4A_3;\ A_1 + \alpha_{-1}A_4, A_2 - \alpha_{-1}A_3;\ A_1 + \alpha_1 A_4, A_2 - \alpha_1 A_3) =$$

$$= (A_1, A_4, A_1 + \alpha_{-1}A_4, A_1 + \alpha_1 A_4) = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2+1}} = \mathrm{const} < 0,$$

т.е. луч A_4A_3 комплекса K', соответствующий лучу A_1A_2 комплекса K, всегда лежит на поверхности второго порядка, определенной двумя постоянными прямыми пространства и лучом A_1A_2, принадлежа тому же семейству прямолинейных образующих; лучи A_1A_2 и A_4A_3 при этом постоянными прямыми разделены и образуют с ними постоянное двойное отношение.

Так как [5]

$$dx^i = -x^j\omega_j^i + \Theta x^i, \qquad D\Theta = 0,$$

то в рассматриваемом случае

$$d(x^1x^3 + x^2x^4) = \left\{2\Theta - \frac{1}{2}(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4)\right\}(x^1x^3 + x^2x^4) +$$

$$+ \omega_1^3\{-(x^1)^2 + (x^4)^2 - 2n\, x' x^4\} + \omega_2^4\{-(x^2)^2 + (x^3)^2 + 2n\, x^2x^3\},$$

а это показывает, что семейство квадрик (18) является двухпараметрическим. При $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$ поверхность (18) неподвижна, а прямые A_1A_2 и A_4A_3 перемещаются по этой поверхности. Таким образом, комплекс прямых $K\,(K')$ расслаивается на двухпараметрическое семейство демиквадрик.

7. Прямые

$$(A_1 + tA_2,\ A_4 - tA_3)$$

образуют второе семейство прямолинейных образующих квадрики (18). Прямые

$$(A_1 + tA_2,\ A_4 + tA_3),$$

соединяющие соответствующие точки лучей A_1A_2 и A_4A_3 пары T (п. 2), являются прямолинейными образующими поверхности (18) тогда и только тогда, когда $t = 0$ или $t = \infty$, т.е. прямые A_1A_4 и A_2A_3.

8. В силу уравнений (1), (6), (15′) и (15″),

$$D\omega_1^4 = 0,$$

следовательно, комплекс прямых $K\,(K')$ расслаивается на однопараметрическое семейство конгруэнций прямых

$$\omega_1^4=0\,,$$
$$\omega_2^3=0\,,$$

расслояемых, в силу уравнений (3), (8), (12), при помощи конусов второго порядка [3].

9. Наличие в пространстве двух неподвижных прямых (17) дает возможность использовать для охарактеризования рассматриваемой пары комплексов свойства комплекса прямых в биаксиальном пространстве [4].

Прямые $(A_1+\alpha_\varepsilon A_4,\ A_2-\alpha_\varepsilon A_3)$ неподвижны, если

$$\begin{aligned}
&\omega_4^2+\omega_1^3=0,\\
&\omega_4^1-\omega_1^4=0,\\
&\omega_3^2-\omega_2^3=0,\\
&\omega_3^1+\omega_2^4=0\,,\\
&\omega_2^1+\omega_3^4=-2n\,\omega_2^4\,,\\
&\omega_1^2+\omega_4^3=2n\,\omega_1^3\,,\\
&\omega_1^1-\omega_4^4=-2n\,\omega_1^4\,,\\
&\omega_2^2-\omega_3^3=2n\,\omega_2^3\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Пусть прямая A_1A_2 описывает комплекс прямых, заданный уравнениям

$$\lambda_\alpha^p\,\omega_p^\alpha=0\,,$$
$$D\,(\lambda_\alpha^p\,\omega_p^\alpha)=0\,.$$

Плоскость, ассоциированная точке A_1+tA_2 в нулевой системе этого комплекса, задается уравнением

$$(\lambda_3^2-t\,\lambda_3^1)\,x^3+(\lambda_4^2-t\,\lambda_4^1)\,x^4=0\,.$$

Проводим произвольную прямую p, пересекающую прямые l_ε в точках $K_\varepsilon\equiv A_1+\alpha_\varepsilon A_4+\rho_\varepsilon\,(A_2-\alpha_\varepsilon A_3)$ и прямую A_1A_2 в точке F. В таком случае прямая p является прямолинейной образующей поверхности (18) и $\rho_{-1}=\rho_1=\rho$, а точкой пересечения прямой p и луча A_1A_2 является точка $F=A_1+\rho A_2$. Нетрудно проверить, что плоскость $(p,\ A_1A_2)$ совпадает с плоскостью, ассоциированной точке F в нулевой системе комплекса, тогда и только тогда, когда

$$\lambda_3^1\,\rho^2-(\lambda_3^2+\lambda_4^1)\,\rho+\lambda_4^2=0\,. \tag{20}$$

Отметим, что касательная плоскость квадрики (18) в точке $A_1+\rho A_2$ совпадает с плоскостью, ассоциированной этой точке в нулевой системе комплекса, тогда и только тогда, когда ρ удовлетворяет уравнению (20). Такие точки в [4] названы центрами луча. Из рассмотренного выше следует, что прямолинейные образующие квадрики (19), проходящие через центры луча и отличные от A_1A_2 согласно терминологии Н. И. Кованцова [4], являются осями комплекса; как следует из уравнения (20), такая прямая в общем случае не единственная, как указано в [4] (см. стр.240.)

Полагая, что каждый луч комплекса имеет пару действительных различных центров и помещая в эти центры вершины A_1 и A_2, получаем

$$\lambda_3^1=0, \qquad \lambda_4^2=0.$$

В таком случае только для комплекса, у которого $\lambda_3^2=\lambda_4^1$, т.е. только для комплекса, у которого кривизна [4] $k=-1$, семейство квадрик (18) является двухпараметрическим, ибо, в силу уравнений (19),

$$d(x' x^3+x^2 x^4)=\left\{2\Theta-\frac{1}{2}(\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4)\right\}(x^1 x^3+x^2 x^4)+$$

$$+\omega_1^3\{-(x^1)^2+(x^4)^2-2n\, x^1 x^4\}+\omega_2^4\{-(x^2)^2+(x^3)^2+2n\, x^2 x^3\}-$$

$$-(\omega_1^4+\omega_2^3)\{x^1 x^2+x^3 x^4-n(x^1 x^3-x^2 x^4)\}.$$

Система уравнений (19) и

$$\omega_1^4+\omega_2^3=0, \tag{21}$$

$$D(\omega_1^4+\omega_2^3)=0, \tag{21'}$$

определяющая такой комплекс — в инволюции с характерами $s_0=9, s_1=1$, $s_2=1$, $s_3=0$, следовательно, произвол существования комплекса — одна функция двух аргументов (т.е. три параметра семейства квадрик (18) связаны одним уравнением).

Разлагая уравнение (21′) по лемме Картана, получаем:

$$\omega_2^1-\omega_3^4=b\,\omega_1^3+c\,\omega_2^4,$$

$$\omega_1^2-\omega_4^3=c\,\omega_1^3+f\,\omega_2^4. \tag{22}$$

Используя уравнения (19), (21) и (22), получаем, что

$$D\,\omega_1^4=0,$$

следовательно, комплекс прямых расслаивается также на однопараметрическое семейство конгруэнций прямых

$$\omega_1^4=0,$$

$$\omega_2^3=0. \tag{23}$$

10. Так как для точки $A_1+tA_2+d(A_1+tA_2)$ выражение

$$x^1 x^3+x^2 x^4=(1+\omega_1^1+t\,\omega_2^1)(\omega_1^3+t\,\omega_2^3)+(t+dt+t\,\omega_2^2+\omega_1^2)(\omega_1^4+t\,\omega_2^4),$$

то перемещение точки A_1+tA_2 по квадрике (18) (когда она неподвижна, т.е. когда $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$) характеризуется соотношением

$$dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\,\omega_2^1+\omega_1^2\equiv 0 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4}$$

или уравнением

$$dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\,\omega_2^1+\omega_1^2=P\,\omega_1^3+Q\,\omega_2^4,$$

которое должно быть вполне интегрируемым. Выбор коэффициентов P и Q в виде квадратных трехчленов относительно t ($P=-\mu_{2222}t^2$, $Q=\mu_{1111}$, согласно уравнению (3)) указывает способ расслоения конгруэнций (23) [3].

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
16.I.1969

Литература

1. М. А. Акивис, Пары T комплексов, Успехи математических наук, 3 : 5(27), (1948) 163—165.
2. П. И. Вашкас, О расслоении пары комплексов прямых трехмерного проективного пространства посредством линейных элементов, Диссертация на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук, Вильнюс, 1964.
3. П. Вашкас, О расслоении конгруэнций прямых при помощи некоторых развертывающихся поверхностей, Лит. матем. сб., IX, № 1 (1969), 27—35.
4. Н. И. Кованцов, Теория комплексов, Изд. Киевского университета, 1963.
5. Г. Ф. Лаптев, Геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. общества т. 2, 1953, 275—382.

APIE KAI KURIUOS TIESIŲ KOMPLEKSŲ DVEJETUS T, IŠSLUOKSNIUOJAMUS SU TIESINIŲ ELEMENTŲ PAGALBA

P. Vaškas

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamas tiesių kompleksų dvejeto T [1] išsluoksniavimo su tiesinių elementų pagalba [2] atskiras atvejis. Gauta, kad nagrinėjamu atveju kiekvienas dvejeto kompleksas išsiskaido į dviparametrinę antros eilės paviršių šeimą arba į vienparametrinę tiesių kongruencijų, išsluoksniuojamų su antros eilės kūgių pagalba [3], šeimą. Kiekvienas minėtos šeimos paviršius eina per dvi pastovias tieses l_{-1} ir l_1, o taip pat per atitinkamas kompleksų tieses l ir l'. Visos 4 tiesės priklauso vienai tiesinių sudaromųjų šeimai. Tiesės l_{-1} ir l_1 visada atskiria tieses l ir l', sudarydamos su jomis pastovų dvilypį santykį.

SUR LES CERTAINES COUPLES T DES COMPLEXES DE DROITES STRATIFIABLES À L'AIDE DES ÉLÉMENTS LINÉAIRES

P. Vaškas

(*Résumé*)

Dans cet article on analyse un cas particulier des couples T [1] des complexes de droites stratifiables à l'aide des éléments linéaires [2]. Les résultats obtenus dans ce cas nous montrent que chaque complexe de la couple est formé par une famille de deux paramètres des surfaces de deuxième ordre ou par la famille monoparamètrique des congruences de droites stratifiables à l'aide des cônes de deuxième ordre [3]. Chaque surface de la famille, dont nous avons parlé, contient deux droites fixées l_{-1} et l_1, aussi les droites correspondantes l et l' des complexes. Tous les 4 droites appartiennent à une famille des génératrices rectilignes de la surface. Les droites l_{-1} et l_1 toujours séparent les droites l et l' en formant avec l et l' un rapport double constant.