IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3

1969

УДК – 519.21

НАХОЖДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ВНУТРИ ОВАЛОИДА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э. Гячяускас

Покажем, что, кроме формы функции распределения расстояния между двумя точками, случайно расположенными внутри овалоида, полученной в [1], используя дифференциальное уравнение Крофтона, методом интегральной геометрии можно получить другой вид, аналогичный полученному в [2] для случая овала.

Теорема. *Функция $P\{r\leqslant x\}$ распределения расстояния r между двумя точками, случайно расположенными внутри овалоида T объема V, равна*

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{1}{2\pi V^2}\int_0^x r^2 M(r)\,dr,$$

где $M(r)$ – кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины r, содержащихся внутри овалоида T.

Доказательство.

$$P\{r\leqslant x\}=\frac{\mu\{r\leqslant x\,|\,P_1,\ P_2\in T\}}{\mu\{r\leqslant D\,|\,P_1,\ P_2\in T\}},$$

где μ – мера множества пар точек в трехмерном пространстве, D – наибольшая хорда овалоида T.

Известно, что

$$\mu\{r\leqslant D\,|\,P_1,\ P_2\in T\}=\int_{T\times T}[dP_1\,dP_2]=V^2.$$

Ввиду утверждения [3], § 39, теоремы 4 имеем, что

$$\mu\{r\leqslant x\,|\,P_1,\ P_2\in T\}=\int_{\substack{T\times T\\ r\leqslant x}}[dP_1\,dP_2]=\int_{\substack{r\in T\\ r\leqslant x}} r^2[dG\,dt_1\,dt_2],$$

где dG – плотность множества прямых G, проходящих через точки P_1 и P_2, t_1 и t_2 – расстояния этих точек от основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую G, $r=|t_2-t_1|$.

Заметим, что по правилам внешнего произведения дифференциальных форм $[d\ldots d\ldots]$, где ломаные скобки обозначают и абсолютную величину, при $r=|t_2-t_1|$

$$[dt_1\,dt_2]=2\,[dt_1\,dr].$$

Тогда

$$\mu\{r\leqslant x \mid P_1, P_2\in T\}=2\int\limits_{\substack{r\in T\\ r\leqslant x}} r^2\,[dGdt_1\,dr].$$

Из последнего выражения, дополнив его дифференциалом одного из эйлеровых углов направления прямой G и для компенсации разделив на 2π, имеем

$$\mu\{r\leqslant x \mid P_1, P_2\in T\}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{r\in T\\ r\leqslant x}} r^2\,[dGdt_1\,drd\psi].$$

Так как $dK=[dGdtd\psi]$ есть плотность кинематической меры в трехмерном пространстве (см. [4], стр. 13), получаем, что

$$\mu\{r\leqslant x \mid P_1, P_2\in T\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r\leqslant x} r^2\left(\int\limits_{r\in T}[d\vec{G}\,dtd\psi]\right)dr=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r\leqslant x} r^2\left(\int\limits_{r\in T} d\vec{K}\right)dr=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{x} r^2 M(r)\,dr,$$

где $M(r)$ — кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины r, содержащихся внутри овалоида T.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
17.XII.1968

Литература

1. Э. Гячяускас, Распределение расстояния внутри овалоида, Лит. матем. сб., VII, № 1, 1967, 35–36.
2. Э. Гячяускас, Интегрально геометрический метод нахождения функций распределения длины хорды овала и расстояния внутри овала, Лит. матем. сб., VIII, № 2, 1968, 41–45.
3. P. R. Halmos, Measure theory, New York, 1950.
4. L. A. Santalo, Über das kinematische Mass in Raum, Paris, 1936.

ATSTUMO PASISKIRSTYMO OVALOIDE NUSTATYMAS INTEGRALINĖS GEOMETRIJOS METODU

E. Gečiauskas

(*Reziumė*)

Remiantis integraline geometrija, gauta nauja atstumo tarp dviejų atsitiktinai parinktų ovaloido vidaus taškų pasiskirstymo funkcijos forma.

THE FINDING OF THE DISTRIBUTION OF A DISTANCE IN AN OVALOID BY THE METHOD OF THE INTEGRAL GEOMETRY

E. Gečiauskas

(*Summary*)

The new form of the distribution function of a distance between two random points in an ovaloid is obtained by the method of the integral geometry.